Integration

im Rahmen des Maßkettenkalküls

Diplomarbeit von

Ludwig Neidhart
Zeppelinstraße 16
Augsburg

25. März 2001

eingereicht beim
Institut für Mathematik
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Augsburg

Erstgutachter: Prof. Dr. Bernd Aulbach
Zweitgutachter: Prof. Dr. Fritz Colonius

Bestätigung

Hiermit erkläre ich, dass diese Diplomarbeit selbständig und unter ausschließlicher Verwendung der angegebenen Hilfsmittel erstellt wurde. Ich habe sie weder als Doktor-, Magister- oder Diplomarbeit bei einer anderen Universität oder Hochschule eingereicht.

Augsburg, 25. März 2001

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Das von S. Hilger entwickelte Maßkettenkalkül (siehe [Hil 88], [Hil 90], [Aul 90], [Lak 96], [Boh 00]) soll die diskrete und die kontinuierliche Differential- und Integralrechnung in einem einzigen Kalkül zusammenfassen. Hierbei wurde die Integration bisher lediglich als Umkehrung der Differentiation betrachtet, d. h. man führte das Integral einer Funktion in den Grenzen von a bis b direkt als Differenz der Funktionswerte einer Stammfunktion ein („Cauchy-Integral"). Hilger bemerkt ausdrücklich [Hil 90, Abschnitt 4.3, S. 37], dass es nicht seine Absicht war, das Integral auf maßtheoretische Überlegungen zu gründen.

Im Blick auf die Analogie zur gewöhnliche Differentialrechnung ist jedoch die Frage berechtigt, ob sich auf Maßketten nicht auch ein von der Differentiation unabhängiger Integralbegriff definieren läßt, sei es nach Art des Riemann-Integrals, sei es maßtheoretisch nach Art des Lebesgue-Integrals. In dieser Arbeit sollen derartige Zugänge zur Integration auf Maßketten beschrieben werden.

Ein zweites Anliegen dieser Arbeit ist es, das Maßkettenkalkül in seiner bisher entwickelten Form bis hin zur Integrationstheorie systematisch und mit ausführlichen Beweisen darzulegen, da eine derartige Darstellung bisher noch nicht vorliegt.

Im folgenden Abschnitt weise ich auf besondere Bezeichnungen hin, ansonsten setze ich die üblichen Definitionen und die grundlegenden Sätze der Logik, Mengenlehre, linearen Algebra, Topologie, der gewöhnlichen eindimensionalen Analysis und der elementaren Maßtheorie als bekannt voraus. Alle darüber hinausgehenden benötigten Sätze leite ich explizit her. Handelt es sich bei einem Beweis um eine Überarbeitung eines in der Literatur dargebotenen Beweises, so ist das stets explizit angegeben, und zwar schreibe ich

– „Beweis nach NN", wenn der in NN vorgefundene Beweis
  nur leicht modifiziert wurde,

– „Beweis (vgl. NN)", wenn der in NN vorgefundene Beweis
  ergänzt oder genauer ausgeführt oder auf eine allgemeinere Situation übertragen wurde.

Besonderheiten und Präzisierungen der Notation

Leermengen-Konvention für All-Aussagen

Des öfteren wird im folgenden von der in der Logik üblichen Konvention Gebrauch gemacht, dass für eine beliebige Aussageform $A(x)$ die Aussage $\forall\, x \in \emptyset\ A(x)$ immer wahr ist, unabhängig von den in $A(x)$ inhaltlich beschriebenen Eigenschaften.

Konvention für Gleichungen

Hinsichtlich von *Gleichungen* übernehme ich die folgende Konvention, die zuweilen Fallunterscheidungen überflüssig macht: sind T_1, T_2 Terme, so bedeutet $T_1 = T_2$: wenn einer der beiden Terme definiert ist, so auch der andere und dann bezeichnen beide dasselbe Objekt.

Das Kürzel wkM

Mit wkM kürze ich ab: „wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind“.

Identifikationen Des öfteren wird im folgenden gesagt, dass verschiedene Objekte A und B miteinander *identifiziert* werden. Damit ist gemeint, dass ungeachtet der Verschiedenheit von A und B wkM Bezeichnungen für A auch verwendet werden, um B zu bezeichnen und umgekehrt, und dass wkM Eigenschaften von A auch B zugesprochen werden und umgekehrt.

Besondere Bezeichnungen für Mengen, Relationen und Funktionen

$\mathbb{N}$	bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen *mit* 0.
$\mathbb{K}$	steht durchgehend für eine der beiden Mengen $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.
$\mathfrak{P}(X)$	bezeichnet die *Potenzmenge* von X.
$\complement_G A$	(wkM $\complement A$) bezeichnet das *Komplement* der Menge A bezüglich Grundmenge G.
$\mathfrak{A} \Cap \mathfrak{B}$	bezeichnet für Mengensysteme $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ die Menge $\{A \cap B \,:\, A \in \mathfrak{A} \ \wedge\ B \in \mathfrak{B}\}$

Ist R Relation oder Funktion, a Objekt, X Menge und $A \subseteq X$, so bezeichnet außerdem

$\mathrm{Db}(R)$	bzw. $\mathrm{Wb}(R)$ den Definitionsbereich bzw. Wertebereich von R,
$R(a)$	im Fall $\exists! y\ a\ R\ y$ dieses y, also das *Bild* von a unter R,
$R[a]$	die Menge $\{y \,:\, \exists\ y\ a\ R\ y\}$, also die *Bildmenge* von a unter R,
$R[\![a]\!]$	die Menge $\{R[x] \,:\, x \in a\}$, also das *Bildmengensystem* von a unter R,
X^{Ra}	die Menge $\{x \in X \,:\, x\ R\ a\}$, so z. B. $\mathbb{R}^{>0}$ die Menge der positiven reellen Zahlen,
$X^{\odot}$	die Menge $X^{\neq 0}$, d. h. $X \setminus \{0\}$,
id_X	(wkM id) die *identische Funktion* $\{(x,x) \,:\, x \in X\}$ von X,
$\chi_{A,X}$	(wkM χ_A) die *charakteristische Funktion* von A bezüglich Grundmenge X, d. h. $\chi_A\colon X \longrightarrow \{0,1\}$ mit $\forall\, x \in X\ \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

strukturierte Mengen

Eine *strukturierte Menge* ist ein Tupel $\mathcal{X} = (X, S_1, \ldots, S_n)$, wobei X eine Menge ist. X heißt die *Trägermenge* und $(S_1, \ldots, S_n)$ die *Struktur* der strukturierten Menge. (Beispiele: topologischer Raum, Vektorraum, ...). Bezeichnet ein kalligraphischer Buchstabe (etwa $\mathcal{X}$) oder Frakturbuchstabe (etwa $\mathfrak{X}$) eine strukturierte Menge, so soll der entsprechende gewöhnliche Buchstabe X die Trägermenge bezeichnen. WkM identifiziere ich aber eine strukturierte Menge $\mathcal{X}$ mit ihrem Träger X, benutze also für beides dieselbe Bezeichnung.

Der Träger einer strukturierten Menge als Grundmenge

Im Zusammenhang mit der Betrachtung einer strukturierten Menge $\mathcal{X}$ sei deren Trägermenge X automatisch die *Grundmenge* für die folgenden Konstruktionen: für die Bildung großer Schnittmengen, die Bildung von Komplementmengen sowie für die Bildung von charakteristischen und identischen Funktionen. Das bedeutet im einzelnen, dass
$\bigcap \emptyset := X$ und $\forall\ A \in \mathfrak{P}(X)\quad \complement A := \complement_X A$ sowie $\chi_A := \chi_{A,X}$ und $\mathrm{id} := \mathrm{id}_X$ zu setzen ist.

Die Bezeichnungen $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{U}$ für topologische Räume

Ist die strukturierte Menge $\mathcal{X} = (X, \mathfrak{S})$ ein topologischer Raum, so bezeichne
$\mathfrak{O}_{\mathcal{X}}$ das System $\mathfrak{S}$ der offenen Mengen von $\mathcal{X}$.

Für $x \in X$, bezeichne außerdem
$\mathfrak{U}_{\mathcal{X}}(x)$ oder wkM $\mathfrak{U}(x)$ das System der Umgebungen von x.

1 Ketten

1.1 Einführung

Nr. 1 (Def) Relational

Eine strukturierte Menge (X, R) heißt *Relational*, genau wenn R eine Relation in X, das heißt eine Teilmenge von $X \times X$ ist. Die Struktur R eines Relationals heißt seine *Relation*.

Nr. 2 (Def) Eigenschaften von Relationalen

Sei (X, R) ein Relational.

(X, R) ist *reflexiv*	$:\Leftrightarrow$	$\forall\, x \in X$	$x\ R\ x$
(X, R) ist *irreflexiv*	$:\Leftrightarrow$	$\forall\, x \in X$	$\neg x\ R\ x$
(X, R) ist *symmetrisch*	$:\Leftrightarrow$	$\forall\, x, y \in X$	$x\ R\ y \;\Rightarrow\; y\ R\ x$
(X, R) ist *asymmetrisch*	$:\Leftrightarrow$	$\forall\, x, y \in X$	$x\ R\ y \;\Rightarrow\; \neg y\ R\ x$
(X, R) ist *identitiv*	$:\Leftrightarrow$	$\forall\, x, y \in X$	$x\ R\ y\ R\ x \;\Rightarrow\; x = y$
(X, R) ist *transitiv*	$:\Leftrightarrow$	$\forall\, x, y, z \in X$	$x\ R\ y\ R\ z \;\Rightarrow\; x = z$
(X, R) ist *konnex*	$:\Leftrightarrow$	$\forall\, x, y, z \in X$	$x\ R\ y \;\vee\; y\ R\ x$
(X, R) ist *linear*	$:\Leftrightarrow$	$\forall\, x, y, z \in X$	$x\ R\ y \;\vee\; y\ R\ x \;\vee\; x = y$
(X, R) ist *trichotom*	$:\Leftrightarrow$	$\forall\, x, y, z \in X$	entweder $x\ R\ y$ oder $y\ R\ x$ oder $x = y$

Nr. 3 (Def) Kette

Ein Relational $(\mathbb{T}, \leq)$ ist eine *Kette* $:\Leftrightarrow$ $(\mathbb{T}, \leq)$ ist reflexiv, identitiv, transitiv und konnex.

Bem. Der hier für Ketten vorzugsweise verwendete Buchstabe $\mathbb{T}$ soll an das Wort „Time“ („Zeit“) erinnern, denn eine Menge $\mathbb{T}$ von Zeitpunkten eines Zeitablaufs bildet offenbar zusammen mit der Relation $\leq\ :=\ \{(s, t)\ :\ s$ ist nicht später als $t\}$ stets eine Kette.

Nr. 4 (Def) Kleinergleich–, Größer– und Größergleichrelation

Die Relation R einer Kette $(\mathbb{T}, R)$ bezeichnet man meist mit $\leq$ und definiert dann
$x \geq y \;:\Leftrightarrow\; y \leq x, \quad x < y \;:\Leftrightarrow\; x \leq y \,\wedge\, x \neq y, \quad x > y \;:\Leftrightarrow\; y < x.$
$\leq$ heißt *Kleinergleich–*, $\geq$ *Größer–*, $<$ *Kleiner–* und $>$ *Größerrelation* der Kette.

Nr. 5 (Satz) $<$ und $\leq$ in einer Kette

1. *Für Ketten* $(\mathbb{T}, \leq)$ *ist das Relational* $(\mathbb{T}, <)$
   irreflexiv, asymmetrisch, transitiv, linear und trichotom.
2. *Es gilt die Äquivalenz* $x \leq y \;\Leftrightarrow\; x = y \;\vee\; x < y$
3. *Es gilt* $x < y \leq z \;\Rightarrow x < z$ *und* $x \leq y < z \;\Rightarrow\; x < z$

Beweis. Zu (1). Zur Irreflexivität. $x < x$ bedeutet per Def $x \leq x \;\wedge\; x \neq x$, was falsch ist.
Zur Asymmetrie. Angenommen, $x < y < x$, so folgt per Def von $<$, dass $x \leq y \leq x$, per Identitivität von $\leq$ ist also $x = y$. Dann darf man in $x < y$ das y durch x ersetzen und erhält $x < x$ gegen die Irreflexivität.
Zur Transitivität. Aus $x < y < z$ folgt per Def $x \leq y \leq z$, also $x \leq z$ per Transitivität von $\leq$. Angenommen, $x = z$, so darf man in $x < y < z$ das z durch x ersetzen und erhält $x < y < x$ im Widerspruch zur Asymmetrie. Daher ist $x \neq z$, und mit $y \leq z$ folgt $y < z$.
Zur Linearität. Sei $x \neq y$. Dann ist zu zeigen, dass $x < y$ oder $y < x$. Per Konnexität gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$. Zusammen mit $x \neq y$ folgt also in der Tat $x < y$ oder $y < x$.
Zur Trichotomie. Wegen der Linearität ist nur zu zeigen, dass von den Aussagen $x = y, x < y, y < x$ nicht zwei zugleich erfüllt sein können. Nun sind $x = y \;\wedge\; x < y$ sowie $x = y \;\wedge\; y < x$ per Def von $<$ ausgeschlossen. Auch $x < y < x$ ist ausgeschlossen, nämlich per Asymmetrie.

Zu (2). Zu $\Rightarrow$. Sei $x \leq y$. Wenn $x \neq y$, ist per Def von $<$ gültig, dass $x < y$.
Zu $\Leftarrow$. Wenn $x = y$, gilt $x \leq y$ per Reflexivität von $\leq$. Wenn $x < y$, gilt dasselbe per Def von $<$.

Zu (3). Folgt wegen (2) und der Transitivität von $<$. ∎

Nr. 6 (Satz und Def) Subkette

Ist $(\mathbb{T}, \leq)$ eine Kette, A eine Teilmenge von $\mathbb{T}$, und $\leq_A$ die Einschränkung von $\leq$ auf $A \times A$, so ist $(A, \leq_A)$ trivialerweise ebenfalls eine Kette: diese heißt *von* $(\mathbb{T}, \leq)$ *auf* A *induzierte Subkette*. Deren Relation $\leq_A$ wird wkM wieder mit $\leq$ bezeichnet.

Nr. 7 (Satz und Def) duale Kette

Ist $(\mathbb{T}, \leq)$ eine Kette, so trivialerweise auch $(\mathbb{T}, \geq)$. Diese Kette heißt die *duale Kette* von $(\mathbb{T}, \leq)$. Es ist dann trivialerweise $(\mathbb{T}, \leq)$ wieder die duale Kette von $(\mathbb{T}, \geq)$, so dass man die beiden Ketten als *zueinander dual* bezeichnet.

Standard-Beispiele für Ketten Ist $\leq$ die gewöhnliche Kleinergleichrelation auf $\mathbb{R}$, so ist $(\mathbb{R}, \leq)$ Kette. Subketten dieser Kette sind beispielsweise $(\mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}})$ und $(\mathbb{Z}, \leq_{\mathbb{Z}})$,
wobei $\leq_{\mathbb{N}}$ bzw. $\leq_{\mathbb{Z}}$ für die Einschränkung der Relation $\leq$ auf $\mathbb{N}^2$ bzw. $\mathbb{Z}^2$ steht.

1.2 Schranken, Extrema, und Grenzen in Ketten

Nr. 8 (Def) Schranke (Majorante, Minorante)
und Extremum (Maximum, Minimum)

Sei $(\mathbb{T}, \leq)$ Kette, $A \subseteq \mathbb{T}$, $x \in \mathbb{T}$.

x ist $\substack{\textit{obere}\\\textit{untere}}$ *Schranke* oder $\substack{\textit{Majorante}\\\textit{Minorante}}$ von A (in der Kette $(\mathbb{T}, \leq)$) $:\Leftrightarrow$ $x \substack{\geq\\\leq} A$ [1]

x ist $\substack{\textit{oberes}\\\textit{unteres}}$ *Extremum* oder $\substack{\textit{Maximum}\\\textit{Minimum}}$ von A (in der Kette $(\mathbb{T}, \leq)$) $:\Leftrightarrow$ $x \substack{\geq\\\leq} A \ \wedge\ x \in A$

Nr. 9 (Satz und Def) max und min

Sei $(\mathbb{T}, \leq)$ Kette, $A \subseteq \mathbb{T}$, $x \in \mathbb{T}$. Dann gilt:

Besitzt A ein Maximum bzw. Minimum, so ist dieses eindeutig bestimmt, und wird mit $\max_{\mathbb{T}} A$ (wkM $\max A$) bzw. $\min_{\mathbb{T}} A$ (wkM $\min A$) bezeichnet.

Beweis. Da die Maxima gleich den Minima der dualen Kette sind, genügt der Beweis für das Minimum. Für Minima m, n folgt $m \leq n$, weil m Minimum und $n \in A$ ist, und zugleich $n \leq m$, weil n Minimum und $m \in A$ ist. Insgesamt gilt $m \leq n \leq m$, und per Identitivität $m = n$. ■

Nr. 10 (Def) Beschränktheit

Sei $(\mathbb{T}, \leq)$ eine Kette und $A \subseteq \mathbb{T}$.

A ist (in der Kette $(\mathbb{T}, \leq)$) *nach* $\substack{\textit{oben}\\\textit{unten}}$ *beschränkt* $:\Leftrightarrow$ A besitzt eine $\substack{\text{obere}\\\text{untere}}$ Schranke

A ist (in der Kette $(\mathbb{T}, \leq)$) *beschränkt* $:\Leftrightarrow$ A ist nach oben und nach unten beschränkt

Nr. 11 (Satz) Existenz der Extrema in endlichen Mengen

Jede nichtleere endliche Teilmenge T einer Kette hat ein Minimum und ein Maximum.

Beweis. Triviale vollständige Induktion über die Anzahl der Elemente von T. ■

[1] $x \leq A$ steht für $\forall\, a \in A\ (x \leq a)$, entsprechend steht $x \geq A$ für $\forall\, a \in A\ (x \geq a)$.

Nr. 12 (Def) Grenze (Supremum, Infimum)

Sei $(\mathbb{T}, \leq)$ eine Kette und $A \subseteq \mathbb{T}$.

x ist $\substack{\textit{obere}\\\textit{untere}}$ *Grenze* oder $\substack{\textit{Supremum}\\\textit{Infimum}}$ von A (in der Kette $(\mathbb{T}, \leq)$)

$:\Leftrightarrow$ x ist $\substack{\text{Minimum}\\\text{Maximum}}$ der Menge der $\substack{\text{oberen}\\\text{unteren}}$ Schranken von A $\left(\substack{\text{„kleinste obere“}\\\text{„größte untere“}}\right.$ Schranke von A)

Nr. 13 (Satz und Def) sup und inf

Sei $(\mathbb{T}, \leq)$ eine Kette und $A \subseteq \mathbb{T}$.

1. Wenn A ein Supremum bzw. Infimum besitzt, so ist dieses eindeutig bestimmt, und wird mit $\sup_{\mathbb{T}} A$ (wkM $\sup A$) bzw. $\inf_{\mathbb{T}} A$ (wkM $\inf A$) bezeichnet.
2. Falls A ein $\substack{\text{Maximum}\\\text{Minimum}}$ hat, gilt $\substack{\max A = \sup A\\\min A = \inf A}$.
3. Falls A ein $\substack{\text{Supremum}\\\text{Infimum}}$ hat, das Element von A ist, gilt $\substack{\sup A = \max A\\\inf A = \min A}$

Beweis. (1) folgt aus Satz 9, da s per Def Maximum bzw. Minimum einer Menge ist.

Zu (2). Es genügt der Beweis für das Maximum (für das Minimum betrachte die duale Kette). Sei $m = \max A$. Dann ist m per Def des Maximums ein Element von A, das obere Schranke von A ist. Ist nun s eine weitere obere Schranke von A, so ist per Def der oberen Schranke $A \leq s$, das heißt $\forall\, a \in A\ a \leq s$. Da m Element von A ist, gilt insbesondere $m \leq s$. Also ist m die *kleinste* obere Schranke von A.

Zu (3). Es genügt der Beweis für das Supremum (für das Infimum betrachte die duale Kette). Sei $s = \sup A$. Angenommen, s ist nicht Maximum von A. Per Def des Maximums ist dann $s \notin A$ oder $s \geq A$ ist falsch. Da nach Voraussetzung $s \in A$ gilt, muss also $s \geq A$ falsch sein, d. h. s ist keine obere Schranke von A und somit kein Supremum von A ($\lightning$). ■

1.3 Erweiterte Ketten, insbesondere $\overline{\mathbb{R}}$

Nr. 14 (Def) obere und untere adjungierte Schranke ($-\infty$, ∞) und $\overline{\mathbb{T}}$

Zu jeder Trägermenge $\mathbb{T}$ einer Kette sollen zwei nicht in $\mathbb{T}$ enthaltene und voneinander verschiedene Objekte $-\infty_{\mathbb{T}}$ und $\infty_{\mathbb{T}}$ festgelegt werden.[1]

Dazu legen wir zu jeder Menge $\mathbb{T}$ ein „kanonisches Außenobjekt“ $\mathcal{A}(\mathbb{T})$ fest mit der Eigenschaft $\mathcal{A}(\mathbb{T}) \notin \mathbb{T}$. Da wir $\mathbb{T} \notin \mathbb{T}$ voraussetzen,[2] können wir etwa bestimmen: $\mathcal{A}(\mathbb{T}) := \mathbb{T}$.

Setzen wir nun $\infty_{\mathbb{T}} := \mathcal{A}(\mathbb{T})$ und $-\infty_{\mathbb{T}} := \mathcal{A}(\mathbb{T} \cup \{\infty_{\mathbb{T}}\})$, so sind $\infty_{\mathbb{T}}$ und $-\infty_{\mathbb{T}}$ voneinander verschiedene und nicht in $\mathbb{T}$ vorkommende Objekte, wie gewünscht.

Es heißen $-\infty_{\mathbb{T}}$ und $\infty_{\mathbb{T}}$ die *untere bzw. obere adjungierte Schranke von* $\mathbb{T}$.
Mit $\overline{\mathbb{T}}$ bezeichnen wir die Menge $\mathbb{T} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Nr. 15 (Satz und Def) Erweiterte Kette $(\overline{\mathbb{T}}, \leq')$ der Kette $(\mathbb{T}, \leq)$

Sei $(\mathbb{T}, \leq)$ Kette. Sei $\leq'$ die Relation $\leq \ \cup \ \{(-\infty, x) : x \in \overline{\mathbb{T}}\} \ \cup \ \{(x, \infty) : x \in \overline{\mathbb{T}}\}$.
Dann ist $\leq'$ trivialerweise eine Relation in $\overline{\mathbb{T}}$ mit den Eigenschaften

$\forall\, x, y \in \mathbb{T} \quad x \leq' y \;\Leftrightarrow\; x \leq y$
$\forall\, x \in \overline{\mathbb{T}} \quad x \leq' -\infty \;\Leftrightarrow\; x = -\infty$
$\forall\, x \in \overline{\mathbb{T}} \quad \infty \leq' x \;\Leftrightarrow\; x = \infty$
$\forall\, x \in \overline{\mathbb{T}} \quad -\infty \leq' x \leq' \infty$
$(\overline{\mathbb{T}}, \leq')$ ist eine Kette

Wir nennen $(\overline{\mathbb{T}}, \leq')$ die *erweiterte Kette* von $(\mathbb{T}, \leq)$.
$\leq'$ bezeichnen wir wkM wieder mit $\leq$, schreiben also auch $(\overline{\mathbb{T}}, \leq)$ für die erweiterte Kette.

Nr. 16 (Def) Intervall in einer Kette

Sei $(\mathbb{T}, \leq)$ Kette und $a \in \overline{\mathbb{T}}$. Unter den *Intervallen* dieser Kette verstehen wir die Mengen

$[a, b] := \{x \in \mathbb{T} : a \leq x \leq b\}$ (offenes Intervall mit Grenzen a und b)
$]a, b[:= \{x \in \mathbb{T} : a < x < b\}$ (linkshalboffenes Intervall mit Grenzen a und b)
$]a, b] := \{x \in \mathbb{T} : a < x \leq b\}$ (rechtshalboffenes Intervall mit Grenzen a und b)
$[a, b[:= \{x \in \mathbb{T} : a \leq x < b\}$ (abgeschlossenes Intervall mit Grenzen a und b

[1] Nach dem Wohlordnungssatz von Zermelo (vgl. [Obe 94, §30.1, S. 202]) ist *jede* Menge Träger einer Kette (sogar einer speziellen, nämlich wohlgeordneten Kette). Daher muss die angekündigte Festlegung so sein, dass *jeder* Menge X ein $-\infty_X$ und ein ∞_X zugeordnet wird.

[2] Dies folgt aus dem Fundierungsaxiom der Mengenlehre (vgl. [Obe 94, §40.1, S. 256]).

Die erweiterte Kette $\overline{\mathbb{R}}$

Die erweiterte Kette $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ der Kette $(\mathbb{R}, \leq)$ wird noch dahingehend erweitert, dass man die Standard-Operationen der reellen Zahlen auf alle Elemente von $\overline{\mathbb{R}}$ ausdehnt:
Die *Addition* wird erweitert durch

1. $a + (\pm\infty) := (\pm\infty) + a := \pm\infty$ für alle $a \in \mathbb{R}$
2. $(\pm\infty) + (\pm\infty) := (\pm\infty)$
3. $(+\infty) + (-\infty) := (-\infty) + (+\infty) := 0$

Anstelle von Regel (3) liest man in der Literatur fast immer, dass $(+\infty) + (-\infty)$ und $(-\infty) + (+\infty)$ *undefiniert* bleiben. Ich folge hier [Els 99, S. 104], wodurch undefinierte Terme vermieden werden.

Für alle $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ gilt nun das *Kommutativgesetz* $a+b = b+a$ und das *Neutralitätsgesetz* $a+0 = a = 0+a$. Ferner gilt das *Assoziativgesetz* $(a + b) + c = a + (b + c)$ *bedingt*, nämlich unter der Bedingung, dass unter den Summanden a, b, c nicht zugleich ∞ und $-\infty$ vorkommt.
Das (unbedingte) Assoziativgesetz gilt also für $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$ und für $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{\infty\}$.

Die *additive Inversion* wird erweitert durch $-(+\infty) := -\infty$ und $-(-\infty) = +\infty$,
so dass auch die *Subtraktion* für alle $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ definiert werden kann: $x - y := x + (-y)$.
Offenbar gilt dann für $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ stets $- - x = x$ sowie $-(x + y) = -x - y$.

Betrag, Real– und Imaginärteil von $\pm\infty$ wird definiert durch
$|\infty| := \infty$, $|-\infty| := \infty$, $\operatorname{Re} \pm\infty := \pm\infty$ und $\operatorname{Im} \pm\infty := 0$, so dass für $a \in \overline{\mathbb{R}}$ gilt:
$|a| = a$ für $a \in \overline{\mathbb{R}}^{\geq 0}$ und $|a| = -a$ für $a \in \overline{\mathbb{R}}^{\leq 0}$ sowie $a = \operatorname{Re} a + i \operatorname{Im} a$.

Die *Multiplikation* wird schließlich definiert durch

1. $a(\pm\infty) := (\pm\infty)a := (\pm\infty)$ für alle positiven a aus $\overline{\mathbb{R}}$
2. $a(\pm\infty) := (\pm\infty)a := (\mp\infty)$ für alle negativen a aus $\overline{\mathbb{R}}$
3. $0(\pm\infty) := (\pm\infty) := 0$

Für alle $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ gilt das *Kommutativgesetz* $ab = ba$, das *Assoziativgesetz* $(ab)c = a(bc)$ und das *Neutralitätsgesetz* $a1 = 1 = 1a$, also ist $(\overline{\mathbb{R}}, \cdot)$ ein kommutativer Monoid. Außerdem gilt das *Distributivgesetz* $(a \pm b)c = ac \pm bc$ *bedingt*, nämlich unter der Bedingung $\{a, b\} \neq \{-\infty, \infty\} \ \wedge \ \{ac, bc\} \neq \{-\infty, \infty\}$.

Nr. 17 (Def) Die Mengen $\hat{\mathbb{R}}$ und $\hat{\mathbb{K}}$

$\mathbb{K}$ stehe durchgehend entweder für $\mathbb{R}$ oder für $\mathbb{C}$. Analog stehe

- $\hat{\mathbb{R}}$ durchgehend entweder für $\mathbb{R}$ oder $\overline{\mathbb{R}}$, und
- $\hat{\mathbb{K}}$ durchgehend entweder für $\mathbb{K}$ (und dann also für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) oder für $\overline{\mathbb{R}}$.

Wird $\hat{\mathbb{R}}$ im Zusammenhang mit $\hat{\mathbb{K}}$ erwähnt, so sei $\hat{\mathbb{R}} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } \hat{\mathbb{K}} = \mathbb{R} \text{ oder } = \mathbb{C} \\ \overline{\mathbb{R}} & \text{falls } \hat{\mathbb{K}} = \overline{\mathbb{R}} \end{cases}$.

1.4 Weitere besondere Ketten

Nr. 18 (Def) beschränkte Kette

Eine Kette $(\mathbb{T}, \leq)$ heißt *beschränkt*, genau wenn die gesamte Trägermenge $\mathbb{T}$ in $(\mathbb{T}, \leq)$ beschränkt ist.

Nr. 19 (Def) dicht geordnete und diskret geordnete Kette

1. Eine Kette $(\mathbb{T}, \leq)$ ist *dicht geordnet*

   $:\Leftrightarrow \ \forall\, x, y \in \mathbb{T}\ \exists\, m \in \mathbb{T}\ x < m < y$

2. $(\mathbb{T}, \leq)$ ist *diskret geordnet*

   $:\Leftrightarrow \ \forall\, y \in \mathbb{T}\ \ (y \text{ nichtminimal} \ \Rightarrow\ \exists\, x \in \mathbb{T}^{<y}\ \nexists\, m \in \mathbb{T}\ x < m < y)$

   $\wedge \ \ \forall\, y \in \mathbb{T}\ \ (y \text{ nichtmaximal} \ \Rightarrow\ \exists\, z \in \mathbb{T}^{>y}\ \nexists\, m \in \mathbb{T}\ y < m < z)$

In Worten besagt (1), dass sich zwischen zwei verschiedenen Punkten von $\mathbb{T}$ stets ein Zwischenpunkt m befindet, und (2), dass jedes nichtminimale Element einen unmittelbaren Vorgänger und jedes nichtmaximale Element einen unmittelbaren Nachfolger besitzt.

Beispiele $\mathbb{R}$ und $\overline{\mathbb{R}}$ sind dicht geordnet, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ diskret geordnet.

Nr. 20 (Def) vollständig und bedingt vollständig geordnete Kette (Zeitkette)

In jeder Kette $(\mathbb{T}, \leq)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. Jede Teilmenge T von $\mathbb{T}$ besitzt ein Supremum.
2. Jede Teilmenge T von $\mathbb{T}$ besitzt ein Infimum.

Ebenso sind folgende Aussagen äquivalent:

3. Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge T von $\mathbb{T}$ besitzt ein Supremum.
4. Jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge T von $\mathbb{T}$ besitzt ein Infimum.

Wir definieren nun:

$(\mathbb{T}, \leq)$ ist *vollständig (geordnet)* $:\Leftrightarrow$ es gilt (1) oder (2) [und daher beides]

$(\mathbb{T}, \leq)$ ist *bedingt vollständig (geordnet)* $:\Leftrightarrow$ es gilt (3) oder (4) [und damit beides].

Eine bedingt vollständig geordnete Kette bezeichne ich kurz als *Zeitkette*.

Beweis der behaupteten Äquivalenzen. (1) $\Rightarrow$ (2). Wir zeigen, dass $i := \sup\{x \in \mathbb{T} : x \text{ ist untere Schranke von } T\}$ Infimum von T ist. Zunächst ist i untere Schranke von T
(sonst gibt es ein $t \in T$ mit $t < i$; t ist aber als Element von T größer als jede untere Schranke von T, also eine obere Schranke der Menge $\{x \in \mathbb{T} : x \text{ ist untere Schranke von } T\}$, deren kleinste obere Schranke i ist, also folgt $i \leq t$ (↯)).
Als untere Schranke von T ist nun $i \in \{x \in \mathbb{T} : x \text{ ist untere Schranke von } T\}$, und aus Satz 13(3) folgt $i = \max\{x \in \mathbb{T} : x \text{ ist untere Schranke von } T\}$, also kann es keine größere untere Schranke von T geben als i. Somit ist i das Infimum von T.

(3) $\Rightarrow$ (4). Sei T nichtleer und nach unten beschränkt.
Dann ist $\{x \in \mathbb{T} : x \text{ ist untere Schranke von } T\}$ nichtleer und nach oben beschränkt (jedes Element von T ist obere Schranke), hat also nach Voraussetzung ein Supremum. Wörtlich wie im Beweis von (1) $\Rightarrow$ (2) folgt nun, dass dieses Supremum das Infimum von T ist.

(2) $\Rightarrow$ (1) sowie (4) $\Rightarrow$ (3) folgt nun durch Betrachtung der dualen Kette. ■

Nr. 21 (Def) duale Zeitkette

Die duale Kette einer Zeitkette $\mathbb{T}$ ist trivialerweise wieder eine Zeitkette,
die daher die *duale Zeitkette* von $\mathbb{T}$ heißen soll.

Beispiele

Jede endliche Teilmenge $T \neq \emptyset$ einer Kette $(\mathbb{T}, \leq)$ besitzt nach Satz 11 Maximum und Minimum, also nach Satz 13(2) auch Infimum und Supremum. Ist $\mathbb{T}$ selbst endlich, so ist *jede* Teilmenge $T \neq \emptyset$ von $\mathbb{T}$ endlich und besitzt daher Infimum und Supremum, also ist $(\mathbb{T}, \leq)$ eine Zeitkette. Ist $\mathbb{T}$ zusätzlich nichtleer, so hat nicht nur jede nichtleere endliche Teilmenge von $\mathbb{T}$, sondern auch die leere Menge Supremum und Infimum: wie man per Leermengen-Konvention sieht, ist dann nämlich $\min \mathbb{T}$ Supremum und $\max \mathbb{T}$ Infimum der leeren Menge. Jede nichtleere endliche Kette ist also eine Zeitkette, die sogar vollständig geordnet ist.

Die Kette der reellen Zahlen ist eine Zeitkette, wobei die bedingte Vollständigkeit im *Vollständigkeitsaxiom* ausgedrückt wird.

Auch $(\mathbb{N}, \leq)$ ist eine Zeitkette, denn jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ besitzt nach der *Wohlordnungseigenschaft* ein Minimum, und dieses ist nach Satz 13(2) auch ein Infimum.

Schließlich ist $(\mathbb{Z}, \leq)$ eine Zeitkette. Zum Beweis betrachte zu einer nach oben beschränkten Teilmenge $T \neq \emptyset$ von $\mathbb{Z}$ die Mengen $T^+ := \{x \in T : x \in \mathbb{N}\}$, $T^- := T \setminus T^+$ und $-T^- := \{-x : x \in T^-\}$. Es sind T^+ und $-T^-$ nach oben bzw. unten beschränkte Teilmengen von $\mathbb{N}$. Wenn also T^+ nichtleer ist, existiert $\sup T^+$; andernfalls ist $-T^-$ nichtleer und es existiert $\inf(-T^-)$. Im ersten Fall ist offenbar $\sup T^+$ und im zweiten $-\inf(-T^-)$ Supremum von T.

1.5 Topologische Eigenschaften von Ketten

Nr. 22 (Satz und Def) Verschiedene Räume und Identifikationen

Gegeben sei ein halbmetrischer Raum $\mathcal{X} = (X, d)$. Dann ist die Menge der Bälle $\mathbb{B}_\varepsilon(a) := \{x : d(x, a) < \varepsilon\}$ (mit $a \in X$ und $\varepsilon > 0$) eine topologische Basis auf X, so dass die Menge $\mathfrak{O}_\mathcal{X}$ aller Vereinigungen solcher Bälle eine Topologie auf X ist.
Diese Topologie $\mathfrak{O}_\mathcal{X}$ und den entsprechenden topologischen Raum $(X, \mathfrak{O}_\mathcal{X})$ nennen wir von $\mathcal{X}$ *induziert* und identifizieren wkM die Räume $\mathcal{X} = (X, d)$ und $(X, \mathfrak{O}_\mathcal{X})$ miteinander.

Gegeben sei ein halbnormierter $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathcal{X} = (X, +, \cdot, n)$. Dann ist die Funktion $d_\mathcal{X}\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\forall\ x, y \in X\ d(x, y) := n(x - y)$ eine Halbmetrik auf X, und diese ist genau dann eine Metrik, wenn n eine Norm ist.
Diese Metrik $d_\mathcal{X}$, den metrischen Raum $(X, d_\mathcal{X})$, die von $(X, d_\mathcal{X})$ induzierte Topologie $\mathfrak{O}_\mathcal{X}$ und den topologischen Raum $(X, \mathfrak{O}_\mathcal{X})$ nennen wir von $\mathcal{X}$ *induziert* und identifizieren wkM die Räume $\mathcal{X} = (X, +, \cdot, n)$, $(X, d_\mathcal{X})$ und $(X, \mathfrak{O}_\mathcal{X})$ miteinander.

Nr. 23 (Satz und Def) $\mathbb{K}^n$ mit Normtopologie; die Mengen $\mathfrak{O}_{\mathbb{K}^n}$, $\mathfrak{O}^n$, $\mathfrak{O}$

Sei $n \in \mathbb{N}^{\odot}$. Die Elemente aus $\mathbb{K}^n$ bilden mit der komponentenweisen Addition $+$ und der komponentenweisen Skalarmultiplikation $\cdot$ einen $\mathbb{K}$-Vektorraum $(\mathbb{K}, +, \cdot)$. Dieser Vektorraum bildet mit der Maximumsnorm $\|\bullet\|_\infty$, die im Fall $n = 1$ gleich der Betragsnorm $|\bullet|$ ist, einen normierten $\mathbb{K}$-Vektorraum $(\mathbb{K}^n, +, \cdot, \|\bullet\|_\infty)$. Sprechen wir von $\mathbb{K}^n$ als normiertem Vektorraum, ist immer dieser gemeint. Da aber alle Normen auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum dieselbe Topologie induzieren, ist es bei topologischen Betrachtungen gleichgültig, mit welcher Norm wir uns $\mathbb{K}^n$ ausgestattet denken. Sei nun:

$\mathfrak{O}_{\mathbb{K}^n}$	die von der Maximumsnorm (und darum jeder Norm) induzierte Topologie auf $\mathbb{K}^n$
$\mathfrak{O}^n$	die Topologie $\mathfrak{O}_{\mathbb{R}^n}$ von $\mathbb{R}^n$.
$\mathfrak{O}$	die Topologie $\mathfrak{O}^1$, also die Topologie $\mathfrak{O}_\mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$

$\mathfrak{O}_{\mathbb{K}^n}$ nennen wir die *Normtopologie* von $\mathbb{K}^n$ und betrachten sie als *Standardtopologie* von $\mathbb{K}^n$, die stets gemeint ist, wenn von $\mathbb{K}^n$ als topologischem Raum die Rede ist.

Nr. 24 (Def) Ordnungstopologie $\mathfrak{O}_\mathbb{T}$ einer Kette $\mathbb{T}$

Ist $(\mathbb{T}, \leq)$ eine Kette, so ist die Menge der Intervalle $]a, b[$ (mit $a, b \in \overline{\mathbb{T}}$) trivialerweise eine topologische Basis auf $\mathbb{T}$. Diese Basis heißt *Ordnungsbasis* oder *Standardbasis* der Kette.

$\mathfrak{O}_\mathbb{T}$ bezeichne die von dieser Basis induzierte Topologie auf $\mathbb{T}$,
diese betrachten wir als *Standardtopologie* der Kette.

Der topologische Raum $(\mathbb{T}, \mathfrak{O}_\mathbb{T})$ heißt der *topologische Raum der Kette* $(\mathbb{T}, \leq)$. Dieser Raum ist stets gemeint, wenn wir von der Kette als einem topologischen Raum sprechen.

Nr. 25 (Satz) Übereinstimmung der Norm- mit der Ordnungstopologie von $\mathbb{R}$.

Die Standardtopologie der Kette $(\mathbb{R}, \leq)$ der reellen Zahlen ist gemäß Def 24 die Ordnungstopologie mit der Menge der Intervalle $]a,b[$ mit $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ als Basis.

Demgegenüber ist gemäß Def 23 die Standardtopologie der reellen Zahlen die Normtopologie mit der Menge der Bälle $\mathbb{B}_\varepsilon(x_0)$ für $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^{>0}$ als Basis.

Das ist aber kein Widerspruch, denn beide Basen induzieren dieselbe Topologie.

Beweis. Wir zeigen für die von beiden Basen induzierten Topologien, dass jede feiner als die jeweils andere ist: ist $x \in \mathbb{B}_\varepsilon(x_0)$, so gilt mit $a = x_0 - \varepsilon$ und $b = x_0 + \varepsilon$, dass $x \in\,]a,b[\, \subseteq \mathbb{B}_\varepsilon(x_0)$.
Ist umgekehrt $x \in\,]a,b[$, so ist offenbar stets $x \in \mathbb{B}_\varepsilon(x_0) \subseteq\,]a,b[$ mit geeignetem x_0 und ε:
Falls $-\infty < a < b < \infty$, wähle $x_0 = \frac{a+b}{2}$ und $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$.
Falls $-\infty < a < b = \infty$, wähle $x_0 = x$ und $\varepsilon = x - a$.
Falls $-\infty = a < b < \infty$, wähle $x_0 = x$ und $\varepsilon = b - x$.
Und falls schließlich $-\infty = a < b = \infty$, wähle $x_0 = 0$ und $\varepsilon = 1$. ■

Nr. 26 (Def) Die Mengen $\overline{\mathfrak{O}}$ und $\hat{\mathfrak{O}}$

$\overline{\mathfrak{O}}$ bezeichne die Ordnungstopologie $\mathfrak{O}_{\overline{\mathbb{R}}}$ der Kette $\overline{\mathbb{R}}$.
$\hat{\mathfrak{O}}$ bezeichne im Zusammenhang mit der Bezeichnung $\hat{\mathbb{R}}$ bzw. $\hat{\mathbb{K}}$ (vgl. Def 17) die Topologie, mit der wir $\hat{\mathbb{R}}$ bzw. $\hat{\mathbb{K}}$ standardmäßig ausgestattet sehen, nämlich

$$\hat{\mathfrak{O}} := \begin{cases} \mathfrak{O} & \text{falls } \hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \text{ bzw. } \hat{\mathbb{K}} = \mathbb{R} \\ \overline{\mathfrak{O}} & \text{falls } \hat{\mathbb{R}} = \overline{\mathbb{R}} \text{ bzw. } \hat{\mathbb{K}} = \overline{\mathbb{R}}. \\ \mathfrak{O}_{\mathbb{C}} & \text{falls } \hat{\mathbb{K}} = \mathbb{C} \end{cases}$$

Nr. 27 (Satz) Ketten als Hausdorffräume

Jede Kette (das soll heißen: ihr topologischer Raum) ist ein Hausdorffraum.

Beweis. Seien x, y verschiedene Elemente der Kette. Dann gilt (nötigenfalls nach Vertauschung der Bezeichnungen für x und y), dass $x < y$. Wenn es einen Punkt p zwischen x, y gibt, so sind $U_x :=]-\infty, p[$ und $U_y =]p, \infty[$ disjunkte Umgebungen von x und y. Andernfalls sind $U_x :=]-\infty, y[$ und $U_y :=]x, \infty[$ solche Umgebungen. ■

Nr. 28 (Satz) Abgeschlossenheit der Intervalle $[a,b]$ in Ketten

In jeder Kette $\mathbb{T}$ sind die Intervalle $[a,b]$ $(a,b \in \overline{\mathbb{T}})$ abgeschlossen.

Beweis. $\complement[a,b] = \,]-\infty, a[\ \cup\ ]b, \infty[$ ist als Vereinigung offener Mengen offen. ■

Nr. 29 (Satz) $\mathbb{T}$ als Unterraum von $\overline{\mathbb{T}}$, insbesondere $\mathbb{R}$ als Unterraum von $\overline{\mathbb{R}}$

Sei $\mathbb{T}$ eine Kette.

1. *Der topologische Raum von $\mathbb{T}$ ist Unterraum des topologischen Raumes der Kette $\overline{\mathbb{T}}$, insbesondere ist $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, \mathfrak{O})$ Unterraum von $\overline{\mathbb{R}} = (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{O}})$.*
2. *Im Raum $(\overline{\mathbb{T}}, \mathfrak{O}_{\overline{\mathbb{T}}})$ ist die Menge $\overline{\mathbb{T}}$ der Abschluss der Menge $\mathbb{T}$, falls $\mathbb{T}$ nichtleer ist und kein Extremum besitzt (also etwa im Fall $\mathbb{T} = \mathbb{R}$)*
3. *(2) gilt nicht, wenn $\mathbb{T} = \emptyset$ oder $\mathbb{T}$ ein Extremum besitzt*

Beweis. Zu (1). Es ist zu zeigen, dass $\mathfrak{O}_{\mathbb{T}} = \mathfrak{O}_{\overline{\mathbb{T}}} \Cap \mathbb{T}$.
$\subseteq$. Ist B Element der Standardbasis von $\mathbb{T}$, also $B = \,]a, b[$ mit $a, b \in \overline{\mathbb{T}}$, so ist B erst recht ein Element der Standardbasis von $\overline{\mathbb{T}}$.
Daher ist jede offene Menge des Raumes $\mathbb{T}$, was ja eine Vereinigung von Elementen B der Standardbasis von $\mathbb{T}$ ist, zugleich eine Vereinigung von Elementen der Standardbasis von $\overline{\mathbb{T}}$, also eine offene Menge in $\overline{\mathbb{T}}$. Daher gilt $O \in \mathfrak{O}_{\mathbb{T}} \ \Rightarrow\ O = O \cap \mathbb{T} \in \mathfrak{O}_{\overline{\mathbb{T}}} \Cap \mathbb{T}$.
$\supseteq$. Sei eine Menge $O \cap \mathbb{T}$ mit $O \in \mathfrak{O}_{\overline{\mathbb{T}}}$ gegeben. Es ist O eine Vereinigung $\bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[$ von Mengen $]a_i, b_i[$ der Standardbasis von $\overline{\mathbb{T}}$, wobei also $a_i, b_i \in \overline{\overline{\mathbb{T}}}$. Nun ist $O \cap \mathbb{T} = \bigcup_{i \in I} (]a_i, b_i[\cap \mathbb{T})$.
Falls a_i bzw. b_i das untere bzw. obere adjungierte Element von $\overline{\mathbb{T}}$ ist, so sei α_i bzw. β_i das obere bzw. untere adjungierte Element von $\mathbb{T}$. Andernfalls sei $\alpha_i = a_i$ bzw. $\beta_i := b_i$. Dann gilt offenbar für alle $i \in I$, dass $]\alpha_i, \beta_i[=]a_i, b_i[\cap \mathbb{T}$.
Folglich ist $O \cap \mathbb{T} = \bigcup_{i \in I}]\alpha_i, \beta_i[$ eine Vereinigung von Elementen der Standardbasis von $\mathbb{T}$ und somit ein Element von $\mathfrak{O}_{\mathbb{T}}$.

Zu (2). Wir müssen zeigen, dass $t \in \overline{\mathbb{T}} \ \Leftrightarrow\ t$ ist Berührungspunkt von $\mathbb{T}$ im Raum $\overline{\mathbb{T}}$.
Hierbei ist $\Leftarrow$ trivial.
Zu $\Rightarrow$. Sei $t \in \overline{\mathbb{T}}$, so ist zu zeigen, dass in jeder Umgebung U von t ein Punkt x von $\mathbb{T}$ liegt.
Sei zunächst $t \in \mathbb{T}$. Dann ist t selbst ein solcher Punkt x.
Sei $t = \infty$. Zu U gibt es $a, b \in \overline{\overline{\mathbb{T}}}$ mit $t \in \,]a, b[\subseteq U$. Hierbei kann b nur das obere adjungierte Element von $\overline{\mathbb{T}}$ sein, und $a < t$. Falls $a \in \mathbb{T}$, so gibt es, da a kein Maximum von $\mathbb{T}$ ist (denn $\mathbb{T}$ hat nach Voraussetzung keine Extrema), ein $x \in \mathbb{T}$ mit $a < x$. Dann ist $a < x < b$, also ist $x \in U$. Falls aber a gleich $-\infty$ oder gleich dem unteren adjungierten Element von $\overline{\mathbb{T}}$ ist, so wählen wir als x irgendeinen Punkt von $\mathbb{T}$ (es ist ja $\mathbb{T}$ nichtleer). Dieses x liegt dann in $]a, b[$, also in U.
Sei $t = -\infty$. Dann argumentieren wir analog wie im Fall $t = \infty$.

Zu (3). Sei $\mathbb{T}$ leer. Dann ist der Abschluss von $\mathbb{T}$ im Raum $\overline{\mathbb{T}}$ ebenfalls die leere Menge, aber die erweiterte Kette $\overline{\mathbb{T}}$ ist nichtleer, da $\overline{\mathbb{T}} = \{-\infty_{\mathbb{T}}, \infty_{\mathbb{T}}\}$.
Besitze $\mathbb{T}$ ein Maximum m. Dann ist $\infty_{\mathbb{T}}$ Element der erweiterten Kette $\overline{\mathbb{T}}$, aber $\infty_{\mathbb{T}}$ gehört nicht zum Abschluss von $\mathbb{T}$ im Raum $\overline{\mathbb{T}}$, da in der Umgebung $]m, \infty]$ von ∞ kein Element von

$\mathbb{T}$ liegt.
Besitzt schließlich $\mathbb{T}$ ein Minimum m, so folgt analog, dass $-\infty$ ein Element der erweiterten Kette $\overline{\mathbb{T}}$ ist, das nicht zum Abschluss von $\mathbb{T}$ im Raum $\overline{\mathbb{T}}$ gehört. ■

Nr. 30 (Satz und Def) perfekte Mengen

Sei X Menge von Punkten eines topologischen Raums.

X ist perfekt $:\Leftrightarrow$ $X \neq \emptyset \wedge$ jeder Punkt von X ist Häufungspunkt von X

Jede perfekte Menge X besitzt mindestens zwei Punkte.

Beweis. Da X per Def nichtleer ist, gibt es ein $p \in X$. Da p Häufungspunkt ist, gibt es in der Umgebung X von p einen Punkt x von $X \setminus \{p\}$. ■

Nr. 31 (Satz) Charakterisierung der perfekten Intervalle in dicht geordneten Ketten

Sei $\mathbb{T}$ dicht geordnete Kette (vgl. Def 19), etwa $\mathbb{R}$ oder $\overline{\mathbb{R}}$.

1. *Die perfekten Intervalle von $\mathbb{T}$ sind genau die Intervalle mit mindestens zwei Punkten.*
2. *(Zusatz) Ist $\mathbb{T}$ nicht dicht geordnet, gibt es Intervalle mit zwei verschiedenen Punkten, die nicht perfekt sind.*

Beweis. Zu (1). Sei I perfektes Intervall. Dann hat I wie jede perfekte Menge mindestens zwei Punkte (Satz 30).
Sei umgekehrt I ein Intervall mit mindestens zwei Punkten. Ist dann $x \in I$, so gibt es ein $\alpha \in I$ mit $\alpha < x$ (Fall 1) oder ein $\beta \in I$ mit $x < \beta$ (Fall 2), denn andernfalls wäre x zugleich der linke und der rechte Grenzpunkt, also wäre x das einzige Element von I ($\lightning$).
Sei nun U Umgebung von x. Dann gibt es ein $]a, b[$ mit $x \in]a, b[\subseteq U$. Im Fall (1) gilt mit $m := \max\{\alpha, a\}$, dass $m < x$. Da $\mathbb{T}$ dicht geordnet ist, gibt es ein ξ mit $m < \xi < x$. Dieses ξ ist dann ein von x verschiedenes Element von I, welches in U liegt. — Analog schließt man auch im Fall (2) auf ein von x verschiedenes Element ξ von I, welches in U liegt. In beiden Fällen ist also x Häufungspunkt von I. Also ist I perfekt.

Zu (2). Da $\mathbb{T}$ nicht dicht geordnet ist, gibt es $x, y \in \mathbb{T}$ mit $x < y$, so dass es kein $m \in \mathbb{T}$ gibt mit $x < m < y$. Dann ist $I := [x, y]$ ein Intervall, dass nicht perfekt ist: es ist nämlich das Element x von I kein Häufungspunkt, da in der Umgebung $]-\infty, y[$ von x kein von x verschiedener Punkt von I liegt. ■

2 Zeitketten

Zeitketten wurden bereits in Kap. 1 als bedingt vollständige Ketten eingeführt (Def 20).

2.1 Besondere Punkte in Zeitketten

Nr. 32 (Satz und Def) Sprung– und Rücksprungoperator

Der *Sprungoperator* $\sigma_{(\mathbb{T},\leq)}$ bzw. *Rücksprungoperator* $\rho_{(\mathbb{T},\leq)}$ einer Zeitkette $(\mathbb{T}, \leq)$ ist die Funktion σ: $\mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ bzw. ρ: $\mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ mit für alle $t \in \mathbb{T}$: $\sigma(t) := \inf\{x : x > t\}$ bzw. $\rho(t) := \sup\{x : x < t\}$.

Für alle Elemente t von $\mathbb{T}$ ist $\sigma(t)$ und $\rho(t)$ wohldefiniert.
Falls $t = \max \mathbb{T}$, ist $\sigma(t) = t$, und falls $t = \min \mathbb{T}$, ist $\rho(t) = t$. Stets gilt $\rho(t) \leq t \leq \sigma(t)$.

Beweis der Behauptungen über σ (für die Behauptungen über ρ betrachte die duale Zeitkette). Die Menge $\{x : x > t\}$ hat die untere Schranke t; ist sie nichtleer, so existiert das Infimum wegen der bedingten Vollständigkeit von $\mathbb{T}$. Ist aber $\{x : x > t\} = \emptyset$, so ist dies äquivalent dazu, dass t das Maximum von $\mathbb{T}$ ist. Da nun jedes Element s von $\mathbb{T}$ obere Schranke von $\emptyset$ ist (denn unter Beachtung der Leermengen-Konvention gilt ja $\forall\, t \in \emptyset\ t \leq s$), existiert das Infimum von $\emptyset$ und ist gleich dem Maximum von $\mathbb{T}$. Damit ist gezeigt, dass $\sigma(t)$ stets existiert, und im Fall $t = \max \mathbb{T}$ gleich t ist. Schließlich ist t untere Schranke von $\{x : x > t\}$, also $t \leq \sigma(t)$. ■

Nr. 33 (Satz und Def) rechts/links-zerstreut und rechts/links-dicht

Sei $(\mathbb{T}, \leq)$ eine Zeitkette und $t \in \mathbb{T}$.

t ist *rechts-dicht*	$:\Leftrightarrow$	t ist nichtmaximal und $\sigma(t) = t$
t ist *rechts-zerstreut*	$:\Leftrightarrow$	t ist nichtmaximal und $\sigma(t) > t$
t ist *links-dicht*	$:\Leftrightarrow$	t ist nichtminimal und $\rho(t) = t$
t ist *links-zerstreut*	$:\Leftrightarrow$	t ist nichtminimal und $\rho(t) < t$ [1]

Es gilt genau eine der drei Aussagen: t ist maximal, t ist rechts-dicht, t ist rechts-zerstreut
Es gilt genau eine der drei Aussagen: t ist minimal, t ist links-dicht, t ist links-zerstreut

Beweis. Trivial, wenn man beachtet, dass $\sigma(t)$ stets $\geq t$ und $\rho(t)$ stets $\leq t$ ist (Satz 32). ■

[1] Diese Definition gab Hilger in [Hil 90, Abschnitt 1.2, S. 20], davon weicht die Definition in [Hil 88, S. 3] ab, wo die Forderungen der Nichtmaximalität bzw. Nichtminimalität fehlen.

Nr. 34 (Satz) Eigenschaften der $\substack{\textbf{rechts}\\ \textbf{links}}$-zerstreuten Punkte

Für Elemente t einer Zeitkette $(\mathbb{T}, \leq)$ gilt:

1. *t ist genau dann $\substack{\text{rechts}\\ \text{links}}$-zerstreut wenn $\substack{]t,d[\\ ]d,t[} = \emptyset$ für ein $d \in \mathbb{T}$ mit $\substack{d>t\\ d<t}$*
2. *Ist t $\substack{\text{rechts}\\ \text{links}}$-zerstreut, so ist das d aus (1) eindeutig bestimmt, nämlich $= \substack{\sigma(t)\\ \rho(t)}$.*
3. *Ist t $\substack{\text{rechts}\\ \text{links}}$-zerstreut, so $\substack{\sigma(t)\\ \rho(t)}$ $\substack{\text{links}\\ \text{rechts}}$-zerstreut, und es gilt $\substack{\rho(\sigma(t))\\ \sigma(\rho(t))} = t$*

Beweis für die obere Variante (für die untere betrachte die duale Zeitkette).
Zu (1). $\Rightarrow$. Per Rechts-Zerstreutheit ist $d := \sigma(t) > t$, und da d untere Schranke der Punkte größer als t ist, ist $]t, d[$ leer.
$\Leftarrow$. Für ein $d > t$ sei $]t, d[$ leer. Dann ist t nicht-maximal und d die größte untere Schranke der Elemente größer als t also $d = \sigma(t)$. Mithin folgt $\sigma(t) = d > t$, ist t rechts-zerstreut.

Zu (2). In Teil $\Leftarrow$ von (1) haben wir ja gezeigt, dass für ein solches d gilt: $d = \sigma(t)$.

Zu (3). Folgt aus (1) und (2). ■

Nr. 35 (Satz) Über die Umgebungen von $\substack{\sigma(t)\\ \rho(t)}$

Für $\substack{\text{nicht-maximale}\\ \text{nicht-minimale}}$ Elemente c einer Zeitkette $(\mathbb{T}, \leq)$ gilt:

Zu jeder Umgebung U von $\substack{\sigma(t)\\ \rho(t)}$ existiert ein $d \in \mathbb{T}$ mit $\substack{d>t\\ d<t}$ und $\substack{]t,d]\\ [d,t[} \subseteq U$.

Beweis (vgl. [Hil 88, Satz 1.2.(iii), S. 4-5]) für die obere Variante (für die untere betrachte die duale Zeitkette). Es ist U Obermenge einer offenen Menge O, und zu dieser gibt es eine Basismenge $]a, b[$ $(a, b \in \overline{\mathbb{T}})$ mit $\sigma(t) \in]a, b[\subseteq O$.
Ist nun t rechts-dicht, gilt $\sigma(t) = t$. Da t nichtmaximal ist, können wir b, falls $b = \infty$ ist, durch ein Element von $\mathbb{T}$ ersetzen (irgendeines, das größer als t ist). Wir können also von $b \in \mathbb{T}$ ausgehen. Da t nicht rechts-zerstreut ist, zeigt Satz 34(1), dass $]t, b[$ nichtleer ist, es also ein d gibt mit $t < d < b$. Es ist also dann $]t, d] =]\sigma(t), d] \subseteq]\sigma(t), b] \subseteq]a, b[\subseteq O \subseteq U$.
Ist t rechts-zerstreut, gilt für $d := \sigma(t)$, dass $d > t$ und $]t, d] =]t, \sigma(t)] = \{\sigma(t)\} \subseteq U$. ■

Nr. 36 (Satz) Eigenschaften der $\substack{\textbf{rechts}\\ \textbf{links}}$-dichten Punkte

Für $\substack{\text{nicht-maximale}\\ \text{nicht-minimale}}$ Elemente t einer Zeitkette $(\mathbb{T}, \leq)$ gilt:

1. *t ist genau dann $\substack{\text{rechts}\\ \text{links}}$-dicht wenn für alle $\substack{d>t\\ d<t}$ gilt: $\substack{]t,d[\\ ]d,t[} \neq \emptyset$*
2. *Ist t $\substack{\text{rechts}\\ \text{links}}$-dicht, existiert zu jeder Umgebung U von t ein $d \in U$ mit $\substack{d>t\\ d<t}$ und $\substack{[t,d]\\ [d,t]} \subseteq U$*

Beweis für die obere Variante (für die untere betrachte die duale Zeitkette).

(1) erhält man Negation der Äquivalenz Satz 34(1).

Zu (2). Der Satz 35 über die Umgebungen von $\substack{\sigma(t)\\ \rho(t)}$ geht hier wegen $\substack{\sigma(t)=t\\ \rho(t)=t}$ in einen gleichlautenden Satz über die Umgebungen von t über. Da außerdem t trivialerweise Element der eigenen Umgebung U ist, können wir in jenem Satz $\substack{]t,d]\\ [d,t[}$ durch $\substack{[t,d]\\ [d,t]}$ ersetzen. ■

Nr. 37 (Satz) Charakterisierung der Häufungspunkte von Teilmengen A einer Zeitkette $\mathbb{T}$

1. *x ist Häufungspunkt von A $\Leftrightarrow$ x ist rechts-dicht oder links-dicht.*
2. *x ist Häufungspunkt von $A \cap \mathbb{T}^{<x}$ $\Leftrightarrow$ x ist links-dicht*
3. *x ist Häufungspunkt von $A \cap \mathbb{T}^{>x}$ $\Leftrightarrow$ x ist rechts-dicht*

Beweis Zu (1). $\Rightarrow$. Sei x Häufungspunkt von A. Angenommen, x ist weder rechts- noch links-dicht. Da x dann rechts-zerstreut oder minimal ist, gibt es ein $a \in \overline{\mathbb{T}}$ mit $a < x$ und $]a, x[= \emptyset$, und da x links-zerstreut oder maximal ist, gibt es ein $b \in \overline{\mathbb{T}}$ mit $x < b$ und $]x, b[= \emptyset$. Folglich ist $]a, b[= \{x\}$ eine Umgebung von x, in der es keine von x verschiedenen Elemente gibt. Dann kann x kein Häufungspunkt von A sein.

$\Leftarrow$. ist x rechts- bzw. links-dicht, und U Umgebung von x, so gibt es ein offenes Intervall $]a, b[$ mit $x \in]a, b[\subseteq U$ und ein $s \in]a, x[$ bzw. $s \in]x, b[$, das dann ein $s \in \mathbb{T}^{<x} \cap U$ bzw. $s \in \mathbb{T}^{>x} \cap U$ ist.

Zu (2) und (3). Folgt sofort aus dem Satz über Eigenschaften der $\substack{\text{rechts}\\ \text{links}}$-dichten Punkte. ■

Nr. 38 (Def) κ-Operator

Sei $(\mathbb{T}, \leq)$ eine Zeitkette.

$\mathbb{T}^\kappa$ (lies: gekapptes $\mathbb{T}$) $:= \{t \in \mathbb{T} : t$ ist nichtmaximal oder t ist links-dichtes Maximum$\}$.

Die Elemente von $\mathbb{T}^\kappa$ nennen wir κ-Punkte oder *nicht-ausgeartete Punkte* von $\mathbb{T}$.
Die Elemente von $\mathbb{T} \setminus \mathbb{T}^\kappa$ heißen *ausgeartete Punkte* von $\mathbb{T}$.
Bem. Nach dem folgenden Satz existiert höchstens ein ausgearteter Punkt.

Nr. 39 (Satz) Über die Mengen $\mathbb{T} \setminus \mathbb{T}^\kappa$ und $\mathbb{T}^\kappa$

Sei $(\mathbb{T}, \leq)$ eine Zeitkette.

1. *$\mathbb{T} \setminus \mathbb{T}^\kappa$ ist entweder leer oder hat genau ein Element.*
2. *Besitzt $\mathbb{T}$ kein Maximum oder ist das Maximum von $\mathbb{T}$ links-dicht, so ist*
   $\mathbb{T} \setminus \mathbb{T}^\kappa = \emptyset$ und
   $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T}$
3. *Besitzt $\mathbb{T}$ ein Maximum m, das links-zerstreut oder zugleich Minimum ist, so ist*
   $\mathbb{T} \setminus \mathbb{T}^\kappa = \{m\}$ und
   $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T} \setminus \{m\}$

Beweis. Zu (1). Wenn $t \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}^\kappa$ ist, ist $t \notin \mathbb{T}^\kappa$, und da alle nichtmaximalen Elemente von $\mathbb{T}$ Elemente von $\mathbb{T}^\kappa$ sind, ist dann t das Maximum von $\mathbb{T}$, also nach Satz 9 eindeutig bestimmt.

Zu (2). Die angegebene Bedingung zeigt, dass jedes Element von $\mathbb{T}$ ein Element von $\mathbb{T}^\kappa$ ist, also gilt $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{T}^\kappa$ und da trivialerweise $\mathbb{T}^\kappa \subseteq \mathbb{T}$, folgt $\mathbb{T} = \mathbb{T}^\kappa$.
Weiter folgt dann $\mathbb{T} \setminus \mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T} \setminus \mathbb{T} = \emptyset$.

Zu (3). Als Maximum von $\mathbb{T}$ ist $m \in \mathbb{T}$, und da m als links-zerstreuter oder minimaler Punkt kein links-dichter Punkt ist, folgt $m \notin \mathbb{T}^\kappa$, insgesamt also $m \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}^\kappa$. Wegen (1) ist dann m einziger Punkt von $\mathbb{T} \setminus \mathbb{T}^\kappa$, also $\mathbb{T} \setminus \mathbb{T}^\kappa = \{m\}$.
Weiter folgt dann $\mathbb{T} \setminus \{m\} = \mathbb{T} \setminus (\mathbb{T} \setminus \mathbb{T}^\kappa)$, und $\mathbb{T} \setminus (\mathbb{T} \setminus \mathbb{T}^\kappa) = \mathbb{T}^\kappa$ ($\subseteq$ trivialerweise, und $\supseteq$ wegen $\mathbb{T}^\kappa \subseteq \mathbb{T}$), insgesamt also $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T} \setminus \{m\}$. ∎

Nr. 40 (Satz) Kriterium für κ-Punkte

Für Zeitketten $(\mathbb{T}, \leq)$ und $t \in \mathbb{T}$ ist äquivalent:

1. *$t \in \mathbb{T}^\kappa$*
2. *jede Umgebung U von t enthält ein $s \in \mathbb{T}$ mit $s \neq \sigma(t)$*
3. *$\{\sigma(t)\}$ ist keine Umgebung von t*
4. *$t \neq \sigma(t) \ \vee \ \{t\}$ ist keine Umgebung von t*

Beweis (vgl. [Hil 88, Satz 1.2.(iv), S. 6 und S. 8]).
(1) $\Rightarrow$ (2). Sei t κ-Element, also nichtmaximal oder links-dichtes Maximum und $U \in \mathfrak{U}(t)$.
Ist $\sigma(t) > t$, so ist $s := t$ Element der Umgebung U von t mit $s \neq \sigma(t)$.
Als nächstes sei $\sigma(t) = t$ und t nicht-maximal. Dann gibt es nach dem Satz 35 in der Umgebung U von $\sigma(t) = t$ ein $s \in \mathbb{T}$ mit $s > t$, also $\sigma(t) = t \neq s$.
Als nächstes sei $\sigma(t) = t$ und t maximal. Wegen $t \in \mathbb{T}^\kappa$ ist dann t links-dichtes Maximum, so

dass $\rho(t) = t$. Dann gibt es nach dem Satz über die Umgebungen von $\substack{\sigma(t)\\ \rho(t)}$ in jeder Umgebung U von $\rho(t) = t$ ein $s \in \mathbb{T}$ mit $s < t$, also $s < t \leq \sigma(t)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Sei t maximal. Dann ist zu zeigen, dass t links-dicht ist. Nun ist t entweder minimal oder links-zerstreut oder links-dicht; wir haben also die beiden ersten Möglichkeiten auszuschließen. Zunächst folgt aus der Maximalität von t, dass $\sigma(t) = t$.
Angenommen, das Maximum t sei minimal. Dann ist t einziges Element von $\mathbb{T}$, während es in der Umgebung $\mathbb{T}$ von t nach Voraussetzung ein von $\sigma(t) = t$ verschiedenes Element gibt ($\lightning$).
Als zweites sei angenommen, dass t links-zerstreut ist. Nach dem Satz 34 über Eigenschaften der $\substack{\text{rechts}\\ \text{links}}$-zerstreuten Punkte gibt es dann ein $d < t$ mit $]d,t[= \emptyset$. Es ist dann $]d,\infty[$ eine Umgebung von t. Nach Voraussetzung existiert dort ein $s \in \mathbb{T}$ mit $s \neq \sigma(t)$, das heißt hier: $s \neq t$. Die dieses s nicht in der leeren Menge $]d,t[$ liegen kann, bleibt nur $t < s$ übrig. Aber das widerspricht der Maximalität von t. ($\lightning$). Also ist auch die zweite Annahme falsch und es bleibt nur übrig, dass t links-dicht ist.

(2) $\Rightarrow$ (3), denn $\{\sigma(t)\}$ enthält kein von $\sigma(t)$ verschiedenes $s \in \mathbb{T}$.

(3) $\Rightarrow$ (2). Angenommen, U ist Umgebung von t, die kein von $\sigma(t)$ verschiedenes Element enthält. Da jede Umgebung von t wenigstens ein Element enthält (nämlich t), muss dann $\sigma(t)$ gleich t sein. Also folgt $U = \{\sigma(t)\}$ und nach (3) ist U keine Umgebung von t ($\lightning$).

(3) $\Rightarrow$ (4). Angenommen, (4) ist falsch. Dann ist $t = \sigma(t) \ \wedge \ \{t\}$ ist Umgebung von t. Das heißt aber, dass $\{\sigma(t)\}$ Umgebung von t ist, was (4) widerspricht.

(4) $\Rightarrow$ (3). Wenn $t \neq \sigma(t)$, kann $\{\sigma(t)\}$ keine Umgebung von t sein, da jede Umgebung von t das Element t hat. Wenn $\{t\}$ keine Umgebung von t ist, so enthält jede Umgebung von t außer t noch ein weiteres Element, also mindestens zwei Elemente. Also ist die einelementige Menge $\{\sigma(t)\}$ dann keine Umgebung von t. $\blacksquare$

2.2 Induktionsprinzip

Das folgende Induktionsprinzip verallgemeinert das Prinzip der vollständigen Induktion.

Nr. 41 (Satz) Induktionsprinzip für Zeitketten

Sei $(\mathbb{T}, \leq)$ eine Zeitkette, $m \in \mathbb{T}$ und für alle $t \in [m, \infty[$ sei $A(t)$ eine Aussage. Seien die folgenden vier Aussagen erfüllt:

IA. (Induktionsanfang)
Es gilt $A(m)$

PP. (Induktionsschritt von Punkt zu Punkt)
Für jedes rechts-zerstreute $t \in [m, \infty[$: $A(t) \Rightarrow A(\sigma(t))$

PU. (Induktionsschritt von Punkt zu Umgebung)
Für jedes rechts-dichte $t \in [m, \infty[$ mit $A(t)$ gibt es eine Umgebung U von t, so dass $A(x)$ für alle $x \in U$ mit $x > t$

VP. (Induktionsschritt von Vorgängermenge zu Punkt)
Für jedes links-dichte $t \in [m, \infty[$ mit $\forall\, x\ (x < t \ \Rightarrow\ A(x))$ gilt $A(t)$

Dann gilt $A(t)$ für alle $t \in [m, \infty[$.

Bem. Da es in der Kette $(\mathbb{N}, \leq)$ keine rechts-dichten und links-dichten Punkte gibt, geht das Induktionsprinzip für diese Kette in das gewöhnliche Prinzip der vollständigen Induktion über.

Beweis nach [Hil 90, Theorem 1.4.(c), S. 21-22]. Angenommen, $A(t)$ ist für ein $t \in\,]m, \infty[$ falsch, dann ist $F := \{t \in [m, \infty[\ :\ \neg A(t)\}$ nichtleer.
Da $A(m)$ gilt, ist F durch m nach unten beschränkt, besitzt also ein Infimum r.

Lemma: Es gilt $A(t)$ für alle $t \in [m, r]$.
Zum Beweis des Lemmas genügt es zu zeigen, dass $A(r)$ gilt (denn da r untere Schranke der Menge aller $t \geq m$ ist, für die $A(t)$ falsch ist, ist für $t \in [m, r[$ jedenfalls $A(t)$ richtig).
Fall (a). r ist links-zerstreut.
Dann ist $\rho(r) < r$, also ist $A(\rho(r))$ gültig, und zugleich ist $r = \sigma(\rho(r))$, weshalb $A(r)$ aus dem Induktionsschritt (PP) folgt.
Fall (b). r ist links-dicht. Dann folgt $A(r)$ aus Induktionsschritt (VP).
Fall (c). r ist Minimum von $\mathbb{T}$. Dann muss $r = m$ sein, und es folgt $A(r)$ aus (IA).
Damit ist das Lemma bewiesen.

Nun weiter zum Beweis des Satzes.
Wir unterscheiden drei Fälle, und zeigen jeweils einen Widerspruch zur Annahme auf.

Fall (a). r ist rechts-zerstreut. Dann folgt per Induktionsschritt (PP), dass $A(\sigma(r))$ gilt, und da $]r, \sigma(r)[\, = \emptyset$ ist, folgt zusammen mit dem Lemma, dass alle $t \in [m, \infty[$, für die $A(t)$ falsch ist, größer als $\sigma(r)$ sein müssen. Daher wäre $\sigma(r)$ eine untere Schranke von F, die größer als die größte untere Schranke r wäre ($\lightning$).

Fall (b). r ist recht-dicht. Nach Induktionsschritt (PU) existiert eine Umgebung U von r, so dass $A(x)$ für alle $x \in U$ mit $x > r$ gilt. Nach Satz 36(2) gibt es ein Intervall $[r, b]$ ($b \in \mathbb{T}$ mit $b > t$) mit $[r, b] \subseteq U$. Daher gilt also $A(x)$ für alle $x \in [r, b]$. Es folgt zusammen mit dem Lemma, dass $A(t)$ für alle $t \in [m, b]$ gilt. Mithin müssen alle $t \in]m, \infty[$, für die $A(t)$ falsch ist, größer als b sein. Daher wäre b eine untere Schranke von F, die größer als die größte untere Schranke r wäre ($\lightning$).

Fall (c) r ist maximal. Dann ist aber $[m, r] = [m, \infty[$ und $A(x)$ gilt für alle $[m, \infty[$ im Widerspruch zur Annahme ($\lightning$). Die Annahme muss daher falsch sein. ■

Nr. 42 (Satz) Induktionsprinzip für abgeschlossene Intervalle in Zeitketten

Sei $(\mathbb{T}, \leq)$ eine Zeitkette, $m, n \in \mathbb{T}$ mit $m \leq n$ und für alle $t \in [m, n]$ sei $A(t)$ eine Aussage. Seien die folgenden vier Aussagen erfüllt:

- *IA. (Induktionsanfang)*
  Es gilt $A(m)$
- *PP. (Induktionsschritt von Punkt zu Punkt)*
  Für jedes rechts-zerstreute $t \in [m, n[$: $A(t) \Rightarrow A(\sigma(t))$
- *PU. (Induktionsschritt von Punkt zu Umgebung)*
  Für jedes rechts-dichte $t \in [m, n[$ mit $A(t)$ gibt es eine Umgebung U von t, so dass $A(x)$ für alle $x \in U$ mit $x > t$
- *VP. (Induktionsschritt von Vorgängermenge zu Punkt)*
  Für jedes links-dichte $t \in [m, n]$ mit $\forall\, x\ (x < t \;\Rightarrow\; A(x))$ gilt $A(t)$

Dann gilt $A(t)$ für alle $t \in [m, n]$.

Beweis. Für alle $t \in [m, \infty[$ sei $B(t)$ die Aussage: $t > n \;\vee\; A(t)$. Diese erfüllt dann die Voraussetzungen der ersten Version des Induktionsprinzips. Also folgt, das für alle $t \in [m, \infty[$ gilt $t > n \;\vee\; A(t)$. Im Fall $t \in [m, n]$ muss also stets $A(t)$ gelten. ■

2.3 Kompakte Mengen

Nr. 43 (Satz) Kompaktheitskriterium für Teilmengen von Zeitketten

Sei $\mathbb{T}$ eine nichtleere Zeitkette und $T \subseteq \mathbb{T}$.

T ist kompakt $\Leftrightarrow$ T ist beschränkt und abgeschlossen.

Bem. 1. Das gilt nicht für die leere Zeitkette $\mathbb{T}$, wo $\emptyset$ kompakt, aber nicht beschränkt ist.
Bem. 2. In jeder Zeitkette $\mathbb{T}$ folgt mit Satz 28, dass für $a, b \in \mathbb{T}$ die Intervalle $[a, b]$ kompakt sind.

Beweis (vgl. [Hil 90, Theorem 1.4.(d), S. 21-22]).

$\Rightarrow$. Sei T kompakt. Als Teilmenge eines Hausdorffraums ist T abgeschlossen. Zu zeigen ist, dass T beschränkt ist. Angenommen, T ist nach oben unbeschränkt. Für jedes $m \in T$ gibt es dann ein m' größer als m in der Kette, und das offene Intervall $I_m :=]-\infty, m'[$ enthält m. Also ist $(I_m)_{m \in T}$ eine offene Überdeckung von T und besitzt eine T überdeckende endliche Teilfamilie $(I_m)_{m \in S}$. Das T als nach oben unbeschränkte Menge innerhalb der nichtleeren Zeitkette $\mathbb{T}$ selbst nichtleer sein muss, ist auch S nichtleer. Somit ist S eine nichtleere endliche Menge. Dann ist auch die Menge $\{m' : m \in S\}$ aller rechten Randpunkte der Intervalle I_m mit $m \in S$ nichtleer und endlich, besitzt also nach Satz 11 ein Maximum μ. Dieses μ ist dann obere Schranke von $\bigcup_{m \in S} I_m$ und wegen $T \subseteq \bigcup_{m \in S} I_m$ auch obere Schranke von T ($\lightning$). Damit ist die Annahme widerlegt. Analog widerlegt man die Annahme, T sei nach unten beschränkt. Insgesamt ist T schlechthin beschränkt.

$\Leftarrow$. Wenn T leer ist, ist T trivialerweise kompakt. Sei $T \neq \emptyset$. Es genügt nun zu zeigen, dass die abgeschlossenen Intervalle $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{T}$ und $a \leq b$ kompakt sind. Denn jede nichtleere, beschränkte und abgeschlossene Teilmenge T von $\mathbb{T}$ ist ja Teilmenge eines solchen Intervalls $[a, b]$, und ihr Schnitt mit dem Intervall — das ist dann T selbst — ist in der Spurtopologie des Intervalls abgeschlossen. Als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Unterraums $[a, b]$ ist T dann aber kompakte Teilmenge dieses Unterraums, also ist T auch als eigenständiger topologischer Raum kompakt, und dann schließlich auch als Teilmenge von $\mathbb{T}$.

Sei also $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{T}$ und $a \leq b$ gegeben, und sei $\mathcal{D} = (D_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $[a, b]$. Wir zeigen mittels unseres Induktionsprinzips für alle $t \in [a, b]$, dass $(D_i)_{i \in I}$ eine endliche $[a, t]$ überdeckende Teilfamilie besitzt.

$\boxed{\text{IA}}$. a ist Element eines D_a mit $a \in I$, also überdeckt die endliche Teilfamilie $(D_i)_{i \in \{a\}}$ von $\mathcal{D}$ die Menge $[a, a]$.

$\boxed{\text{PP}}$. Nach Voraussetzung ist ein rechts-zerstreutes $t \in [a, b[$ gegeben, derart dass $\mathcal{D}$ eine endliche Teilfamilie $(D_i)_{i \in J}$ besitzt, die $[a, t]$ überdeckt. Nun ist $\sigma(t)$ Element eines D_a mit $a \in I$, also überdeckt die ebenfalls endliche Teilfamilie $(D_i)_{i \in J \cup \{a\}}$ von $\mathcal{D}$ die Menge $[a, \sigma(t)]$.

$\boxed{\text{PU}}$. Nach Voraussetzung ist ein rechts-dichtes $t \in [a, b[$ gegeben, derart dass $\mathcal{D}$ eine endliche Teilfamilie $(D_i)_{i \in J}$ besitzt, die $[a, t]$ überdeckt. Nun ist t Element eines D_a mit $a \in J$. Da D_a offen ist und die offenen Intervalle eine Basis der Topologie von $\mathbb{T}$ bilden, gibt es $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{T}}$ mit $t \in]\alpha, \beta[\subseteq D_a$. Es ist dann $U :=]\alpha, \beta[$ eine Umgebung von t. Sei nun $d \in U$ mit $d > t$ gegeben. Da trivialerweise D_a von der genannten endlichen Familie überdeckt wird, wird wegen $[t, d] \subseteq [\alpha, \beta] \subseteq D_a$ erst recht $[t, d]$ von dieser Familie überdeckt. Da sie nach Voraussetzung auch $[a, t]$ überdeckt, überdeckt sie schließlich $[a, t] \cup [t, d]$, das ist $[a, d]$.

$\boxed{\text{VP}}$. Sei ein links-dichtes $t \in [a, b]$ gegeben, und für $x < t$ gebe es eine $[a, x]$ überdeckende Teilfamilie von $\mathcal{D}$. Nun ist t ist Element eines D_a mit $a \in I$, und da die offenen Intervalle eine Basis der Topologie von $\mathbb{T}$ bilden, gibt es $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{T}}$ mit $t \in]\alpha, \beta[\subseteq D_a$. Es ist $U :=]\alpha, \beta[$ eine Umgebung von t. Da t linkes-dicht ist, gibt es in $]\alpha, \beta[$ ein $d < t$. Nach Voraussetzung besitzt $\mathcal{D}$ eine endliche Teilfamilie $(D_i)_{i \in J}$, die $[a, d]$ überdeckt. Dann überdeckt aber die ebenfalls endliche Teilfamilie $(D_i)_{i \in J \cup \{a\}}$ von $\mathcal{D}$ die Menge $[a, d] \cup D_a$ und wegen $[a, t] \subseteq [a, d] \cup [d, t] \subseteq [a, d] \cup [\alpha, \beta] \subseteq [a, d] \cup U \subseteq [a, d] \cup D_a$ überdeckt sie auch $[a, t]$. ∎

Nr. 44 (Satz) Lokalkompaktheit von Zeitketten;
Existenz von Umgebungsbasen aus kompakten Intervallen

Zeitketten $\mathbb{T}$ sind lokalkompakt, d. h. jedes $t \in \mathbb{T}$ besitzt eine kompakte Umgebung. Darüberhinaus besitzt jeder Punkt t sogar eine Umgebungsbasis aus kompakten Intervallen.

Beweis nach [Hil 88, Korollar 1.7., S. 10]. Sei U Umgebung von t. Wir sind fertig, wenn wir zu U jeweils Punkte t_a, t_e bestimmen können, so dass das kompakte Intervall $[t_a, t_2]$ eine Umgebung von t und Teilmenge von U ist (dann bilden die Intervalle $[t_a, t_e]$ eine Umgebungsbasis von U). Da U Umgebung ist, enthält U eine offene Menge O, die ein Intervall $]t_1, t_2[$ enthält, das t enthält. Ist t $\substack{\text{rechts} \\ \text{links}}$-dicht, können wir nach Satz 34 ein $\substack{s \in]t_1, t[\text{ und dann ein } s' \in]s, t[\\ u \in]t, t_2[\text{ und dann ein } u' \in]t, u[}$ wählen. Sei

$$t_a := \begin{cases} t & \text{falls } t \text{ links-zerstreut} \\ t & \text{falls } t \text{ minimal} \\ s & \text{falls } t \text{ links-dicht} \end{cases} \quad \text{und } t'_a := \begin{cases} \rho(t) & \text{falls } t \text{ links-zerstreut} \\ -\infty & \text{falls } t \text{ minimal} \\ s' & \text{falls } t \text{ links-dicht} \end{cases}$$

Ebenso sei

$$t_e := \begin{cases} t & \text{falls } t \text{ rechts-zerstreut} \\ t & \text{falls } t \text{ maximal} \\ u & \text{falls } t \text{ rechts-dicht} \end{cases} \quad \text{und } t'_e := \begin{cases} \sigma(t) & \text{falls } t \text{ rechts-zerstreut} \\ \infty & \text{falls } t \text{ maximal} \\ u' & \text{falls } t \text{ rechts-dicht} \end{cases}$$

In jedem Fall ist dann $[t_a, t_e] \subseteq]t_1, t_2[\subseteq U$.
Außerdem ist in jedem Fall $t \in]t'_a, t'_e[\subseteq [t_a, t_e]$, so dass $[t_a, t_e]$ Umgebung von t ist. ∎

2.4 Konvexe Mengen, Intervalle und Teilmengen

Intervalle wurden bereits in Def 16 für Ketten definiert. In diesem Abschnitt wird für Ketten zusätzlich der Begriff der konvexen Menge eingeführt. Es stellt sich heraus, dass in Zeitketten beide Begriffe untereinander (und in dicht geordneten Zeitketten auch mit dem Begriff der zusammenhängenden Menge) übereinstimmen. Daraus folgt, dass jede Teilmenge einer Zeitkette sich aus maximalen Intervallen zusammensetzt (Satz 50). Diese Tatsache wird später benötigt, um die Subzeitketten einer Zeitkette zu charakterisieren (Sätze 55 und 56).

Nr. 45 (Satz und Def) konvexe Teilmengen einer Kette

Sei $\mathbb{T}$ Kette und $A \subseteq \mathbb{T}$.

A ist *konvexe* Teilmenge von $\mathbb{T}$ $:\Leftrightarrow\ \forall\, a, b \in A\ \ [a, b] \subseteq A$

Es gilt folgendes Kriterium für Konvexität:
A ist konvex $\Leftrightarrow\ \forall\, a, b \in A, c \in \mathbb{T}\ \ a < c < b\ \Rightarrow\ c \in A$

Beweis. $\Leftarrow$ ist trivial. Zu $\Rightarrow$. Nach Voraussetzung ist für $a, b \in A$ im Falle $a < b$ stets $[a, b] \subseteq A$. Im Fall $b < a$ aber ist $[a, b] = \emptyset \subseteq A$ und im Fall $a = b$ ist $[a, b] = \{a\} \subseteq A$. ■

Nr. 46 (Satz) Intervalle und konvexe Mengen in Zeitketten

Sei $\mathbb{T}$ Zeitkette und A Teilmenge von $\mathbb{T}$.

A ist ein Intervall $\Leftrightarrow$ A ist konvex.

Hierbei genügt für $\Rightarrow$ die Voraussetzung, dass $\mathbb{T}$ Kette ist, aber für $\Leftarrow$ genügt sie nicht.

Beweis. $\Rightarrow$ ist trivial (auch wenn $\mathbb{T}$ nur als Kette vorausgesetzt ist).

$\Leftarrow$. Sei A konvex. Sei zunächst A leer. Dann unterscheiden wir zwei Fälle:
Entweder ist $\mathbb{T}$ nichtleer. Dann ist A das Intervall $]a, a[$ ($a \in \mathbb{T}$ beliebig).
Oder es ist auch $\mathbb{T}$ leer: dann ist $A = \mathbb{T} =]-\infty, \infty[$, was wieder ein Intervall ist.

Sei nun A nichtleer. Dann existiert in der erweiterten Kette $\overline{\mathbb{T}}$ das Supremum und Infimum von A. Wir unterscheiden dann vier Fälle:

Fall (i): $\inf A, \sup A \in \mathbb{T}$. Dann ist per Konvexität $[\inf A, \sup A] \subseteq A$. Wäre die Teilmengenbeziehung echt, gäbe es ein $x \in A$ mit $x < \inf A$ ($\lightning$) oder $\sup A < x$ ($\lightning$). Also gilt $[\inf A, \sup A] = A$, und A ist ein Intervall.

Fall (ii): $\inf A, \sup A \notin \mathbb{T}$. Ist nun $x \in]\inf A, \sup A[$, so gibt es ein $a < x$ mit $a \in A$ (sonst wäre

x untere Schranke von A, die größer ist als die größte untere Schranke $\inf A$ ($\lightning$)). Genauso folgt, dass es ein $b \in A$ gibt mit $x < b$. Wegen der Konvexität ist dann $[a, b] \subseteq A$, also $x \in A$. Da dies für jedes $x \in \,]\inf A, \sup A[$ gilt, folgt $]\inf A, \sup A[\subseteq A$.
Wäre die Teilmengenbeziehung echt, gäbe es ein $x \in A$ mit $x < \inf A$ ($\lightning$) oder $x = \inf A$ (und daher $\inf A \in \mathbb{T}$ ($\lightning$)) oder $\sup A < x$ ($\lightning$) oder $x = \sup A$ (und daher $\sup A \in \mathbb{T}$ ($\lightning$)). Also gilt $[\inf A, \sup A] = A$, und A ist ein Intervall.

Fall (iii): $\inf A \in \mathbb{T}$ und $\sup A \notin \mathbb{T}$. Ist nun $x \in [\inf A, \sup A[$, so gibt es ein $b \in A$ mit $x < b$ (sonst wäre x obere Schranke von A, die kleiner ist als die kleinste obere Schranke $\inf A$ ($\lightning$)). Wegen der Konvexität ist dann $[\inf A, b] \subseteq A$, also $x \in A$. Da dies für jedes $x \in [\inf A, \sup A[$ gilt, folgt $[\inf A, \sup A[\subseteq A$.
Wäre die Teilmengenbeziehung echt, gäbe es ein $x \in A$ mit $x < \inf A$ ($\lightning$) oder $\sup A < x$ ($\lightning$) oder $x = \sup A$ und daher $\sup A \in \mathbb{T}$ ($\lightning$). Also gilt $[\inf A, \sup A[= A$, und A ist ein Intervall.

Fall (iiii): $\inf A \notin \mathbb{T}$ und $\sup A \in \mathbb{T}$. Der Beweis, dass A ein Intervall ist, ist analog zum Beweis für den Fall (iii).

Für $\Leftarrow$ ist es wesentlich, dass $\mathbb{T}$ Zeitkette, also bedingt vollständig ist. Denn $\mathbb{Q}$ ist eine Kette, und die Menge $\{x \in \mathbb{Q} : x \leq \sqrt{2}\}$ ist konvex, aber sie ist kein Intervall. ■

Nr. 47 (Satz) Charakterisierung der zusammenhängenden Mengen in dicht geordneten Zeitketten

1. *In dicht geordneten Zeitketten $\mathbb{T}$ (vgl. Def 19) sind die zusammenhängenden Punktmengen von $\mathbb{T}$ genau die Intervalle.*
2. *Ist $\mathbb{T}$ nicht dicht geordnet, so gibt es Intervalle, die nicht zusammenhängend sind.*

Beweis. Zu (1). Wir führen den Beweis in zwei Schritten.
(A). Wir zeigen zunächst, dass jedes Intervall I zusammenhängend ist. Dazu ist zu zeigen, dass es keine offenen Mengen U, V gibt mit den Eigenschaften $U \cap I \neq \emptyset, V \cap I \neq \emptyset$, $I \subseteq U \cup V$ und $U \cap V \cap I = \emptyset$. Angenommen, es gäbe solche U, V.
Sei dann $u \in U \cap I$ und $v \in V \cap I$. Da $U \cap V \cap I = \emptyset$ ist $u \neq v$, es ist dann (nötigenfalls nach Vertauschung der Bezeichnungen für U, V) $u < v$, und unser Intervall muss einen Grenzpunkt kleinergleich u und einen Grenzpunkt größergleich v haben, also ist $[u, v] \subseteq I$. Sei nun s das Supremum von $\{x \in U : x < v\}$ (einer nichtleeren, weil u enthaltenden, und durch v nach oben beschränkten Teilmenge von $\mathbb{R}$). Es ist dann $u \leq s \leq v$, also $s \in I$.

Wegen $I \subseteq U \cup V$ muss nun s zu U oder zu V gehören. Angenommen, s gehört zu U. Da U offen ist, gibt es ein offenes Intervall $]a, b[$ mit $s \in \,]a, b[\subseteq U$. Doch das kann nicht sein: wenn $s = v$, wäre $v \in U$ und insgesamt in $v \in U \cap V \cap I$, was die leere Menge ist ($\lightning$). Und wenn $s < v$, liegt jeder Punkt von $]s, \min\{b, v\}[$ in U (weil in $]a, b[$), und da dieses Intervall wegen der Dichtheit von $\mathbb{T}$ nichtleer ist, wären die Elemente dieses Intervalls Beispiele für Punkte aus $\{x \in U : x < v\}$, die größer als das Supremum s dieser Menge sind ($\lightning$).

Die Annahme ist also falsch, und s gehört zu V. Da aber auch V offen ist, gibt es ein offenes Intervall $]c,d[$ mit $s \in]c,d[\subseteq V$. Doch das kann nicht sein: wenn $s = u$, wäre $u \in V$ und insgesamt in $u \in U \cap V \cap I$, was die leere Menge ist ($\lightning$). Und wenn $u < s$, gibt es, weil s Supremum und $\mathbb{T}$ dicht ist, in $]\max\{c,u\}, s[$ ein Element von U: dieses ist zugleich Element von V (da $\in]c,d[$) und in I (da in $]u,s[$), also insgesamt in $U \cap V \cap I$, was aber die leere Menge ist ($\lightning$).

(B). Nun zeigen wir, dass jede zusammenhängende Menge A ein Intervall ist. Zunächst ist die leere Menge ein Intervall, denn wenn es ein $t \in \mathbb{T}$ gibt, ist $\emptyset$ das Intervall $[a,a]$, und wenn $\mathbb{T}$ leer ist, so ist $\emptyset = \mathbb{T}$ das Intervall $]-\infty,\infty[$. Sei nun also A nichtleer.

(a). Wir zeigen nun zunächst, dass für Elemente x, y von A mit $x < y$ auch alle $m \in]x,y[$ Elemente von A sind. Angenommen $m \notin A$, so betrachte die Menge $V := \{\xi \in A : \xi < m\}$ und $\{\xi \in A : \xi > m\}$. Trivialerweise ist $\{V, W\}$ dann eine Partition von A, und beide Mengen sind in der von $\mathbb{R}$ auf A induzierten Spurtopologie offen. Also folgt, dass A nicht zusammenhängend ist ($\lightning$). Die Annahme ist also falsch, und $m \in A$.

(b). Sei nun $a = \inf A$ und $b = \sup A$. Da A nichtleer ist, ist $a \leq b$, und trivialerweise ist $A \subseteq [a,b]$. Wir zeigen, dass alle $m \in]a,b[$ Elemente von A sind. Für solche m gibt es nämlich, das a Infimum und b Supremum ist und $\mathbb{T}$ dicht ist, ein x und ein $y \in A$ mit $a < x < m < y < b$, also folgt $m \in A$ mittels (a). Insgesamt ist $]a,b[\subseteq A \subseteq [a,b] =]a,b[\cup \{a,b\}$. Dann gibt es aber nur die Möglichkeiten $A =]a,a[$ oder $A =]a,b]$ oder $A = [a,b[$ oder $A = [a,b]$.

Zu (2). Nach Voraussetzung gibt es $x, y \in \mathbb{T}$ mit $x < y$, so dass es kein $m \in \mathbb{T}$ gibt mit $x < m < y$. Dann ist $I := [x,y]$ ein Intervall, dass nicht zusammenhängend ist: denn $U :=]-\infty, y[$ und $V :=]x,\infty[$ sind offene Mengen mit den Eigenschaften $U \cap I = \{y\} \neq \emptyset$ und $V \cap I = \{x\} \neq \emptyset$ und $I \subseteq U \cup V$ sowie $U \cap V \cap I = \emptyset$. ■

Nr. 48 (Satz) Zwischenwertsatz für Zeitketten

Sei $[a,b]$ Intervall einer Zeitkette $\mathbb{T}$.
Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) > 0 > f(b)$ oder mit $f(a) < 0 < f(b)$
Dann existiert ein $x \in [a,b[$ mit $f(x)f(\sigma(x)) \leq 0$.

Bem 1. $f(x)$ ist hier in folgendem Sinn ein „Zwischenwert“ zwischen dem negativen $f(a)$ und dem positiven $f(b)$: wegen $f(x)f(\sigma(x)) \leq 0$ ist entweder eine der Zahlen $f(x), f(\sigma(x))$ gleich 0, oder beim Übergang von x zu $\sigma(x)$ vollzieht sich bei den Funktionswerten ein Vorzeichenwechsel, also eine „Nulldurchgang“.

Bem 2. Der aus der allgemeinen Topologie bekannte Zwischenwertsatz besagt, dass für topologische Räume $\mathcal{X}$, stetige Funktionen $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, zusammenhängende Punktmengen A des Raumes $\mathcal{X}$ und Werte $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, die zu $\mathrm{Wb}(f)$ gehören, stets auch jeder Zwischenwert $x \in \mathbb{R}$ mit $a < x < b$ zu $\mathrm{Wb}(f)$ gehört.
Dieser Satz kann im allgemeinen auf Zeitketten nicht *angewendet werden, und zwar deshalb, weil $[a,b]$ bei nicht dicht geordnetem $\mathbb{T}$ nicht zusammenhängend sein muss (siehe Satz 47(2)).*

Beweis nach [Hil 88, Satz 1.4., S. 8]. Die Variante $f(a) < 0 < f(b)$ kann man durch Übergang zu $-f$ auf die Variante $f(a) > 0 > f(b)$ zurückführen. Sei also $f(a) > 0 > f(b)$. Angenommen, es existiert kein solches x. Dann gilt $f(x)f(\sigma(x)) > 0$ für alle $x \in [a, b[$. Unter dieser Annahme zeigen wir mittels des Induktinsprinzips für abgeschlossene Intervalle (Satz 42) für alle $t \in [a, b]$, dass $f(t) > 0$ (insbesondere gilt dann $f(b) > 0$, wodurch die Annahme widerlegt ist).

$\boxed{\text{IA}}$. $f(a) > 0$ ist vorausgesetzt.

$\boxed{\text{PP}}$. Sei $f(t) > 0$ und t ist rechts-zerstreutes Element von $[a, b[$, per Annahme gilt also $f(t)f(\sigma(t)) > 0$, und darum $f(\sigma(t)) > 0$.

$\boxed{\text{PU}}$. Sei $f(t) > 0$ und t rechts-dichtes Element von $[a, b[$. Wegen der Stetigkeit von f im Punkt t gibt es eine Umgebung von t, so dass für alle $x \in U$ gilt, dass $f(x)$ in der vorgegebenen Umgebung $]\frac{1}{2}f(t), \frac{3}{2}f(t)[$ von $f(t)$ liegt. Dann gilt aber $f(x) \geq \frac{1}{2}f(t) \geq 0$.

$\boxed{\text{VP}}$. Nach Voraussetzung ist t links-dicht und $\forall\, x\ (x < t \ \Rightarrow\ f(x) > 0)$. Wegen der Stetigkeit von f existiert zu jedem $\delta > 0$ eine Umgebung U_δ von t mit $\forall\, x \in U_\delta\ f(x) \in\,]f(t) - \delta, f(t) + \delta[$. Da t links-dicht ist, besitzt jede solchen Umgebung U_δ ein Element x_δ mit $x_\delta < t$. Also folgt $0 < f(x_\delta) \leq f(t) + \delta$. Wäre nun $f(t) < 0$, so wählen wir $\delta := |f(t)| = -f(t)$ und haben für dieses δ den Widerspruch $0 < f(x_\delta) \leq f(t) + \delta = 0$ (↯). Also folgt $f(t) > 0$. ■

Nr. 49 (Satz und Def) von einer Teilmenge erzeugtes Intervall einer Zeitkette

Sei $\mathbb{T}$ Zeitkette und $A \subseteq \mathbb{T}$.

Dann bezeichnen wir den Schnitt $\mathbb{I} := \bigcap\{X : X \text{ ist Intervall } \wedge\ A \subseteq X\}$
aller A umfassenden Intervalle als das von A *erzeugte* Intervall.

Es ist $\mathbb{I}$ das „kleinste A umfassende Intervall“ in folgendem Sinn:

1. $\mathbb{I}$ ist ein Intervall mit $A \subseteq \mathbb{I}$
2. Für jedes Intervall I mit $A \subseteq I$ gilt $\mathbb{I} \subseteq I$
3. $\mathbb{I}$ ist das einzige Intervall mit Eigenschaften (1) und (2)

Beweis. Zu (1). Dass $\mathbb{I}$ ein Intervall ist, zeigt man mit Satz 46 wie folgt: wenn $a, b \in \mathbb{I}$ gegeben ist, so ist a, b Element jedes A umfassenden Intervalls X, also folgt per Konvexität von X, dass $[a, b] \subseteq X \subseteq \mathbb{I}$, also ist $\mathbb{I}$ konvex und daher ein Intervall.
Außerdem ist jedes Element x von A Element jedes A umfassenden Intervalls X, also $x \in \mathbb{I}$, weshalb $\mathbb{I}$ selbst ein A umfassendes Intervall ist.

Zu (2). I ist eine der Mengen, deren Schnitt $\mathbb{I}$ ist, also gilt $\mathbb{I} \subseteq I$.

Zu (3). Besitzt das Intervall $\mathbb{I}_2$ ebenfalls Eigenschaften (1) und (2), so gilt $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{I}_2$, weil $\mathbb{I}$ Eigenschaft (2) und $\mathbb{I}_2$ Eigenschaft (1) besitzt, und es gilt $\mathbb{I}_2 \subseteq \mathbb{I}$, weil $\mathbb{I}_2$ Eigenschaft (2) und $\mathbb{I}$ Eigenschaft (1) besitzt. ■

Nr. 50 (Satz) Zusammensetzung einer Teilmenge aus maximalen Intervallen

Sei A Teilmenge einer Zeitkette $\mathbb{T}$. Zu jedem $x \in A$ sei

$J_x := \bigcup\{X : X \text{ ist Intervall } \wedge\ x \in X \subseteq A\}$
die Vereinigung aller x enthaltenden und in A enthaltenen Intervalle.

1. *J_x ist das maximale x enthaltende und in A enthaltene Intervall in folgendem Sinn:*
   a) *J_x ist ein Intervall mit $x \in J_x \subseteq A$*
   b) *Für jedes Intervall J mit $x \in J_x \subseteq A$ gilt $J \subseteq J_x$,*
      und folglich für jedes Intervall J mit $J_x \subseteq J \subseteq \mathbb{T}$: $J = J_x$
   c) *J_x ist das einzige Intervall mit Eigenschaften (a) und (b)*
2. *A ist aus den maximalen Intervallen J_x zusammengesetzt, das heißt $A = \bigcup_{x \in A} J_x$*

Beweis. Zu (1a). Um zu zeigen, dass J_x ein Intervall ist, ist gemäß Satz 46 zu zeigen, dass J_x konvex ist. Seien also $a, b \in J_x$, dann ist $a \in X$ und $b \in Y$ für Intervalle X und Y, die x enthalten und selbst in A enthalten sind. Dann ist $X \cup Y$ ebenfalls ein Intervall, dass x enthält und in Y enthalten ist, so dass $X \cup Y \subseteq J_x$. Außerdem gilt $a, b \in X \cup Y$, und per Konvexität des Intervalls $X \cup Y$ folgt $[a, b] \subseteq X \cup Y \subseteq J_x$. Damit ist J_x selbst konvex, also ein Intervall.
Da $x \in [x, x] \subseteq A$ folgt $x \in J_x$.
Da jedes $a \in J_x$ einem Intervall X mit $X \subseteq A$ angehört, gilt schließlich $J_x \subseteq A$.

Zu (1b). Es ist J eine der Mengen, deren Vereinigung J_x ist, daher folgt $J \subseteq J_x$.

Zu (1c). Ist J' ebenfalls ein Intervall mit Eigenschaften (a) und (b), so folgt $J \subseteq J_x$, weil J Eigenschaft (a) hat und J_x die Eigenschaft (b). Auch folgt $J_x \subseteq J$, weil J_x Eigenschaft (a) hat und J die Eigenschaft (b).

Zu (2). Jedes $x \in A$ ist Element von J_x und somit von $\bigcup_{x \in A} J_x$, also $A \subseteq \bigcup_{x \in A} J_x$. Umgekehrt gilt wegen (1a) für jedes $x \in A$, dass $J_x \subseteq A$, also folgt $\bigcup_{x \in A} J_x \subseteq A$. ■

2.5 Subketten und Subzeitketten einer Zeitkette

Nr. 51 (Def) Subkette und Subzeitkette einer Zeitkette

Eine *Subkette* einer Zeitkette $(\mathbb{T}, \leq)$ ist gemäß Def 6 eine strukturierte Menge $(\mathbb{T}', \leq')$ mit $\mathbb{T}' \subseteq \mathbb{T}$ und $\leq' := \leq \cap (\mathbb{T}' \times \mathbb{T}')$.

Eine *Subzeitkette* einer Zeitkette $\mathbb{T}$ sei nun eine Subkette $(\mathbb{T}', \leq)$,
die selbst wieder bedingt vollständig geordnet (also eine Zeitkette) ist
und deren Ordnungstopologie mit der Spurtopologie von $\mathbb{T}$ im $\mathbb{T}'$ übereinstimmt.

Nr. 52 (Satz) abgeschlossene Mengen und Intervalle als Subzeitketten

*Sei $(\mathbb{T}, \leq)$ eine Zeitkette und $(\mathbb{T}', \leq)$ eine Subkette von $\mathbb{T}$,
wobei $\mathbb{T}'$ eine abgeschlossene Menge oder ein Intervall von $\mathbb{T}$ ist. Dann gilt:*

1. *$\mathbb{T}'$ ist eine Subzeitkette von $\mathbb{T}$*
2. *Für jede nichtleere nach $\substack{\text{oben}\\\text{unten}}$ beschränkte Teilmenge A von $\mathbb{T}'$ stimmt das $\substack{\text{Supremum}\\\text{Infimum}}$ von A im Raum $\mathbb{T}'$ mit dem $\substack{\text{Supremum}\\\text{Infimum}}$ von A im Raum $\mathbb{T}$ überein*
3. *Die Spurtopologie von $\mathbb{T}$ auf $\mathbb{T}'$ ist mit der Ordnungstopologie von $\mathbb{T}'$ identisch*

Beweis (vgl. [Hil 88, Satz 1.1., S. 1-3]).

Zu (1) und (2). Zu zeigen ist, dass jede nichtleere im Raum $\mathbb{T}'$ nach unten bzw. oben beschränkte Teilmenge A von $\mathbb{T}'$ ein Infimum bzw. Supremum in $\mathbb{T}'$ hat, welches mit dem entsprechenden Infimum bzw. Supremum in $\mathbb{T}$ übereinstimmt. Wir zeigen dies für das Infimum (für das Supremum betrachte die zu $\mathbb{T}$ und $\mathbb{T}'$ dualen Ketten).

Sei A im Raum $\mathbb{T}'$ eine nach unten beschränkte nichtleere Teilmenge, und s untere Schranke. Dann ist s auch im Raum $\mathbb{T}$ untere Schranke von A. Also besitzt A im Raum $\mathbb{T}$ ein Infimum i. Wenn nun $i \in \mathbb{T}'$ ist, so ist dieses Infimum trivialerweise auch das Infimum von A im Raum $\mathbb{T}'$ und wir sind fertig. Was wir noch zeigen müssen, ist also, dass $i \in \mathbb{T}'$.

Sei zunächst $\mathbb{T}'$ ein Intervall. Jedenfalls ist i größergleich der unteren Schranke s des Intervalls, gilt also $s \leq i \leq A$. Wir wählen ein $a \in A$. Es folgt $s \leq i \leq a$. Da aber $\mathbb{T}'$ ein Intervall ist, sind mit den beiden Punkten s, a auch alle Zwischenpunkte x mit $s \leq x \leq a$ Element von $\mathbb{T}'$. Insbesondere folgt $i \in \mathbb{T}'$.
Sei nun $\mathbb{T}'$ abgeschlossen. Da i im Raum $\mathbb{T}$ das Infimum von A ist, liegt in jedem i enthaltenden Intervall $]x, y[$ ein Punkt von A (sonst wäre y untere Schranke von A, die größer als i wäre). Da jede Umgebung von i im Raum $\mathbb{T}$ ein solches Intervall enthält, liegt in jeder Umgebung von i ein Element von A, und damit ein Element von $\mathbb{T}'$. Das aber heißt, dass i ein Berührungspunkt

von $\mathbb{T}'$ ist. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathbb{T}'$ gehört daher i zu $\mathbb{T}'$.

Zu (3). Es bilden die Mengen
$]t_1, t_2[\, \cap \mathbb{T}'$ mit $t_1, t_2 \in \overline{\mathbb{T}}$ eine Basis der Spurtopologie, während die Mengen
$]t_1, t_2[\, \cap \mathbb{T}'$ mit $t_1, t_2 \in \overline{\mathbb{T}'}$ eine Basis der Ordnungstopologie bilden.
Wir zeigen, dass beide Basen gleich sind.

Sei $]t_1, t_2[\, \cap \mathbb{T}'$ ein Basiselement der Ordnungstopologie (also mit $t_1, t_2 \in \overline{\mathbb{T}'}$) so ist wegen $\mathbb{T}' \subseteq \mathbb{T}$ dieses Intervall auch ein Basiselement der Spurtopologie.

Sei $]t_1, t_2[\, \cap \mathbb{T}'$ ein Basiselement der Spurtopologie (also mit $t_1, t_2 \in \overline{\mathbb{T}}$). Dann sei $t_a := \begin{cases} \sup\{t \in \mathbb{T}' : t \leq t_1\} & \text{falls } t_1 \in \mathbb{T} \\ -\infty_{\mathbb{T}'} & \text{falls } t_1 = -\infty_{\mathbb{T}} \end{cases}$ bzw. $t_e := \begin{cases} \inf\{t \in \mathbb{T}' : t \geq t_2\} & \text{falls } t_2 \in \mathbb{T} \\ \infty_{\mathbb{T}'} & \text{falls } t_1 = \infty_{\mathbb{T}} \end{cases}$
Zur dieser Festlegung von t_a bzw. t_e beachte, dass im Fall $t_1 \in \mathbb{T}$ bzw. $t_2 \in \mathbb{T}$ die genannten Mengen nichtleer und oben bzw. unten beschränkt sind, und dass nach dem bewiesenen Teil des Satzes sup und inf auch auf die Zeitkette $\mathbb{T}'$ bezogen werden können, mithin $t_a \in \mathbb{T}'$ und $t_e \in \mathbb{T}'$ gilt. Es ist daher $]t_a, t_e[\, \cap \mathbb{T}'$ in jedem Fall eine Basis der Ordnungstopologie.
Trivialerweise gilt $]t_1, t_2[\;\subseteq\;]t_a, t_e[$, und daher $]t_1, t_2[\, \cap \mathbb{T}' \subseteq\;]t_a, t_e[\, \cap \mathbb{T}'$. Wir zeigen noch $]t_a, t_e[\, \cap \mathbb{T}' \subseteq\;]t_1, t_2[\, \cap \mathbb{T}'$, dann gilt Gleichheit und wir sind fertig. Angenommen, für ein $s \in\;]t_a, t_e[\, \cap \mathbb{T}'$ sei $s \leq t_1$, dann ist $t_1 \neq -\infty$, also $t_a = \sup\{t \in \mathbb{T}' : t \leq t_1\}$. Zugleich ist $s \in \{t \in \mathbb{T}' : t \leq t_1\}$, also muss s kleinergleich dem Supremum dieser Menge sein: das heißt $s \leq t_a$ ($\lightning$). Die Annahme ist also falsch und es gilt $t_a < s$. Ebenso folgt $s < t_e$, also zusammen $s \in\;]t_1, t_2[\, \cap \mathbb{T}'$. ■

Nr. 53 (Def) I-O-Menge einer Zeitkette

Sei $\mathbb{T}$ eine Zeitkette, $\mathbb{T}' \subseteq \mathbb{T}$.

$\mathbb{T}'$ ist eine I-O-Menge von $\mathbb{T}$ $:\Leftrightarrow$ es gibt ein Intervall $\mathbb{I}$ und eine offene Menge $\mathbb{O}$ mit $\mathbb{T}' = \mathbb{I} \setminus \mathbb{O}$.

Nr. 54 (Satz) Abgeschlossene Mengen und Intervalle als I-O-Mengen

Abgeschlossene Mengen und Intervalle einer Zeitkette sind I-O-Mengen.

Beweis. Ist $\mathbb{T}'$ abgeschlossen, so $\mathbb{T}' = \mathbb{I} \setminus \mathbb{O}$, wobei $\mathbb{I}$ das Intervall $\mathbb{T}$ und $\mathbb{O}$ die offene Menge $\complement\mathbb{T}'$ ist. — Ist $\mathbb{T}'$ ein Intervall, so ist $\mathbb{T}' = \mathbb{T}' \setminus \emptyset$, wobei $\mathbb{T}'$ Intervall und $\emptyset$ offene Menge ist. ■

Nr. 55 (Satz) Äquivalenzsatz für I-O-Mengen

Sei $\mathbb{T}$ Zeitkette und $\mathbb{T}'$ eine Teilmenge von $\mathbb{T}$.

Sei $\mathbb{T}_2$ eine beliebige Zeitkette (etwa $\mathbb{T}$).
$f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}_2$ eine streng isotone und stetige Funktion (etwa die identische Funktion $\mathrm{id}_{\mathbb{T}}$).

Dann sind folgenden Aussagen äquivalent:

1. *$\mathbb{T}'$ ist I-O-Menge von $\mathbb{T}$.*
2. *Für jede nichtleere und (in $\mathbb{T}'$) nach $\substack{\text{oben}\\\text{unten}}$ beschränkte Teilmenge A von $\mathbb{T}'$ existiert sowohl im Raum $\mathbb{T}$ wie auch in Raum $\mathbb{T}'$ ein $\substack{\text{Supremum}\\\text{Infimum}}$ von A, und das $\substack{\text{Supremum}\\\text{Infimum}}$ beider Räume ist identisch.*
3. *$\mathbb{T}'$ ist Subzeitkette von $\mathbb{T}$*
4. *$\mathbb{T}'$ ist eine Zeitkette, und die Einschränkung von f auf $\mathbb{T}'$ ist stetig.*

Beweis (vgl. [Hil 90, Theorem 1.5.1, S. 23-24]).

Aus (1) folgt (2).
(a) Ist $\mathbb{T}'$ abgeschlossene Menge, folgt die Behauptung aus Satz 52(2).
(b) Ist $\mathbb{T}'$ Intervall, folgt die Behauptung ebenfalls aus Satz 52(2).
(c) Sei nun $\mathbb{T}'$ beliebige I-O-Teilmenge von $\mathbb{T}$, etwa $\mathbb{T}' = \mathbb{I} \setminus \mathbb{O}$ mit einem Intervall $\mathbb{I}$ und einer offenen Menge $\mathbb{O}$. Nach Satz 52 ist $\mathbb{I}$ eine Zeitkette, und $\mathbb{O} \cap \mathbb{I}$ ist eine offene Menge in $\mathbb{I}$ (bezüglich Spur- und daher auch bezüglich Ordnungstopologie; beide sind ja nach Satz 52(3) identisch). Also ist $\mathbb{I} \setminus (\mathbb{O} \cap \mathbb{I})$ in $\mathbb{I}$ abgeschlossen. Nun ist $\mathbb{T}' = \mathbb{I} \setminus \mathbb{O} = \mathbb{I} \setminus (\mathbb{O} \cap \mathbb{I})$.
Also ist $\mathbb{T}'$ eine abgeschlossene Menge der Zeitkette $\mathbb{I}$. Sei nun A nichtleere und in der abgeschlossenen Menge $\mathbb{T}'$ nach $\substack{\text{oben}\\\text{unten}}$ beschränkte Teilmenge von $\mathbb{T}'$. Wegen (a) existiert also im Raum $\mathbb{I}$ wie auch in Raum $\mathbb{T}'$ ein $\substack{\text{Supremum}\\\text{Infimum}}$ von A, und das $\substack{\text{Supremum}\\\text{Infimum}}$ beider Räume ist identisch.
Weiter ist A eine im Intervall $\mathbb{I}$ nach $\substack{\text{oben}\\\text{unten}}$ beschränkte Teilmenge von $\mathbb{T}$. Wegen (b) existiert also im Raum $\mathbb{T}$ wie auch in Raum $\mathbb{I}$ ein $\substack{\text{Supremum}\\\text{Infimum}}$ von A, und das $\substack{\text{Supremum}\\\text{Infimum}}$ beider Räume ist identisch. Insgesamt ist dann auch das $\substack{\text{Supremum}\\\text{Infimum}}$ der Räume $\mathbb{T}'$ und $\mathbb{T}$ identisch.

Aus (2) folgt (3). Zu zeigen ist, dass $\mathbb{T}'$ eine Zeitkette ist, bei welcher die Spurtopologie von $\mathbb{T}$ auf $\mathbb{T}'$ mit der Ordnungstopologie von $\mathbb{T}'$ identisch ist. Dass $\mathbb{T}'$ eine Zeitkette ist, folgt unmittelbar aus (2). Dass aber die Ordnungs- und Spurtopologie auf $\mathbb{T}'$ übereinstimmt, kann wörtlich so bewiesen werden, wie Satz 52(3) (im Beweis dieses Satzes ist lediglich die Passage „dass nach dem bewiesenen Teil des Satzes sup und inf auch auf die Zeitkette $\mathbb{T}'$ bezogen werden können“ zu ersetzen ist durch „dass nach Voraussetzung sup und inf auch auf die Zeitkette $\mathbb{T}'$ bezogen werden können“).

Aus (3) folgt (4). Da f stetig ist, ist auch die Einschränkung von f auf $\mathbb{T}'$ mit der Spurtopologie stetig. Da nach Voraussetzung die Spurtopologie mit der Ordnungstopologie (der

Standardtopologie von $\mathbb{T}'$) übereinstimmt, folgt die Behauptung.

Aus (4) folgt (1). Sei $\mathbb{I}$ das von $\mathbb{T}'$ erzeugte Intervall, also (siehe Satz 49) das kleinste $\mathbb{T}'$ umfassende Intervall. Sei weiter $\mathbb{O} := \mathbb{I} \setminus \mathbb{T}'$. Dann gilt $\mathbb{T}' = \mathbb{I} \setminus \mathbb{O}$, und wir müssen nur noch zeigen, dass $\mathbb{O}$ offen ist.
Nach Satz 50 ist nun $\mathbb{O} = \bigcup_{x\in\mathbb{O}} J_x$, wobei J_x das maximale x enthaltende und in $\mathbb{O}$ enthaltene Intervall bezeichnet. Wenn wir also zeigen, dass jedes J_x offen ist, folgt die Offenheit von $\mathbb{O}$ und wir sind fertig.
Wir betrachten also zu einem $x \in \mathbb{O}$ das Intervall J_x und zeigen, dass J_x offen ist.

$\boxed{\text{Lemma}}$. Falls $\inf J_x \in J_x$, so gibt ein $t \in \mathbb{I}$ mit $t < \inf J_x$,
und falls $\sup_x \in J_x$, gibt es ein $t' \in \mathbb{I}$ mit $\sup J_x < t'$.

Zum Beweis des Lemmas zeigen wir die Existenz von t (die Existenz von t' folgt analog).
Es ist die Annahme zu widerlegen, dass es kein $t \in \mathbb{I}$ gibt, das kleiner $\inf J_x$ ist. Unter dieser Annahme ist das Element $\inf J_x \in \overline{\mathbb{T}}$ untere Schranke von $\mathbb{I}$, und zwar größte untere Schranke (ein $s > \inf J_x$ kann nicht untere Schranke von $\mathbb{I}$ sein, denn da $\inf J_x$ Infimum des Intervalls J_x ist, gibt es zu s ein $s' \in J_x$ mit $\inf J_x < s' < s$, und als Element von J_x gehört s' zu $\mathbb{O}$ und darum zu $\mathbb{I}$). Es gilt dann also $\inf J_x = \inf \mathbb{I} =: a$. Die Elemente kleiner als a liegen also nicht in $\mathbb{I}$, und somit erst recht nicht in der Teilmenge $\mathbb{T}'$ von $\mathbb{I}$. Auch liegen die Elemente von $[a, x]$ in J_x (nach Voraussetzung des Lemmas ist ja $a = \inf J_x \in J_x$ und trivialerweise ist $x \in J_x$, also liegen wegen der Konvexität von Intervallen alle Elemente von $[a, x]$ in J_x), daher in $\mathbb{O}$ und also nicht in $\mathbb{T}'$. Insgesamt hat das gesamte Intervall $]-\infty, x]$ mit $\mathbb{T}'$ kein gemeinsames Element. Dann ist aber $\mathbb{I} \setminus]-\infty, x]$ ein $\mathbb{T}'$ umfassendes Intervall, das kleiner ist als das größte $\mathbb{T}'$ umfassende Intervall $\mathbb{I}$ ($\lightning$). Die Annahme ist also falsch, und es gibt eine untere Schranke $t \in \mathbb{I}$ von J_x, die kleiner als $\inf J_x$ ist. Damit ist das Lemma bewiesen.

Sei nun angenommen, J_x wäre nicht offen. Dann ist J_x nicht von der Form $]r, s[$ mit $r, s \in \overline{\mathbb{T}}$. Also trifft eine der folgenden Aussagen zu:
(A) $J_x = [r, s]$ mit nicht-minimalem $r \in \mathbb{T}$ und nicht-maximalem $s \in \mathbb{T}$
(B) $J_x = [r, s[$ mit nicht-minimalem $r \in \mathbb{T}$ und nicht-maximalem $s \in \mathbb{T}$
(C) $J_x =]r, s]$ mit nicht-minimalem $r \in \mathbb{T}$ und nicht-maximalem $s \in \mathbb{T}$
Wir sind nun fertig, wenn wir (A), (B) und (C) als unmöglich erweisen.

$\boxed{\text{Treffe (A) zu}}$. Nach dem Lemma gibt es eine untere Schranke $u \in \mathbb{I}$ von J_x, die kleiner als $r = \inf J_x$ ist, also ist $u \in]-\infty, r[$. Weiter enthält $[u, r[$ mindestens ein y mit $y \notin \mathbb{O}$, andernfalls wäre $[u, r[\subseteq \mathbb{O}$ und daher $J_x \cup [u, r[$ ein x enthaltendes und in $\mathbb{O}$ enthaltenes Intervall, das echte Obermenge von J_x wäre im Widerspruch zur Maximalität von J_x ($\lightning$). Neben u ist auch $r \in \mathbb{I}$, da ja $r =\in [r, s] = J_x \subseteq \mathbb{O} \subseteq \mathbb{I}$. Wegen $u, r \in \mathbb{I}$, folgt per Konvexität von $\mathbb{I}$, dass auch $y \in \mathbb{I}$. Es ist also $y \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{O} = \mathbb{T}'$ und zugleich $y \in]-\infty, r[$, so dass $M :=]-\infty, r[\cap \mathbb{T}'$ nichtleer ist. Diese Menge M muss also wegen der bedingten Vollständigkeit der Zeitkette $\mathbb{T}'$ ein Element S von $\mathbb{T}'$ als Supremum besitzen.

Wäre $S < r$, so gäbe es zwischen S und r kein Element von $M =]-\infty, r[\cap \mathbb{T}'$; da die Punkte zwischen S und r in $]-\infty, r[$ liegen, können dann die zwischen S und r liegenden Punkte keine

Elemente von $\mathbb{T}'$ sein. Es sind dann also die Elemente zwischen $\max\{S,u\}$ und r Elemente von $\mathbb{I}$ (weil sie zwischen den Elementen u und r von $\mathbb{I}$ liegen), die keine Elemente von $\mathbb{T}'$ sind. Insgesamt sind sie dann Elemente von $\mathbb{O}$. Daher ist $J_x \cup [u,r[$ ein x enthaltendes und in $\mathbb{O}$ enthaltene Intervall, das echte Obermenge von J_x wäre im Widerspruch zur Maximalität von J_x ($\lightning$). Also ist $S < r$ falsch.

Auch ist $S \in [r,s] = J_x$ falsch, da die Elemente von J_x zu $\mathbb{O}$ und daher nicht zu $\mathbb{T}'$ gehören.

Somit muss $s < S$ sein. Doch dann muss es zwischen s und S Elemente von M geben: was nicht sei kann, da die Elemente von M alle kleiner als r, erst recht kleiner als s sind ($\lightning$).
Damit ist (A) falsch.

$\boxed{\text{Treffe (B) zu}}$. Da $f|\mathbb{T}'$ stetig ist, ist das Urbild der offenen Menge $]f(r),\infty[$ offen. Nun ist $(f|\mathbb{T})^{-1}(]f(r),\infty[) = f^{-1}(]f(r),\infty[) \cap \mathbb{T}'$, wegen der strengen Isotonie von f^{-1} folgt trivialerweise $f^{-1}(]f(r),\infty[) =]r,\infty[$, also gilt $f^{-1}(]f(r),\infty[) \cap \mathbb{T}' =]r,\infty[\cap \mathbb{T}'$, und da kein Element von $\mathbb{T}'$ in $J_x = [r,s[$ liegt, ist $]r,\infty[\cap \mathbb{T}' = [s,\infty[\cap \mathbb{T}'$.
Es muss nun also $[s,\infty[\cap \mathbb{T}'$ im Raum $\mathbb{T}'$ mit der Ordnungstopologie offen sein. Insbesondere muss es eine Umgebung U von (und somit ein offenes Intervall $]g,h[$) um s im Raum $\mathbb{T}'$ geben, das Teilmenge von $[s,\infty[\cup \mathbb{T}'$ ist. Nun ist $g < s$, und wegen $[r,s[= J_x \subseteq \mathbb{O} = \mathbb{I} \setminus \mathbb{T}'$ kann das Element g von $\mathbb{T}'$ nicht in $[r,s[$ liegen. Also ist $g < r$. Nach dem Lemma gibt es nun ein Element u von $\mathbb{I}$, das untere Schranke von J_x und also kleiner als r ist. Die Elemente von $[\max\{g,u\},r]$ sind dann wegen der Konvexität von $\mathbb{I}$ Elemente von $\mathbb{I}$, weil u und r solche sind. Mindestens ein solches Element y ist $\notin \mathbb{O}$, andernfalls wäre $J_x \cup [\max\{g,u\},r]$ ein x enthaltendes und in $\mathbb{O}$ enthaltene Intervall, das echte Obermenge von J_x wäre im Widerspruch zur Maximalität von J_x ($\lightning$). Daher ist $y \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{O} = \mathbb{T}'$. Doch ist y ein Element von $]g,r[$, erst recht von $]g,h[$, das kleiner als r ist, also nicht zu $[s,\infty[$ gehört im Widerspruch zu $]g,h[\subseteq [s,\infty[$. ($\lightning$).

$\boxed{\text{Treffe (C) zu}}$. Die Widerlegung ist analog zu der Widerlegung von (B). ∎

Nr. 56 (Satz) Charakterisierung der Subzeitketten einer Zeitkette

Die Subzeitketten einer Zeitkette
sind genau die Subketten, deren Träger eine I-O-Menge ist.

Beweis. Folgt aus der in Satz 55 enthaltenen Aussage, dass die dort genannten Bedingungen (1) und (3) äquivalent sind. ∎

Nr. 57 (Satz) Bewahrung von I-O-Mengen bei isotonen und stetigen Funktionen

Sei $f\colon \mathbb{T}_1 \longrightarrow \mathbb{T}_2$ isotone und stetige Funktion zwischen Zeitketten.

1. *Das Urbild einer I-O-Menge ist eine I-O-Menge*
2. *Das Bild einer I-O-Menge ist eine I-O-Menge*

Beweis (vgl. [Hil 90, Theorem 1.5.2, S. 24]).

Zu (1). Sei $I_2 \setminus O_2 \subseteq \mathbb{T}_2$. Dann gilt $f^{-1}[I_2 \setminus O_2] = f^{-1}[I_2] \setminus f^{-1}[O_2]$. Nun ist wegen der Stetigkeit $f^{-1}[O_2]$ offen. Bleibt nur zu zeigen, dass $f^{-1}[I_2]$ ein Intervall ist. Sei hierzu $a, b \in f^{-1}[I_2]$, also $f(a), f(b) \in I_2$, und sei $x \in [a, b]$, das heißt $a \leq x \leq b$. Dann folgt per Isotonie $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, und da I_2 als Intervall konvex ist, gilt $f(x) \in I_2$, also $x \in f^{-1}[I_2]$. Daher ist $f^{-1}[I_2]$ konvex, also gemäß Satz 46 ein Intervall.

Zu (2). Es genügt zu zeigen, dass das Bild $f[\mathbb{T}_1]$ von $\mathbb{T}_1$ eine I-O-Menge ist: denn der Fall einer I-O-Menge $\mathbb{T}' \subseteq \mathbb{T}$ ist dann dadurch erledigt, dass wir von $f\colon \mathbb{T}_1 \longrightarrow \mathbb{T}_2$ zu der Einschränkung $f|\mathbb{T}'\colon \mathbb{T}' \longrightarrow \mathbb{T}_2$ übergehen können ($f|\mathbb{T}'$ ist ja wieder stetig und isoton, und $\mathbb{T}'$ ist wieder eine Zeitkette). Um nun zu zeigen, dass $f[\mathbb{T}_1]$ eine I-O-Menge ist, genügt es nach Satz 55 zu zeigen, dass für jede nichtleere und (in der Kette $f[\mathbb{T}_1]$) nach $\substack{\text{oben}\\\text{unten}}$ beschränkte Teilmenge A von $f[\mathbb{T}_1]$ sowohl im Raum $\mathbb{T}_2$ wie auch in Raum $f[\mathbb{T}_1]$ ein $\substack{\text{Supremum}\\\text{Infimum}}$ von A existiert, und dass das $\substack{\text{Supremum}\\\text{Infimum}}$ beider Räume identisch ist. Da der Beweis für Supremum und Infimum analog ist, genügt der Beweis für das Supremum. Sei s das trivialerweise im Raum $\mathbb{T}_2$ existente Supremum von A. Wenn dieses in $f[\mathbb{T}_1]$ liegt, sind wir fertig.

Es ist also die Annahme zu widerlegen, dass $s \notin f[\mathbb{T}_1]$.
Unter dieser Annahme sei $A' := \{x : \exists\, a \in A\ x \leq a\}$. Dann besitzen A und A' dasselbe Supremum s (denn trivialerweise ist jede obere Schranke von A auch eine von A'; außerdem ist wegen $A \subseteq A'$ auch umgekehrt jede obere Schranke von A' auch eine von A). Ferner ist A' trivialerweise konvex und nach unten unbeschränkt, also insgesamt ein nach unten unbeschränktes Intervall. Dessen obere Grenze $\sup A' = \sup A = s$ ist nicht in A' enthalten (sonst folgt per Def von A', dass $\exists\, a \in A\ s \leq a$, da s Supremum von A ist, muss dann $s = a$ sein, also $s \in A \subseteq f[\mathbb{T}_1]$, also $s \in f[\mathbb{T}_1]$ gegen die Annahme). Folglich ist $A' =]-\infty, s[$.

Weiter ist $B := f^{-1}[A'] = f^{-1}[\,]-\infty, s[\,] = \{x \in \mathbb{T}_1 : f(x) \in]-\infty, s[\} =$
$\{x \in \mathbb{T}_1 : f(x) \in [\infty, s]\} = f^{-1}[[-\infty, s]]$ als Urbild einer abgeschlossenen Menge eine in $\mathbb{T}_1$ abgeschlossene Menge.

Ferner ist B nach oben beschränkt: Da A in $f[\mathbb{T}_1]$ nach oben beschränkt ist, gibt es eine obere Schranke $S \in f[\mathbb{T}_1]$ von A. Da obere Schranken von A auch solche von A' sind, ist S obere Schranke von A'. Als obere Schranke muss $S \geq s$ gelten, da aber nun $s \notin f[\mathbb{T}_1]$ ist, während $S \in f[\mathbb{T}]$ gilt, ist $S \neq s$ und daher folgt aus $S \geq s$, dass sogar $S > s$ gilt.
Also gilt für alle $a \in A'$, dass $a \leq s < S$. Wähle nun ein $m \in \mathbb{T}_1$ mit $f(m) = S$. Wir behaup-

ten, dass m obere Schranke von B in $\mathbb{T}_1$ ist. Es gilt nämlich für jedes $b \in B$ wegen $f(b) \in A'$, dass $f(b) < S = f(m)$. Daraus folgt $b \leq m$ (denn wäre $b > m$, so per Isotonie von f auch $f(b) \geq f(m)$ ($\lightning$)).

Als nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{T}_1$ besitzt B ein Supremum, und wegen der Abgeschlossenheit von B liegt das Supremum (das ja Berührungspunkt ist) in B. Da also $\forall\, b \in B \;\; b \leq \sup B \in B$ folgt per Isotonie:

$f(b) \leq f(\sup B) \in f[B] = f[f^{-1}[A']] = \{f(x) \,:\, x \in f^{-1}[A']\} = \{f(x) \,:\, x \in \mathbb{T}_1 \;\wedge\; f(x) \in A'\}$ $\subseteq A'$. Da s das Supremum von A' in $\mathbb{T}_2$ ist, folgt

(A) $f(b) \leq f(\sup B) \leq s$.

Nun gilt für $a \in A$ wegen $A \subseteq f[\mathbb{T}_1]$, dass es ein $x \in \mathbb{T}_1$ gibt mit $f(x) = a$. Da a auch in $A' = f^{-1}[B]$ liegt, ist ein solches x stets Element von B.
Mithin gibt es zu jedem $a \in A$ ein $b \in B$ mit $f(b) = a$. Daher folgt mit (A):

$\forall\, a \in A \; a = f(b) \leq f(\sup B) \leq s$.

Damit ist $f(\sup B)$ eine obere Schranke von A, die kleinergleich der kleinsten obere Schranke s ist. Folglich ist $f(\sup B) = s$, also $s = f(\sup B) \in f(\mathbb{T}_1)$ ($\lightning$). ∎

2.6 Konvergenz von Folgen in Zeitketten

Da Zeitketten $\mathbb{T}$ topologische Räume sind, steht aus der allgemeinen Topologie für Folgen in $\mathbb{T}$ die Konvergenztheorie zur Verfügung. Da Zeitketten Hausdorffräume sind (Satz 27), ist im Fall der Konvergenz der Grenzwert stets eindeutig bestimmt. Im folgenden werden einige aus der Konvergenztheorie der reellen Analysis bekannten Sätze auf allgemeine Zeitketten übertragen.

Nr. 58 (Satz) Monotoniekriterium für Konvergenz von Folgen in Zeitketten

Sei $\mathbb{T}$ Zeitkette und f monotone, genauer $\substack{\textit{isotone}\\ \textit{antitone}}$ Folge in $\overline{\mathbb{T}}$.

1. *f konvergiert im Raum $\overline{\mathbb{T}}$ gegen $\substack{\sup \mathrm{Wb}(f)\\ \inf \mathrm{Wb}(f)}$*
2. *f ist in $\mathbb{T}$ nach $\substack{\textit{oben}\\ \textit{unten}}$ beschränkt $\Rightarrow$ f konvergiert im Raum $\mathbb{T}$*
3. *f konvergiert gegen ein $\substack{\textit{nicht-maximales}\\ \textit{nicht-minimales}}$ $t \in \mathbb{T}$ $\Rightarrow$ f ist in $\mathbb{T}$ beschränkt*
4. *Besitzt $\mathbb{T}$ kein $\substack{\textit{Maximum}\\ \textit{Minimum}}$, so gilt: f ist in $\mathbb{T}$ beschränkt $\Leftrightarrow$ f konvergiert im Raum $\mathbb{T}$*

Beweis für den Fall der Isotonie (für den Fall der Antitonie betrachte die duale Zeitkette).

Zu (1). Zunächst existiert das Supremum: gibt es nämlich keine obere Schranke in $\mathbb{T}$, so ist ∞ die kleinste obere Schranke; gibt es aber eine obere Schranke in $\mathbb{T}$, so folgt wegen $\mathrm{Wb}(f) \neq \emptyset$ aus der bedingten Vollständigkeit von $\mathbb{T}$, dass es eine kleinste obere Schranke in $\mathbb{T}$ gibt.
Sei nun $s = \sup \mathrm{Wb}(f)$ und U Umgebung von s. Zu U gibt es ein Basiselement $]a, b[$ der Ordnungstopologie mit $s \in]a, b[\subseteq U$. Nun gibt es ein Element $f(n_0) \in \mathrm{Wb}(f)$ mit $a < f(n_0)$ (andernfalls wäre a eine obere Schranke von $\mathrm{Wb}(f)$, die kleiner wäre als das Supremum ($\lightning$)). Wegen der Isotonie gilt für alle $n \geq n_0$, dass $f(n_0) \leq f(n) \leq s$ und darum $f(n) \in]f(n_0), s[\subseteq]a, b[\subseteq U$. Also liegen für alle $n \geq n_0$ die Folgenglieder mit Index n alle in U.

Zu (2). Folgt aus (1), da wegen der Beschränktheit nach oben $\sup \mathrm{Wb}(f) \in \mathbb{T}$ ist.

Zu (3). Da t nicht-maximal ist, existiert ein $u \in \mathbb{T}$ mit $t < u$, und $[-\infty, u]$ ist eine Umgebung von t. Wegen der Konvergenz liegen alle Folgenglieder mit Index $> n_0$ in dieser Umgebung. Dann ist $a := \max \{f_n : n \text{ ist Index der Folge mit } n \leq n_0\} \cup \{u\}$ obere Schranke von $\mathrm{Wb}(f)$, und (wegen der Isotonie) ist $f(p)$ mit dem kleinsten Index p untere Schranke.

Zu (4). Folgt aus (2) und (3). ∎

Nr. 59 (Satz) Teilfolgenkriterium fuer Konvergenz monotoner Folgen

Sei $\mathbb{T}$ eine Zeitkette, und $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}^{\geq a}}$ $(a \in \mathbb{Z})$ monotone Folge in $\overline{\mathbb{T}}$ und $g \in \overline{\mathbb{T}}$.

x konvergiert gegen g $\Leftrightarrow$ es gibt eine Teilfolge y von x, die gegen g konvergiert.

Beweis. $\Rightarrow$ ist klar (x selbst ist eine solche Teilfolge). Für Richtung $\Leftarrow$ nehmen wir an, dass x isoton ist (der antitone Fall wird analog behandelt). Sei $y = (x_{f(n)})$ eine gegen g konvergente Teilfolge von x. Dann gilt $\sup \mathrm{Wb}(y) \underset{Satz\ 58}{=} g$, also gibt es zu jedem $s < g$ einen Index $n_0 \in \mathbb{Z}^{\geq a}$ mit $s < x_{f(n_0)} \leq g$. Wegen der Isotonie von x gilt dann auch für alle $n \geq f(n_0)$, dass $s < x_{f(n_0)} \leq x_n \leq g$. Also konvergiert (x_n) gegen g. ■

Nr. 60 (Satz) Teilfolgen-Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstraß für Zeitketten

Sei $\mathbb{T}$ eine Zeitkette und $f = (f_n)_{n \in \mathbb{Z}^{\geq p}}$ ($p \in \mathbb{Z}$) Folge von Elementen von $\overline{\mathbb{T}}$.

f besitzt eine in $\overline{\mathbb{T}}$ konvergente Teilfolge, und wenn $Wb(f)$ in $\mathbb{T}$ beschränkt ist, ist der Grenzwert $\in \mathbb{T}$.

Beweis (vgl. [Heu 89, Abschnitt vor 23.3, S. 156]). Wegen des Monotoniekriteriums genügt es zu zeigen, dass eine monotone (isotone oder antitone) Teilfolge von f existiert. Wir definieren:

Ein Index $m \in \mathrm{Db}(f)$ $(= \mathbb{Z}^{\geq p})$ heiße *Gipfelstelle* $:\Leftrightarrow$ $f|\mathbb{Z}^{\geq m}$ ist streng antiton

Erster Fall: es gibt unendlich viele Gipfelstellen. Dann gibt es zu jeder Gipfelstelle eine größere, also können wir rekursiv eine Folge $g\colon \mathbb{Z}^{\geq p} \longrightarrow \mathbb{Z}^{\geq p}$ definieren durch:
$g(p) :=$ das Minimum der Menge aller Gipfelstellen
$g(n+1) :=$ das Minimum der Menge aller Gipfelstellen, die größer als $g(n)$ sind.
Dann ist stets $g(n) < g(n+1)$, also g streng isoton, so dass $(f_{g(n)})_{n \in \mathbb{Z}^{\geq p}}$ eine Teilfolge von f ist. Zugleich sind alle Werte von g Gipfelstellen, also ist $f|\mathbb{Z}^{\geq g(n)}$ antiton, so dass wegen $g(n) < g(n+1)$ folgt $f_{g(n)} > f_{g(n+1)}$. Mithin die genannte Teilfolge antiton.

Zweiter Fall: es gibt nur endliche viele Gipfelstellen, sei dann q ihr Maximum. Dann ist zu jedem $n > q$ die Menge $\{x \in \mathbb{Z}^{\geq p} : n < x \ \wedge \ f_n \geq f_x\}$ nichtleer (andernfalls wäre n Gipfelstelle, die größer als das Maximum q der Gipfelstellen wäre). Wir können also rekursiv eine Folge $g\colon \mathrm{Db}(f) \longrightarrow \mathbb{Z}^{>q} \subseteq \mathrm{Db}(f)$ definieren durch:
$g(p) := q + 1$
$g(n+1) := \min\{x \in \mathbb{Z}^{\geq p} : x > g(n) \ \wedge \ f_x \geq f_{g(n)}\}$
Dann ist wieder $g(n) < g(n+1)$, also g streng isoton, so dass $(f_{g(n)})_{n \in \mathbb{Z}^{\geq p}}$ Teilfolge von f ist. Zugleich folgt per Def von $g(n+1)$, das $f_{g(n)} \geq f_{g(n+1)}$. Mithin ist die genannte Teilfolge isoton. ■

Nr. 61 (Satz) Existenz von Häufungswerten von Folgen in Zeitketten

Sei $\mathbb{Z}$ Zeitkette.

1. *Jede in $\overline{\mathbb{T}}$ verlaufende Folge f besitzt einen Häufungswert in $\overline{\mathbb{T}}$,*
2. *Jede in $\mathbb{T}$ verlaufende beschränkte Folge f besitzt einen Häufungswert in $\mathbb{T}$*

Beweis. Nach dem Teilfolgen-Auswahlprinzip besitzt f eine konvergente Teilfolge in $\overline{\mathbb{T}}$ bzw. in $\mathbb{T}$. Deren Grenzwert ist trivialerweise ein Häufungswert der Teilfolge im entsprechenden Raum, und somit auch ein Häufungswert von f. ■

Nr. 62 (Satz und Def) Limes inferior und Limes superior in Zeitketten

Sei $a = (a_n)$ Folge in einer Zeitkette $\mathbb{T}$ und H die Menge der Häufungswerte von a.

$\limsup a_n$ (lies: Limes superior von a) $:= \sup H$
$\liminf a_n$ (lies: Limes inferior von a) $:= \inf H$

Stets ist $\limsup a_n \in \mathbb{T} \cup \{\infty\}$ und $\liminf a_n \in \mathbb{T} \cup \{-\infty\}$.

Beweis für den Limes superior (für den Limes inferior betrachte die duale Zeitkette).
Wenn H nach oben unbeschränkt ist, so ist offenbar $\sup H = \infty$.
Wenn aber H nach oben beschränkt ist, so ist $\sup H$ ein Element von $\mathbb{T}$ (denn H ist wegen Satz 61 nichtleer und $\mathbb{T}$ ist bedingt vollständige Kette). ■

Nr. 63 (Satz) Charakterisierung von $\limsup$ **und** $\liminf$

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^{\geq p}}$ *Folge in einer Zeitkette* $\mathbb{T}$.

$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k = \limsup a_n$ *und* $\lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k = \liminf a_n$

Beweis (vgl. [Ama 98, Theorem 5.5, S. 183]).
Wir beweisen die erste Behauptung (für die zweite betrachte die duale Zeitkette).

Zunächst ist $\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k$ wohldefiniert, denn $(\sup\{a_k : k \geq n\})_{n\in\mathbb{Z}^{\geq p}}$ ist trivialerweise eine antitone Folge, besitzt also gemäß Satz 58 einen Grenzwert in $\overline{\mathbb{T}}$, und war ist dieser Grenzwert t das Infimum von $\{\sup_{k\geq n} a_k : n \in \mathbb{N}\}$. Wir unterscheiden nun drei Fälle:

$\boxed{\text{Erster Fall: } t = -\infty}$ Dann gilt $\nexists\ K \in \mathbb{T} \cup \{\infty\}\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ K \leq \sup_{k\geq n} a_k$ (andernfalls folgte für ein solches K: $K \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k = -\infty$ ($\lightning$)). Also gilt für jedes K aus $\mathbb{T}\cup\{\infty\}$, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $\sup_{k\geq n} a_k < K$, also erst recht

(A) $\forall\ k \geq n\ a_k < K$.

Hat nun $\mathbb{T}$ ein Minimum, so können wir in Formel (A) für K das Minimum von $\mathbb{T}$ einsetzen: dann besagt diese Formel, dass fast alle Folgenglieder den Wert $-\infty$ haben, so dass es im Intervall $]-\infty, \infty]$, welches ja eine Umgebung jedes $K \in \mathbb{T}\cup\{\infty\}$ ist, nur endlich viele Folgenglieder gibt. Also ist K kein Häufungswert der Folge und somit $-\infty$ ihr einziger Häufungswert.
Hat aber $\mathbb{T}$ kein Minimum, so ist gibt es zu jedem $K \in \mathbb{T}\cup\{\infty\}$ ein $s \in \mathbb{T}$ mit $s < K$ (beachte, dass $\mathbb{T}$ nichtleer ist, sonst gibt es keine Folge in $\mathbb{T}$); setzen wir nun s für K in Formel (A)

ein, so sehen wir, dass in der Umgebung $]s, \infty]$ von K nur endlich viele Folgenglieder liegen. Wieder ist K kein Häufungswert der Folge und somit $-\infty$ ihr einziger Häufungswert.
In jedem Fall ist also $-\infty$ einziger Häufungswert und somit $= \limsup a_n$.

$\boxed{\text{Zweiter Fall: } t \in \mathbb{T}}$ Dann gilt für alle $\xi > t$ mit $\xi \in \overline{\mathbb{T}}$: $\exists\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, K \geq n\ \sup_{k \geq K} a_k \in [a_k, \xi[$, also erst recht $\forall\, k \geq n\ a_k < \xi$. Daher ist ξ kein Häufungswert der Folge. Mithin gibt es keine größeren Häufungswerte als t. Wenn wir nachweisen, dass t Häufungswert ist, ist somit t das Supremum der Häufungswerte.
Hierzu sei $]t', t''[\ (t', t'' \in \overline{\mathbb{T}})$ eine Intervall-Umgebung von t (jede Umgebung enthält eine solche als Teilmenge). Da für $n \in \mathbb{N}$ der Wert $\sup_{k \geq n} a_k$ größergleich dem Infimum t von $\{\sup_{k \geq n} a_k : n \in \mathbb{N}\}$ ist, gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $k \geq n$ mit $a_k > t'$ (sonst wäre $\sup_{k \geq n} a_k \leq t'$ ($\lightning$)). Wir finden also unendlich viele Glieder der Folge a_k mit $a_k > t'$. Nun sind nur endlich viele größer als t (sonst gäbe es keinen Häufungswert, der größer als t ist). Also sind unendlich viele größer als t' und kleiner als t und liegen daher in $]t', t''[$. Also ist t Häufungswert.

$\boxed{\text{Dritter Fall: } t = \infty}$ Dann ist ∞ das Infimum von $\{\sup_{k \geq n} a_k : n \in \mathbb{N}\}$, also folgt $\infty \leq \sup_{k \geq n} a_k$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sup_{k \geq n} a_k = \infty$. Es liegen dann in jeder Umgebung von ∞ unendlich viele Glieder der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so dass ∞ Häufungswert ist, und trivialerweise ist dies dann das Supremum der Menge der Häufungswerte. ■

Nr. 64 (Satz) Limsup/Liminf-Kriterium für Konvergenz in Zeitketten

$\mathbb{T}$ sei Zeitkette und $f = (f_n)$ eine Folge in $\overline{\mathbb{T}}$.

f konvergiert gegen t $\Leftrightarrow\ \limsup_{n \to \infty} f_n = \liminf_{n \to \infty} f_n$
und im Fall der Konvergenz gilt $\lim_{n \to \infty} f_n = \limsup_{n \to \infty} f_n = \liminf_{n \to \infty} f_n$

Beweis (vgl. [Ama 98, Theorem 5.7., S. 184]). $\Rightarrow$. Strebe f gegen t. Da in Hausdorffräumen der Grenzwert einer konvergenten Folge ihr einziger Häufungswert ist, ist t das einzige Element der Menge H der Häufungswerte von f. Somit folgt $\limsup_{n \to \infty} f_n = t = \liminf_{n \to \infty} f_n$.

$\Leftarrow$. Sei $\limsup_{n \to \infty} f_n = \liminf_{n \to \infty} f_n$. Sei H die Menge der Häufungswerte von f. Wegen Satz 61 ist $H \neq \emptyset$. Auch enthält H nicht mehrere Elemente (sonst gäbe es $s, t \in H$ mit $s < t$, also $\liminf_{n \to \infty} f_n \leq s < t \leq \limsup_{n \to \infty} f_n$ ($\lightning$)). Also enthält H genau ein Element t, so dass $\limsup_{n \to \infty} f_n = \min H = t = \max H = \limsup_{n \to \infty}$.
Angenommen, f strebt nicht gegen t. Dann gibt es eine Umgebung U von t, so dass es zu jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ einen Index $n > n_0$ gibt mit $f(n) \notin U$. Also kann man rekursiv eine Teilfolge f^* von f definieren, deren Glieder ganz außerhalb von U verlaufen. Diese Teilfolge besitzt dann nach Satz 60 eine konvergente Teilfolge f^{**}, deren Grenzwert s trivialerweise ein Häufungswert von f ist. Da f^{**} außerhalb von U verläuft, ist $s \neq t$, und ist somit ein vom einzigen Element t von H verschiedenes Elemente von H ($\lightning$). ■

3 Maßketten

3.1 Definition und erste Folgerungen

Nr. 65 (Def) Maßkette

Eine strukturierte Menge $(\mathbb{T}, \leq, \mu)$ heißt *Maßkette*
$:\Leftrightarrow$ $(\mathbb{T}, \leq)$ ist Zeitkette und μ Funktion μ: $\mathbb{T} \times \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit für alle $r, s, t \in \mathbb{T}$:

(Axiom K: Kozyklus-Eigenschaft) $\mu(r, s) + \mu(s, t) = \mu(r, t)$

(Axiom I: strenge Isotonie) $r > s \Rightarrow \mu(r, s) > 0$

(Axiom S: Stetigkeit) μ ist stetig

Die Zeitkette $(\mathbb{T}, \leq)$ heißt die zugrundeliegende *Zeitkette* der Maßkette,
μ heißt ihre *Wachstumseichung*.

Nr. 66 (Satz) Subtraktions–, Null– und Alternationsgesetze

Für $r, s, t \in \mathbb{T}$ gilt:

1. *(Subtraktionsgesetze)* $\mu(r, t) - \mu(s, t) = \mu(r, s)$ *und* $\mu(t, r) - \mu(t, s) = \mu(s, r)$
2. *(Nullgesetz)* *Für $r, s \in \mathbb{T}$ gilt* $\mu(r, s) = 0 \Leftrightarrow r = s$
3. *(Alternationsgesetz)* $\mu(r, s) = -\mu(s, r)$

Beweis. Zum ersten Gesetz von (1). Per (K) ist $\mu(r, s) + \mu(s, t) = \mu(r, t)$. Subtrahiere $\mu(s, t)$.
Zum zweiten Gesetz von (1). Per (K) ist $\mu(t, s) + \mu(s, r) = \mu(t, r)$. Subtrahiere $\mu(t, s)$.

Zu (2), Richtung $\Leftarrow$. Per (K) ist $\mu(r, r) + \mu(r, r) = \mu(r, r)$. Subtrahiere $\mu(r, r)$.

Zu (3). Per (K) und Richtung $\Leftarrow$ von (2) folgt $\mu(r, s) + \mu(s, r) = \mu(r, r) = 0$. Subtrahiere $\mu(s, r)$.

Zu (2), Richtung $\Rightarrow$. Angenommen, $r \neq s$, dann ist entweder $r > s$ oder $s > r$. Im ersten Fall ist $\mu(r, s) > 0$ per (I). Nach demselben Axiom ist im zweiten Fall $\mu(s, r) > 0$, und mit (3) folgt $\mu(r, s) = -\mu(s, r) < 0$. In jedem Fall ist $\mu(r, s) \neq 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung. ■

Nr. 67 (Satz) Folgerungen aus der Isotonie

Für $r, r_1, r_2 s, s_1, s_2 \in \mathbb{T}$ gilt:

1. *(strenge Isotonie von $\mu(\bullet, s)$)* $\quad r_1 < r_2 \;\Rightarrow\; \mu(r_1, s) < \mu(r_2, s)$
2. *(strenge Antitonie von $\mu(r, \bullet)$)* $\quad s_1 < s_2 \;\Rightarrow\; \mu(r, s_1) > \mu(r, s_2)$
3. *(Vorzeichenregel)* $\quad \mu(r,s) \begin{cases} > 0 & \text{genau dann wenn } r > s \\ < 0 & \text{genau dann wenn } r < s \\ = 0 & \text{genau dann wenn } r = s \end{cases}$

Beweis. Zu (1). Wegen $r_1 < r_2$ folgt per Axiom (I) $\mu(r_2, r_1) > 0$, und daher $\mu(r_2, s) = \mu(r_2, r_1) + \mu(r_1, s) > \mu(r_1, s)$.

Zu (2). Wegen $s_1 < s_2$ folgt per Axiom (I) $\mu(s_2, s_1) > 0$, und daher $\mu(r, s_1) = \mu(r, s_2) + \mu(s_2, s_1) > \mu(r, s_2)$.

Zu (3). Wenn $r > s$, ist $\mu(r,s) > 0$ wegen Axiom (I). Wenn $r < s$ ist daher $\mu(s,r) > 0$, also folgt nach Satz 66(3), dass $\mu(r,s) = -\mu(s,r) < 0$. Wenn $r = s$ ist nach Satz 66(2) $\mu(r,s) = 0$. Ist nun umgekehrt $\mu(r,s) > 0$ vorausgesetzt, so muss $r > s$ sein, da die beiden anderen Möglichkeiten $r < s$ und $r = s$ nach dem eben Gesagten $\mu(r,s) < 0$ oder $\mu(r,s) = 0$ zur Folge hätten ($\lightning$). Genauso folgt aus $\mu(r,s) < 0$, dass $r < s$, und aus $\mu(r,s) = 0$, dass $r = s$. ■

Nr. 68 (Satz) Äquivalente Formulierungen des Stetigkeitsaxioms

Sei die Kozyklus-Eigenschaft vorausgesetzt, sei $s, t \in \mathbb{T}$. Dann ist äquivalent:

1. *μ ist stetig*
2. *Die Funktion $\mu(\bullet, t) : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ mit $\mu(\bullet, t)(x) := \mu(x, t)$ ist stetig*
3. *Die Funktion $\mu(s, \bullet) : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ mit $\mu(s, \bullet)(y) := \mu(s, y)$ ist stetig*

Als Korollar folgt mit Axiom (S), dass in Maßketten außer der Funktion μ auch die Funktionen $\mu(\bullet, t)$ und $\mu(s, \bullet)$ stetig sind.

Beweis. Wir zeigen jeweils die Stetigkeit in einem beliebigen Punkt des Definitionsbereichs. Aus (1) folgt (2). Sei $x_0 \in \mathbb{T}$, und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der Stetigkeit von μ in (x_0, t) gibt es eine Umgebung $]a, b[\times]c, d[$ von (x_0, t) mit für alle $(x, y) \in]a, b[\times]c, d[:\ |\mu(x_0, t) - \mu(x, y)| < \varepsilon$. Dann ist $]a, b[$ eine Umgebung von x_0 und für alle $x \in]a, b[$ gilt $(x, t) \in]a, b[\times]c, d[$, also $|\mu(x_0, t) - \mu(x, t)| < \varepsilon$. Also ist $\mu(\bullet, t)$ in x_0 stetig.

Aus (2) folgt (3). Sei $y_0 \in \mathbb{T}$, und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der Stetigkeit von $\mu(\bullet, t)$ im Punkt y_0 gibt es eine Umgebung $]a, b[$ von y_0 mit für alle $y \in]a, b[:\ |\mu(y_0, t) - \mu(y, t)| < \varepsilon$. Für diese

y gilt dann aber auch wegen der Subtraktionsgesetze (Satz 66(1)), dass $|\mu(s,y_0) - \mu(s,y)| = |\mu(y,y_0)| = |\mu(y,t) - \mu(y_0,t)| < \varepsilon$. Also ist $\mu(s,\bullet)$ in y_0 stetig.

Analog folgt (2) aus (3). Mithin gilt (2) $\Leftrightarrow$ (3).

Aus (3) folgt (1). Nach Voraussetzung gilt (3), und wegen der Äquivalenz von (2) und (3) ist $\mu(\bullet,y_0)$ und $\mu(x_0,\bullet)$ für jedes $x_0, y_0 \in \mathbb{T}$ stetig. Sei nun also $(x_0,y_0) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der Stetigkeit von $\mu(\bullet,y_0)$ in x_0 gibt es eine Umgebung $]a,b[$ von x_0 mit
(A) $|\mu(x_0,y_0) - \mu(x,y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x \in\,]a,b[$.

Wegen der Stetigkeit von $\mu(x_0,\bullet)$ in y_0 gibt es ebenso eine Umgebung $]c,d[$ von y_0 mit
(B) $|\mu(x_0,y_0) - \mu(x_0,y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $y \in\,]c,d[$.

Nach den Subtraktionsgesetzen (Satz 66(1)) gilt $|\mu(x_0,y_0) - \mu(x_0,y)| = |\mu(y,y_0| = |\mu(x,y_0) - \mu(x,y)|$, also können wir für (B) auch schreiben:

(C) $|\mu(x,y_0) - \mu(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $y \in\,]c,d[$.

Wegen (A) und (C) gilt schließlich für alle $(x,y) \in\,]a,b[\times]c,d[$:
$|\mu(x_0,y_0) - \mu(x,y)| = |\mu(x_0,y_0) - \mu(x,y_0) + \mu(x,y_0) - \mu(x,y)| \leq |\mu(x_0,y_0) - \mu(x,y_0)| + |\mu(x,y_0) - \mu(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Also ist μ in (x_0,y_0) stetig. ■

Nr. 69 (Def) Submaßkette

Eine Submaßkette einer Maßkette $(\mathbb{T}, \leq, \mu)$ ist eine Maßkette $(\mathbb{T}', \leq', \mu')$, so dass $(\mathbb{T}', \leq')$ eine Subzeitkette von $(\mathbb{T}, \leq)$ und $\mu' = \mu|(\mathbb{T}' \times \mathbb{T}')$ ist. Wir schreiben dann für μ' wieder μ.

Nr. 70 (Satz) Charakterisierung der Submaßketten einer Maßkette

Sei $(\mathbb{T}, \leq, \mu)$ eine Maßkette, sei $\mathbb{T}' \subseteq \mathbb{T}$,
und sei $\leq'$ bzw. μ' die Einschränkung von $\leq$ bzw. μ auf $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$.

$(\mathbb{T}', \leq', \mu')$ ist Submaßkette von $\mathbb{T}$ $\Leftrightarrow$ $\mathbb{T}'$ ist I-O-Menge von $\mathbb{T}$.

Insbesondere ist also $(\mathbb{T}', \leq', \mu')$ eine Submaßkette,
wenn $\mathbb{T}'$ eine abgeschlossene Menge oder ein Intervall von $\mathbb{T}$ ist.

Beweis. $\Rightarrow$. Ist $(\mathbb{T}', \leq', \mu')$ eine Submaßkette von $\mathbb{T}$, dann ist $(\mathbb{T}', \leq')$ eine Subzeitkette von $(\mathbb{T}, \leq)$. Das setzt nach Satz 56 voraus, dass $\mathbb{T}'$ eine I-O-Menge ist.

$\Leftarrow$. Ist $\mathbb{T}'$ eine I-O-Menge, so folgt aus Satz 55 (wenn wir darin für f die nach Satz 68 stetige und nach Satz 67 streng isotone Funktion $\mu(\bullet,t)$ für ein $t \in \mathbb{T}'$ einsetzen), dass $(\mathbb{T}', \leq')$ eine

Subzeitkette von $(\mathbb{T}, \leq)$ ist. Dieser Satz zeigt zugleich, dass die Einschränkung von, $\mu(\bullet, t)$ auf $\mathbb{T}'$, das ist $\mu'(\bullet, t)$, stetig ist. Daraus folgt die Stetigkeit von μ'. Trivialerweise vererben sich außerdem auch die Kozyklus-Eigenschaft und die strenge Isotonie von μ auf die Einschränkung μ'. Somit ist $\mathbb{T}'$ eine Maßkette. ■

Nr. 71 (Satz und Def) Standardmaßkette

Versieht man die reelle Zeitkette $(\mathbb{R}, \leq)$ mit der Funktion $\mu_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mu_{\mathbb{R}}(s,t) = s - t$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$, so sind offenbar die Axiome für eine Maßkette erfüllt.

Die Maßkette $(\mathbb{R}, \leq, \mu_{\mathbb{R}})$ und ihre Submaßketten heißen *Standardmaßketten*.

Insbesondere sind die Subketten $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ von $\mathbb{R}$ mit der Einschränkung $\mu_{\mathbb{N}}$ bzw. $\mu_{\mathbb{Z}}$ von $\mu_{\mathbb{R}}$ auf $\mathbb{N}^2$ bzw. $\mathbb{Z}^2$ Submaßketten von $\mathbb{R}$ und somit Standardmaßketten.

Beweis. $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ sind im Raum $\mathbb{R}$ abgeschlossene Mengen, also I-O-Mengen. Die Behauptung folgt nun aus Satz 70. ■

Nr. 72 (Satz und Def) Körnigkeit

Sei $\mathbb{T}$ eine Maßkette. Dann heißt die Funktion

$\mu^*\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ mit $\mu^*(t) := \mu(\sigma(t), t)$ die *Körnigkeit* der Maßkette.

Die Körnigkeit ist stets nichtnegativ.
Die Körnigkeit der Standardmaßkette $\mathbb{R}$ ist konstant 0, die von $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ ist konstant 1.

Beweis. Die Nichtnegativität folgt wegen $\sigma(t) \geq t$ aus Satz 67. In der Maßkette $\mathbb{R}$ gilt stets $\mu(\sigma(t), t) = \mu(t,t) = 0$, und in der Maßkette $\mathbb{Z}$ gilt $\mu(\sigma(t), t) = t + 1 - t = 1$. ■

3.2 Topologische Eigenschaften von Maßketten

Nr. 73 (Satz) Maßketten als metrische Räume

Sei $\mathbb{T}$ eine Maßkette. Dann ist eine Metrik auf $d\colon \mathbb{T} \times \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch
$|r,s| := |\mu(r,s)|$ für alle $r,s \in \mathbb{T}$.
und die durch diese Metrik induzierte Topologie ist mit der Ordnungstopologie identisch.

Beweis (vgl. [Hil 90, Theorem 2.2., erste Behauptung, S. 26]). Für $r,s,t \in \mathbb{T}$ git:
Positive Definitheit: Nach Satz 66(2) gilt im Fall $r \neq s$, dass $\mu(r,s) \neq 0$, also $|\mu(r,s)| > 0$, das heißt $|r,s| > 0$.
Symmetrie: Nach Satz 66(3) gilt $|r,s| = |\mu(rs)| = |-\mu(rs)| = |\mu(sr)| = |s,r|$.
Dreiecksungleichung: Nach Axiom (K) gilt $|r,s| = |\mu(r,s)| = |\mu(r,t) + \mu(t,s)| \leq |\mu(r,t)| + |\mu(t,s)| = |r,t| + |t,s|$. Also ist die angegebene Funktion d eine Metrik auf $\mathbb{T}$.

Die durch die Metrik induzierte Topologie ist feiner als die Ordnungstopologie. Hierzu ist zu zeigen, dass es zu jedem $t \in \mathbb{T}$ und jedem Basiselement $]r,s[$ der Ordnungstopologie mit $t \in]r,s[$ einen Ball $\mathbb{B}_\varepsilon(t)$ gibt, der Teilmenge von $]r,s[$ ist. Wir zeigen, dass dies mit dem Ball $\mathbb{B}_\varepsilon(t)$ mit $\varepsilon = \min\{|\mu(t,r)|, |\mu(s,t|\}$ zutrifft. Ist nämlich $x \in \mathbb{B}_\varepsilon(t)$, so $|x,t| < \varepsilon$, also $\mu(t,x) \leq |\mu(t,x)| < |\mu(t,r)|$, und da $\mu(t,r)$ positiv ist (wegen $t > r$ und Satz 67(3)), folgt $|\mu(t,r)| = \mu(t,r)$, insgesamt also $\mu(t,x) < \mu(t,r)$. Per strenger Antitonie von $\mu(t,\bullet)$ folgt $r < x$.
Ebenso gilt $\mu(x,t) \leq |\mu(x,t)| < |\mu(s,t)|$, und da $\mu(s,t)$ positiv ist (wegen $s > t$ und Satz 67(3)), folgt $|\mu(s,t)| = \mu(s,t)$, also insgesamt $\mu(x,t) < \mu(s,t)$. Per strenger Isotonie von $\mu(t,\bullet)$ folgt dann $s < t$, insgesamt also $r < x < s$, das heißt $x \in]r,s[$.

Andererseits ist auch die Ordnungstopologie feiner als die durch die Metrik induzierte. Dazu zeigen wir, dass zu jedem $t \in \mathbb{T}$ der Ball $\mathbb{B}_\varepsilon(t)$ eine t enthaltende offene Menge O der Ordnungstopologie als Teilmenge enthält. Sei nämlich O das Urbild der offenen Menge $]-\varepsilon,\varepsilon[$ unter der Funktion $\mu(\bullet,t)$. Da diese Funktion offen ist, ist dann auch O offen, und es gilt für $x \in O$, dass $\mu(x,t) \in]-\varepsilon,\varepsilon[$, also $-\varepsilon < \mu(x,t) < \varepsilon$, also $|\mu(x,t)| < \varepsilon$, also $x \in \mathbb{B}_\varepsilon(t)$. ■

Nr. 74 (Satz) Maßketten als Vereinigungen abzählbar vieler kompakter Intervalle

1. *Jede Maßkette ist ein K_σ-Raum,*
   das heißt eine Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen.
2. *Jede Maßkette $\mathbb{T}$ ist Vereinigung abzählbar vieler kompakter Intervalle*
3. *Jede Maßkette $\mathbb{T}$ ist Vereinigung abzählbar vieler kompakter Intervalle,*
   von denen je zwei verschiedene höchstens einen Punkt gemeinsam haben,
   der dann gemeinsamer Grenzpunkt dieser beiden Intervalle ist.

Beweis (für (1) vgl. [Hil 90, Theorem 2.2., zweite Behauptung, S. 26f]).

Zu (1). Sei $t_0 \in \mathbb{T}$ fest, und $m := \mu(\bullet, t_0)$ die stetige und streng isotone Funktion $m\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $m(t) := \mu(t, t_0)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei nun

$$a_n := \begin{cases} a & \text{falls } \inf m[\mathbb{T}] = a \in m[\mathbb{T}] \\ a + \frac{1}{n} & \text{falls } \inf m[\mathbb{T}] = a \in \mathbb{R} \setminus \{m[\mathbb{T}]\} \\ -n & \text{falls } \inf m[\mathbb{T}] = -\infty \end{cases} \text{ und } b_n := \begin{cases} b & \text{falls } \sup m[\mathbb{T}] = b \in m[\mathbb{T}] \\ b - \frac{1}{n} & \text{falls } \sup m[\mathbb{T}] = b \in \mathbb{R} \setminus \{m[\mathbb{T}]\} \\ n & \text{falls } \sup m[\mathbb{T}] = \infty \end{cases}$$

Nach Konstruktion gilt in jedem Fall $\mathbb{T} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} m^{-1}[[a_n, b_n]]$, und wenn $m^{-1}[a_n, b_n]$ stets kompakt ist, sind wir fertig. Zu zeigen ist also, dass die Urbilder von $[a_n, b_n]$ unter m stets beschränkt und abgeschlossen sind. Da m stetig ist, sind die Urbilder abgeschlossen. Angenommen, $m^{-1}[[a_n, b_n]]$ wäre nach unten unbeschränkt: dann gibt es zu $m^{-1}(a_n)$ in $m^{-1}[[a_n, b_m]]$ ein kleineres Element t, und wegen der strengen Isotonie von m wäre $m(t)$ ein Element von $[a_n, b_n]$, das kleiner als a_n wäre ($\lightning$). Genauso führt man auch die Annahme zum Widerspruch, dass das Urbild nach oben unbeschränkt ist.

Zu (2). Nach (1) gibt es eine abzählbare Familie $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakter Mengen mit $\mathbb{T} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Da kompakte Mengen beschränkt sind, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $\inf K_n, \sup K_n$ Elemente von $\mathbb{T}$ sind. Dann ist $\mathbb{T} = \bigcup_{n\in mN} [\inf K_n, \sup K_n]$.

Zu (3). Nach (2) gibt es eine abzählbare Familie $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ kompakter Intervalle mit $\mathbb{T} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$. Sei nun $I_1 := [a_0, b_0]$ und für alle $n \in \mathbb{N}:\ I_{n+1} := [a_n, b_n] \setminus \bigcup_{k\leq n} I_k$.
Dann ist trivialerweise $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine disjunkte Familie mit $\mathbb{T} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Durch triviale vollständige Induktion sieht man, das man jedes I_n als Vereinigung endlich vieler disjunkter Intervalle mit Grenzpunkten aus $\mathbb{T}$ schreiben kann (die nicht notwendigerweise kompakt sind). Sei $m(n)$ die Anzahl dieser Intervalle für I_n, und seien diese Intervalle selbst mit $J_{n1}, \ldots J_{nm(n)}$ bezeichnet. Sei schließlich $\overline{J_{ij}}$ jeweils das kompakte Intervall mit denselben Grenzpunkten wie J_{ij}. Dann kommen als gemeinsame Punkte von zwei verschiedenen der Intervalle $\overline{J_{ij}}$ für $i \in \mathbb{N}$ und $j \in \{1, \ldots, m(i)\}$ nur Grenzpunkte in Frage, und zwar können diese Intervalle höchstens einen ihrer Grenzpunkte gemeinsam haben (sonst wären sie identisch). Außerdem handelt sich um abzählbar viele Intervalle, deren Vereinigung $\bigcup_{i\in I} \bigcup_{j\in\{1,\ldots m(i)\}} \overline{J_{ij}}$ gleich $\mathbb{T}$ ist. ■

Nr. 75 (Satz) Separabilität von Maßketten

Jede Maßkette $\mathbb{T}$ ist ein separabler Raum (vgl. Anhang, Def 351).

Beweis. $\mathbb{T}$ ist als Zeitkette nach Satz 44 lokalkompakt und nach Satz 73 metrisierbar. Nun ist gilt aber für jeden lokalkompakten metrischen Raum, dass er genau dann eine Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen (kurz ein K_σ-Raum) ist, wenn er separabel ist (Beweis in [Die 85, 3.18.3., S. 70]). Da also $\mathbb{T}$ nach Satz 74(1) ein K_σ-Raum ist, ist $\mathbb{T}$ separabel. ■

3.3 Isomorphie zwischen Maßketten

Nr. 76 (Def) Maßketten-Morphismus, –Isomorphismus und –Isomorphie

Seien $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$ Maßketten und $f\colon \mathbb{T}_1 \longrightarrow \mathbb{T}_2$ eine Funktion.

f ist ein (Maßketten-)Morphismus $\quad :\Leftrightarrow\ \forall\, r, s \in \mathbb{T}_1\ \mu_2(f(s), f(r)) = \mu_1(s, r)$

Bem. Trivialerweise ist die Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{T}}$ für jede Maßkette $\mathbb{T}$ ein Morphismus, ebenso ist die Komposition von Morphismen $f\colon \mathbb{T}_1 \longrightarrow \mathbb{T}_2$ und $g\colon \mathbb{T}_2 \longrightarrow \mathbb{T}_3$ für Maßketten $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2, \mathbb{T}_3$ wieder ein Morphismus. Daher bilden die Maßketten zusammen mit den Morphismen ein Konstrukt (d. h. eine konkrete Kategorie mit Struktur) im Sinne der Kategorienlehre. Wie in Konstrukten üblich, werden mit Hilfe der Morphismen Isomorphismen definiert:

f ist (Maßketten-)Isomorphismus $\quad :\Leftrightarrow\ f$ ist bijektiver Morphismus und f^{-1} Morphismus

$\mathbb{T}_1$ ist (Maßketten-)isomorph zu $\mathbb{T}_2 \quad :\Leftrightarrow$ es gibt einen Isomorphismus von $\mathbb{T}_1$ in $\mathbb{T}_2$

Nr. 77 (Satz) strenge Isotonie und Stetigkeit von Maßketten-Morphismen

Jeder Maßketten-Morphismus $f\colon \mathbb{T}_1 \longrightarrow \mathbb{T}_2$ ist streng isoton und stetig.
Unmittelbares Korollar: Jeder Maßketten-Isomorphismus ist ein Homöomorphismus von $\mathbb{T}_1$ in $\mathbb{T}_2$.

Beweis. Wenn $\mathbb{T}_1$ leer ist, ist auch f leer und die Behauptung trivial.
Sei $\mathbb{T}_1$ nichtleer und $\tau \in \mathbb{T}_1$.

Zur strengen Isotonie. Sei $x, y \in \mathbb{T}_1$ mit $x < y$ gegeben. Dann folgt wegen der strengen Isotonie von $\mu_1(\bullet, \tau)$, dass $\mu_1(x, \tau) \leq \mu_1(y, \tau)$. Da f Morphismus ist, folgt daraus $\mu_2(f(x), f(\tau)) \leq \mu_2(f(y), f(\tau))$. Angenommen, $f(x) \leq f(y)$ ist falsch, dann gilt $f(y) < f(x)$, und wegen der strengen Isotonie von $\mu_2(\bullet, f(\tau)$ folgt $\mu_2(f(y), f(\tau) < \mu_2(f(x), f(\tau))$ (↯). Also ist die Annahme falsch und es folgt $f(x) \leq f(y)$.

Zur Stetigkeit. Es ist zu zeigen, dass für Basismengen $]p, q[$ von $\mathbb{T}_2$ stets $f^{-1}[\,]p, q[\,]$ offen ist. Wenn wir zeigen, dass $f^{-1}[\,]q, p[\,] = \mu_1(\bullet, \tau)^{-1}[\,]\mu_2(p, f(\tau)), \mu_2(q, f(\tau))[\,]$ gilt, sind wir fertig, da letztere Menge offensichtlich offen ist. Die zu beweisende Gleichung lautet ausgeschrieben:
$\{x \in \mathbb{T}_1 : f(x) \in\,]p, q[\} = \{x : \mu_1(x, \tau) \in\,]\mu_2(p, f(\tau)), \mu_2(q, f(\tau))[\}$

Um diese Gleichung zu beweisen, ist für alle $x \in \mathbb{T}_1$ die folgende Äquivalenz zu verifizieren:
$f(x) \in\,]p, q[\ \Leftrightarrow\ \mu_1(x, \tau) \in\,]\mu_2(p, f(\tau)), \mu_2(q, f(\tau))[$.
In der Tat gilt per Isotonie von $\mu_2(\bullet, f(\tau))$:
$f(x) \in\,]p, q[\ \Leftrightarrow\ p \leq f(x) \leq q\ \Leftrightarrow\ \mu_2(p, f(\tau)) \leq \mu_2(f(x), f(\tau)) \leq \mu_2(p, f(\tau))\ \Leftrightarrow$ $\mu_2(p, f(\tau)) \leq \mu_1(x, \tau) \leq \mu_2(q, f(\tau))\ \Leftrightarrow\ \mu_1(x, \tau) \in\,]\mu_2(p, f(\tau)), \mu_2(q, f(\tau))[$. ∎

Nr. 78 (Satz) Kriterium für Maßketten-Isomorphismen

Für Maßketten-Morphismen $f\colon \mathbb{T}_1 \longrightarrow \mathbb{T}_2$ gilt:
f ist Isomorphismus $\Leftrightarrow$ f ist surjektiv

Beweis. $\Rightarrow$ ist trivial. Zu $\Leftarrow$. Da f nach Satz 77 isoton ist, ist f injektiv, wegen der vorausgesetzten Surjektivität also bijektiver Morphismus. Bleibt zu zeigen, dass $f^{-1}\colon \mathbb{T}_2 \longrightarrow \mathbb{T}_1$ ebenfalls Morphismus ist. Sei hierzu $r, s \in \mathbb{T}_2$. Dann ist $f^{-1}(r), f^{-1}(s) \in \mathbb{T}_1$. Da f Morphismus ist, gilt also $\mu_2(f(f^{-1}(r)), f(f^{-1}(s))) = \mu_1(f^{-1}(r), f^{-1}(s)$, das heißt $\mu_1(f^{-1}(r), f^{-1}(s)) = \mu_2(r, s)$. ■

Nr. 79 (Satz) Einbettungssatz

Jede Maßkette $(\mathbb{T}, \leq_{\mathbb{T}}, \mu_{\mathbb{T}})$ kann in $\mathbb{R}$ „eingebettet“ werden, das soll heißen:
sie ist isomorph zu einer Submaßkette von $(\mathbb{R}, \leq, \mu_{\mathbb{R}})$. Genauer gilt für jedes $\tau \in \mathbb{T}$:

$\mu_{\mathbb{T}}(\bullet, \tau)$ ist ein Isomorphismus von $(\mathbb{T}, \leq_{\mathbb{T}}, \mu_{\mathbb{T}})$ in $(\mathrm{Wb}(\mu_{\mathbb{T}}(\bullet, \tau)), \leq', \mu'_{\mathbb{R}})$, wobei
$\leq'$ bzw. $\mu'_{\mathbb{R}}$ die Einschränkung von $\leq$ bzw. $\mu_{\mathbb{R}}$ auf $\mathrm{Wb}(\mu_{\mathbb{T}}(\bullet, \tau)) \times \mathrm{Wb}(\mu_{\mathbb{T}}(\bullet, \tau))$ ist.

Beweis. Wenn $\mathbb{T}$ leer ist, ist $\mathbb{T}$ selbst eine Submaßkette von $\mathbb{R}$, die zu sich selbst isomorph ist. Sei $\mathbb{T}$ nichtleer und $\tau \in \mathbb{T}$. Nun ist $\mu_{\mathbb{T}}(\bullet, \tau)\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Morphismus von $\mathbb{T}$ in $\mathbb{R}$, denn nach Satz 66 gilt für $r, s \in \mathbb{T}$: $\mu_{\mathbb{R}}(\mu_{\mathbb{T}}(s, \tau), \mu_{\mathbb{T}}(r, \tau)) = \mu_{\mathbb{T}}(s, \tau) - \mu_{\mathbb{T}}(r, \tau) = \mu_{\mathbb{T}}(r, s)$. Wegen der Isotonie und Stetigkeit von $\mu_{\mathbb{T}}(\bullet, \tau)$ ist nun nach Satz 57 die Teilmenge $\mathrm{Wb}(\mu_{\mathbb{T}}(\bullet, \tau)$ von $\mathbb{R}$ eine I-O-Menge, also handelt es sich bei $\mathrm{Wb}(\mu_{\mathbb{T}}(\bullet, \tau)$ mit den entsprechenden Einschränkungen von $\leq$ und $\mu_{\mathbb{R}}$ nach Satz 70 um eine Submaßkette der Standardmaßkette $\mathbb{R}$. Weiter ist $\mu_{\mathbb{T}}(\bullet, \tau)\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathrm{Wb}(\mu_{\mathbb{T}}(\bullet, \tau))$ ein Morphismus, der trivialerweise surjektiv ist. Nach Satz 78 ist schließlich h $\mu_{\mathbb{T}}(\bullet, \tau)$ ein Isomorphismus von der Maßkette $\mathbb{T}$ in die Submaßkette $\mathrm{Wb}(\mu_{\mathbb{T}}(\bullet, \tau))$ von $\mathbb{R}$. ■

Nr. 80 (Satz) dichte Ordnung und Isomorphie zu reellem Intervall

Eine Maßkette $\mathbb{T}$ ist dicht geordnet $\Leftrightarrow$ $\mathbb{T}$ ist isomorph zu einem reellen Intervall

Beweis. $\Rightarrow$. Nach Satz 79 gibt es einen Isomorphismus f von $\mathbb{T}$ in eine Submaßkette $\mathbb{T}'$ von $\mathbb{R}$. Um zu zeigen, dass $\mathbb{T}'$ ein Intervall ist, müssen wir nach Satz 46 zeigen, dass $\mathbb{T}'$ konvex ist, also zu $a, b \in \mathbb{T}'$ mit $a < b$ und $c \in \mathbb{R}$ stets $c \in \mathbb{T}'$ ist. Nun ist f nach Satz 77 stetige Funktion von $\mathbb{T}$ in $\mathbb{R}$. Da $[a, b]$ nach Satz 47 zusammenhängend ist, ist auch $\mathbb{T}' = f[A]$ zusammenhängend, also nach Satz 47 ein reelles Intervall.

$\Leftarrow$. Nach Voraussetzung gibt es einen Isomorphismus f von $\mathbb{T}$ in ein reelles Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Angenommen, $\mathbb{T}$ ist nicht dicht geordnet. Per Negation von Def 19 gibt es dann $x, y \in \mathbb{T}$ mit $x < y$, so dass es ein $m \in \mathbb{T}$ gibt mit $x < m < y$. Wegen der strengen Isotonie von f folgt $f(x) < f(y)$ mit $f(x), f(y) \in I$. Nun gibt es im reellen Intervall $I = f[\mathbb{T}]$ eine reelle Zahl $f(m)$ $(m \in \mathbb{T})$ zwischen $f(x)$ und $f(y)$, und aus $f(x) < f(m) < f(y)$ folgt wegen der strengen Isotonie $x < m < y$ ($\lightning$). Die Annahme ist also falsch, und $\mathbb{T}$ ist dicht geordnet. ■

4 Differentiation

4.1 Differenzierbarkeit und Ableitung von Funktionen

Nr. 81 (Satz und Def) lokale Ableitung

Sei $(\mathbb{T}, \leq, \mu)$ Maßkette, $\mathcal{X}$ Banachraum, $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$, $t \in \mathbb{T}$ und $x \in X$.

f hat an der Stelle t die *(lokale Delta-)Ableitung* x $:\Leftrightarrow$ $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ U \in \mathfrak{U}(t)\ \forall\ s \in U\ \|f(\sigma(t)) - f(s) - x\mu(\sigma(t), s)\| \leq \varepsilon|\mu(\sigma(t), s)|$

In dieser Definition kann man als Norm $\|\bullet\|$ eine beliebige zu der Norm von $\mathcal{X}$ topologisch äquivalente Norm nehmen.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass die Bedeutung der Definition sich nicht ändert, wenn wir von der Norm $\|\bullet\|$ von $\mathcal{X}$ zu einer topologische äquivalenten Norm $|||\bullet|||$ übergehen.
Dazu ist zu zeigen, dass aus
$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ U \in \mathfrak{U}(t)\ \forall\ s \in U\ \|f(\sigma(t)) - f(s) - x\mu(\sigma(t), s)\| \leq \varepsilon|\mu(\sigma(t), s)|$ folgt
$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ U \in \mathfrak{U}(t)\ \forall\ s \in U\ |||f(\sigma(t)) - f(s) - x\mu(\sigma(t), s)||| \leq \varepsilon|\mu(\sigma(t), s)|$.
Gelte also $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ U \in \mathfrak{U}(t)\ \forall\ s \in U\ \|f(\sigma(t)) - f(s) - x\mu(\sigma(t), s)\| \leq \varepsilon|\mu(\sigma(t), s)|$.
Wegen der Äquivalenz der Normen gibt es ein $\delta > 0$ mit für alle $y \in \mathcal{X}$: $|||y||| \leq \delta\|y\|$.
Zu $\varepsilon > 0$ ist auch $\frac{\varepsilon}{\delta} > 0$, also gibt es dann auch ein $U \in \mathfrak{U}(t)$ mit
$\forall\ s \in U\ \|f(\sigma(t)) - f(s) - x\mu(\sigma(t), s)\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}|\mu(\sigma(t), s)|$,
also mit $\forall\ s \in U\ |||f(\sigma(t)) - f(s) - x\mu(\sigma(t), s)||| \leq \delta\|f(\sigma(t)) - f(s) - x\mu(\sigma(t), s)\|$
$\leq \delta\frac{\varepsilon}{\delta}|\mu(\sigma(t), s)| = \varepsilon|\mu(\sigma(t), s)|$. ■

Nr. 82 (Satz) Existenz– und Eindeutigkeitssatz für Ableitungen

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $\mathcal{X}$ Banachraum, $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ und $t \in \mathbb{T}$. Dann gilt

1. *Wenn $t \in \mathbb{T}^\kappa$, hat f höchstens eine Ableitung in t.*
2. *Wenn $t \notin \mathbb{T}^\kappa$, ist jedes $x \in X$ eine Ableitung von f in t.*
3. *Wenn $\mathcal{X}$ Nullraum ist, so hat jedes f an jeder Stelle t die Ableitung* 0.

Beweis nach [Hil 90, Theorem 2.5.(i-ii), S. 28].

Zu (1). Seien x, y Ableitungen von f im Punkt t. Nach Satz 40 gibt es in jeder Umgebung U von t ein $s \in \mathbb{T}$ mit $s \neq \sigma(t)$. Also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $s \neq \sigma(t)$ mit
(A) $\|f(\sigma(t)) - f(s) - x\mu(\sigma(t), s)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}|\mu(\sigma(t), s)|$ und
(B) $\|f(\sigma(t)) - f(s) - y\mu(\sigma(t), s)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}|\mu(\sigma(t), s)|$
Nun ist $\|x - y\||\mu(\sigma(t), s)|$ per Homogenität der Norm
$= \|(x - y)\mu(\sigma(t), s)\| = \|x\mu(\sigma(t), s) - (f(\sigma(t)) - f(s)) + (f(\sigma(t)) - f(s)) - y\mu(\sigma(t), s)\|$, das ist per Dreiecksungleichung $\leq \|x\mu(\sigma(t), s) - f(\sigma(t) - f(s))\| + \|f(\sigma(t) - f(s) - y\mu(\sigma(t), s)\|$, das ist per (A) und (B) $\leq \varepsilon|\mu(\sigma(t), s)|$, insgesamt also
(C) $\|x - y\||\mu(\sigma(t), s)| \leq \varepsilon|\mu(\sigma(t), s)|$
Wegen $\sigma(t) \neq s$ ist nun $|\mu(\sigma(t), s)|$ nach dem Nullgesetz für μ (Satz 66(2)) von 0 verschieden. Mithin können wir (C) mit $\frac{1}{|\mu(\sigma(t),s)|}$ multiplizieren und erhalten $\|x - y\| \leq \varepsilon$. Da dies für jedes positive ε gilt, ist $\|x - y\| = 0$, also $x - y = 0$, und somit $x = y$.

Zu (2). Da $t \notin \mathbb{T}^\kappa$, folgt mit Satz 40, dass $\sigma(t) = t$ und $\{t\}$ Umgebung von t ist. Für $\varepsilon > 0$ und $x \in X$ ist dann $\{t\} \in \mathfrak{U}(t)$ mit für alle $s \in U$ (d. h. für $s = t$): $\|f(\sigma(t)) - f(s) - x\mu(t, s)\| = \|f(t) - f(s) - x\mu(t, s)\| = \|f(s) - f(s) - x\mu(s, s)\| = 0 \leq \varepsilon|\mu(\sigma(t), s)|$.

Zu (3). Zu jedem $\varepsilon > 0$ gilt für beliebige Umgebungen U von t für alle $s \in U$:
$\|f(\sigma(t)) - f(s) - 0\mu(\sigma(t), s)\| = 0 \leq \varepsilon|\mu(\sigma(t), s)|$. ■

Nr. 83 (Satz und Def) lokale Differenzierbarkeit

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $\mathcal{X}$ Banachraum, $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ und $t \in \mathbb{T}$.

f ist an der Stelle t *(lokal) Delta-differenzierbar* (oder kurz *(lokal) differenzierbar*)
$:\Leftrightarrow$ f besitzt an der Stelle t *genau eine* Ableitung.

Wenn $\mathcal{X}$ nicht der Nullraum ist, ist f höchstens an Stellen aus $\mathbb{T}^\kappa$ differenzierbar.

Beweis. Ist $t \notin \mathbb{T}^\kappa$, besitzt f an der Stelle t nach Satz 82(2) jedes $x \in X$ als Ableitung. Da X nicht Nullraum ist, sind dies mehrere Ableitungen, also ist f in t nicht differenzierbar. ■

Nr. 84 (Satz und Def) globale Ableitung und globale Differenzierbarkeit

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $\mathcal{X}$ Banachraum, $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ und $D := \{t \in \mathbb{T}^\kappa : f \text{ ist in } t \text{ differenzierbar}\}$

Dann heißt $f^\Delta\colon D(\subseteq \mathbb{T}) \longrightarrow \mathcal{X}$, $\forall\, t \in D \;\; f(t) :=$ die Ableitung von f an der Stelle t *(globale) Delta-Ableitung* (oder kurz die *Ableitung*) von f.

f heißt *(global Delta-)differenzierbar* genau wenn f^Δ auf ganz $\mathbb{T}^\kappa$ definiert ist.
Dazu ist äquivalent: f besitzt in jedem $t \in \mathbb{T}^\kappa$ eine Ableitung.

Beweis. $\Rightarrow$ ist trivial, $\Leftarrow$ folgt aus Satz 82(1). ■

Nr. 85 (Satz) Ableitung konstanter Funktionen

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $\mathcal{X}$ Banachraum, $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ Funktion mit konstantem Wert c.

Dann besitzt f in jedem $t \in \mathbb{T}$ die Ableitung 0.

Beweis. $\forall\ \varepsilon > 0, s \in \mathbb{T}\ \|f(\sigma(t)) - f(s) - 0\mu(\sigma(t), s)\| = 0 \leq \varepsilon|\mu(\sigma(t), s)|$. ■

Nr. 86 (Satz und Def) Übereinstimmung mit der gewöhnlichen Differentialrechnung, falls $\mathbb{T}$ reelles perfektes Intervall ist

Sei $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$ perfektes Intervall, d. h. gemäß Satz 31 ein Intervall mit mindestens zwei Punkten. Sei $\mathcal{X}$ Banachraum und $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$. Sei $t \in \mathbb{T}$ und $x \in \mathbb{R}$.

f hat an der Stelle t die Ableitung $x \;\Leftrightarrow\; \lim_{s\to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s} = x$

f ist an der Stelle t differenzierbar $\;\Leftrightarrow\; \lim_{s\to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s} = x$ existiert.

Im Fall der Differenzierbarkeit schreiben wir für $f^{\Delta}(t)$ auch $f'(t)$.

Beweis. Da $\mathbb{T}$ perfekt ist, ist t Häufungspunkt von $\mathbb{T}$ und somit von $\mathbb{T}\setminus\{t\}$ im Raum $\mathbb{R}$, womit eine notwendige Bedingung für die Existenz des Grenzwertes $\lim_{s\to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s} = x$ erfüllt ist.

Zu jeder $\mathbb{T}$-Umgebung U von t gibt es nun eine $\mathbb{T}$-offene Menge O mit $x \in O \subseteq U$. Bezeichnen wir mit $\mathbb{B}_\delta(t)$ $(\delta > 0, t \in \mathbb{R})$ die Bälle des metrischen Raumes $\mathbb{R}$, so sind die Mengen $\mathbb{B}_\delta(t) \cap \mathbb{T}$ $(\delta > 0, t \in \mathbb{T})$ die Bälle des metrischen Unterraums von $\mathbb{R}$ mit Träger $\mathbb{T}$; der von diesem induzierte topologische Raum ist der topologische Unterraum von $\mathbb{R}$ mit Träger $\mathbb{T}$, und dieser ist, da $\mathbb{T}$ als Submaßkette erst recht Subzeitkette von $\mathbb{R}$ mit Träger $\mathbb{T}$ ist (Def 69), gemäß Def 51 mit der Ordnungstopologie ausgestattet, also der zu $\mathbb{T}$ zugehörige topologische Raum. Zu O gibt es daher ein $\mathbb{B}_\delta(\tau) \cap \mathbb{T}$, so dass $t \in \mathbb{B}_\delta(\tau) \cap \mathbb{T} \subseteq O \subseteq U$. Insgesamt gibt es also zu jeder $\mathbb{T}$-Umgebung U von t ein $\beta > 0$ mit $\mathbb{B}_\delta(\tau) \cap \mathbb{T} \subseteq U$.

Aus diesem Grund folgt aus Definition 81, dass f genau dann an der Stelle $t \in \mathbb{T}$ die Ableitung $x \in \mathcal{X}$ hat, wenn $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ s \in \mathbb{B}_\delta(t) \cap \mathbb{T}\ \|f(t) - f(s) - x(t-s)\| \leq \varepsilon|t-s|$ gilt. Das ist genau dann der Fall, wenn $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ s \in (\mathbb{B}_\delta(t) \cap \mathbb{T}) \setminus \{t\}\ \|\frac{f(t)-f(s)-x(t-s)}{t-s}\| \leq \varepsilon$,

das heißt $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ s \in \mathbb{T}\setminus\{t\}\ \|s-t\| < \delta \;\Rightarrow\; \|\frac{f(t)-f(s)}{t-s} - x\| \leq \varepsilon$.

Das ist genau dann der Fall, wenn $\lim_{s\to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s} = x$, und die erste Behauptung ist bewiesen.

Da $\mathbb{T}$ perfekt ist, ist jedes $t \in \mathbb{T}$ Häufungspunkt, also besitzt jede Umgebung von t mehr als einen Punkt von $\mathbb{T}$, also ist $t \in \mathbb{T}^\kappa$ (Satz 40). Daher ist wegen Satz 82(1) die Differenzierbarkeit in t äquivalent zur Existenz einer Ableitung in t. Somit folgt die zweite Behauptung aus der ersten. ■

Nr. 87 (Satz und Def) Differenzierbarkeit und Ableitung Δf im Fall $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$

Sei $\mathbb{T}$ die Standardmaßkette mit Träger $\mathbb{Z}$ und $f\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{X}$.

f ist an jeder Stelle $t \in \mathbb{Z}$ differenzierbar mit Ableitung $f^{\Delta}(t) = f(t+1) - f(t)$.

Für $f^{\Delta}(t)$ schreiben wir auch $\Delta f(t)$.

Beweis. Es ist $U := \{t\}$ eine Umgebung von t, und für jedes $\varepsilon > 0$ gilt dann für alle $s \in U$ (das heißt für $s = t$) unter Berücksichtigung von $\sigma(t) = t + 1$:
$\|f(\sigma(t)) - f(s) - (f(t+1) - f(t))\mu(\sigma(t), s)\| = \|f(t+1) - f(t) - (f(t+1) - f(t))(t+1-t)\|$ $= 0 \leq \varepsilon|\mu(\sigma(t), s)|$. Somit hat f an der Stelle t die behauptete Ableitung, und die Differenzierbarkeit folgt wegen $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{\kappa}$ aus Satz 82(1). ■

Nr. 88 (Satz) Differenzierbarkeit und Ableitung der Funktion $\mu(\bullet, \tau)$

Für Maßketten $\mathbb{T}$ ist die Funktion $\mu(\bullet, \tau)\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$
an jeder Stelle $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ differenzierbar und hat an jeder Stelle $t \in \mathbb{T}$ die Ableitung 1.

Beweis. Für $t \in \mathbb{T}$ folgt für jedes $\varepsilon > 0$ und s aus der Umgebung $\mathbb{T}$ von t:
$|\mu(\sigma(t), \tau) - \mu(s, \tau) - 1\mu(\sigma(t), s)| = |\mu(\sigma(t), \tau) + \mu(\tau, s) + \mu(s, \sigma(t)| = |\mu(\sigma(t), \sigma(t)|$ $= |0| = 0 \leq \varepsilon|\mu(\sigma(t), s)|$. Somit hat μ überall die Ableitung 1, hat also nach Satz 82(1) an Stellen $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ die Zahl 1 als einzige Ableitung und ist daher dort differenzierbar. ■

Nr. 89 (Satz) Differenzierbarkeit und Ableitung stetiger Funktionen in rechts-zerstreuten Punkten

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $\mathcal{X}$ Banachraum, sei $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ in t zugleich stetig und rechts-zerstreut.

f ist in t differenzierbar und hat dort die Ableitung $f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu^*(t)}$

Beweis nach [Hil 90, Theorem 2.5.(v), S. 28f]. Da t rechts-zerstreut ist, gilt $t < \sigma(t)$. Dann ist $U :=]-\infty, \sigma(t)[$ eine Umgebung von t mit $\forall\ s \in U\ s < \sigma(t)$, insbesondere $s \neq \sigma(t)$ und daher $\mu(\sigma(t), s) \neq 0$. Daher ist die Funktion $g\colon U \longrightarrow \mathcal{X}$ mit $\forall\ s \in U\ g(s) := \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\mu(\sigma(t), s)}$ wohldefiniert und wegen der Stetigkeit konstanter Funktionen sowie der Stetigkeit der Addition, Multiplikation und Kehrwertbildung ist g stetig in t.
Für $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein $V \in \mathfrak{U}_U(t)$ (was offenbar auch eine Umgebung von t im Raum $\mathbb{T}$ ist), so dass für $\forall\ s \in V\ \|\frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\mu(\sigma(t), s)} - \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(\sigma(t), t)}\| \leq \varepsilon$. Für diese s gilt dann auch:
$\|f(\sigma(t)) - f(s) - \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu * (t)}\mu(\sigma(t), s)\| = \|\frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\mu(\sigma(t), s)} - \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(\sigma(t), t)}\|\,|\mu(\sigma(t), s)| \leq \varepsilon|\mu(\sigma(t), s)|$.
Damit hat μ in t die genannte Ableitung. Da t rechts-zerstreut ist, ist t nichtmaximal, also $\in \mathbb{T}^{\kappa}$, und nach Satz 82(1) folgt die Differenzierbarkeit von f in t. ■

Nr. 90 (Satz) Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $\mathcal{X}$ Banachraum und habe $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ im Punkt $t \in \mathbb{T}$ eine Ableitung (das heißt: es ist f dort differenzierbar oder $t \notin \mathbb{T}^\kappa$).

Dann ist f in t stetig. — Insbesondere sind global differenzierbare Funktionen global stetig.

Beweis (vgl. [Hil 90, Theorem 2.5.(iii), S. 28]). Da t eine Umgebungsbasis aus kompakten Intervallen besitzt, können wir eine kompakte Umgebung U von t wählen. Da $\mu(\sigma(t), \bullet)|U$ eine auf der nichtleeren kompakten Menge U definierte stetige Funktion ist, ist ihre Komposition mit der stetigen Betragsfunktion b ebenfalls stetig. Da stetige Funktionen die Kompaktheit übertragen, ist das Bild von $b \circ (\mu(\sigma(t), \bullet)|U)$ kompakt. Daher existiert das Maximum von $\{|\mu(\sigma(t), s)| \,:\, s \in U\}$ und dann trivialerweise auch das Maximum m von $\{|\mu(\sigma(t), s)| \,:\, s \in U\}$ $\cup\{\|f^\Delta(t)\|\}$. Ist nun $t \notin \mathbb{T}^\kappa$, so gilt nach Satz 40, dass $\{t\}$ eine Umgebung von t ist, so dass die Stetigkeit von f im Punkt t trivial ist. Sei also $t \in \mathbb{T}^\kappa$.

Dann gilt $m > 0$, denn dann gibt es in U gemäß Satz 40 ein von $\sigma(t)$ verschiedenes s, also ist $\mu(\sigma(t), s) \neq 0$, also $|\mu(\sigma(t), s)| > 0$, also ist auch das Maximum m größer als 0.
Wegen der Differenzierbarkeit von f und der Stetigkeit von $\mu(\sigma(t), \bullet)$ (und da der Schnitt von Umgebungen wieder eine Umgebung ist) gibt es eine Umgebung V von t, so dass zugleich

(1) $|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)\mu(\sigma(t), s)| \leq \frac{\varepsilon}{4m}|\mu(\sigma(t, s)|$ und

(2) $|\mu(\sigma(t), s) - \mu(\sigma(t), t)| \leq \frac{\varepsilon}{2m}$ gilt.

Dann gilt für alle s aus der Umgebung $V \cap U$ von t:

$$\|f(s) - f(t)\| = \|f(s) - f(\sigma(t)) + f^\Delta(t)\mu(\sigma(t), s) + f(\sigma(t)) - f(t) - f^\Delta(t)\mu(\sigma(t), t)$$
$$+ f^\Delta(t)[\mu(\sigma(t), t) - \mu(\sigma(t), s)]\|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{4m}(|\mu(\sigma(t), s)| + |\mu(\sigma(t), t)|) + \|f^\Delta(t)\|\frac{\varepsilon}{2m} \leq \frac{\varepsilon}{4m}2m + \frac{\varepsilon}{2m}m = \varepsilon \ \blacksquare$$

Nr. 91 (Satz) Differenzierbarkeit bei Einschränkung und Erweiterung

Seien $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$ Maßketten, wobei $\mathbb{T}_1$ Intervall von $\mathbb{T}_2$ ist.
Sei $t \in \mathbb{T}_1^\kappa$ (erst recht ist dann $t \in \mathbb{T}_2^\kappa$) und $\sigma_{\mathbb{T}_2}(t) \in \mathbb{T}_1$ (dann ist $\sigma_{\mathbb{T}_1} = \sigma_{\mathbb{T}_2}$).
Sei schließlich $\mathcal{X}$ Banachraum und $f\colon \mathbb{T}_1 \longrightarrow \mathcal{X}$ sowie $g\colon \mathbb{T}_2 \longrightarrow \mathcal{X}$ mit $f = g|\mathbb{T}_1$.

1. *g ist an der Stelle t differenzierbar $\Rightarrow$ f ist an der Stelle t differenzierbar*
2. *Ist t kein Extremum von $\mathbb{T}_1$ oder $t = \min \mathbb{T}_1 = \min \mathbb{T}_2$ oder $t = \max \mathbb{T}_1 = \max \mathbb{T}_2$, gilt auch die Umkehrung.*
3. *Im Fall der Differenzierbarkeit von g gilt $f^\Delta(t) = g^\Delta(t)$.*

Beweis. Zu (1) und (3). Sei g in t differenzierbar mit Ableitung x. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine Umgebung U von t im Raum $\mathbb{T}_2$ mit für alle $s \in U$:

(A) $\|g(\sigma(t)) - g(s) - x\mu(\sigma(t), s)\| \leq \varepsilon|\mu(\sigma(t), s)|$.

Es ist dann $U \cap \mathbb{T}_1$ eine Umgebung von t im Unterraum $\mathbb{T}_1$ von $\mathbb{T}_2$, und es gilt (A) für alle $s \in U \cap \mathbb{T}_1$. Nun bleibt Aussage (A) wahr, wenn man darin σ und μ als Sprungoperator bzw. Wachstumseichung in der Maßkette $\mathbb{T}_1$ (statt von $\mathbb{T}_2$) interpretiert (bezüglich σ gilt dies, weil es wegen der in Satz 46 begründeten Konvexität des Intervalls $\mathbb{T}_1$ zwischen t und $\sigma_{\mathbb{T}_2}(t)$ keine Elemente von $\mathbb{T}_2 \setminus \mathbb{T}_1$ gibt). Außerdem gilt für $s \in U \cap \mathbb{T}_1$, dass $g(\sigma(t)) = f(\sigma(t))$ sowie $f(s) = g(s)$. Also folgt aus (A) per Def des Ableitung, dass f ebenso wie g an der Stelle t die Ableitung x hat. Wegen $t \in \mathbb{T}_1^\kappa$ ist x die einzige Ableitung, also f an der Stelle t differenzierbar.

Zu (2). Nun ist vorausgesetzt, dass f an der Stelle t die Ableitung x hat und die Bedingung

(B) t ist kein Extremum von $\mathbb{T}_1$ oder $t = \min \mathbb{T}_1 = \min \mathbb{T}_2$ oder $t = \max \mathbb{T}_1 = \max \mathbb{T}_2$

erfüllt ist. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine Umgebung U von t im Raum $\mathbb{T}_1$ mit für alle $s \in U$:

(C) $\|f(\sigma(t)) - f(s) - x\mu(\sigma(t), s)\| \leq \varepsilon|\mu(\sigma(t), s)|$.

Nun enthält U im Raum $\mathbb{T}_1$ ein offenes Intervall $]a, b[$, in dem t liegt ($a, b \in \overline{\mathbb{T}_1}$). Wir bestimmen nun gewisse $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{T}_2}$:
Wenn t in $\mathbb{T}_1$ nichtminimal ist, gibt es ein $c \in \mathbb{T}_1$ mit $c < t$, und wir setzen $\alpha := \max\{a, c\}$, was jedenfalls von $-\infty$ verschieden und daher ein Element von $\mathbb{T}_1 \subseteq \mathbb{T}_2$ ist. Wenn aber $t = \min \mathbb{T}_1$, ist das wegen (B) auch $= \min \mathbb{T}_1$, dann muss a die untere adjungierte Schranke $-\infty$ von $\mathbb{T}_1$ sein. Wir nehmen dann als α die untere adjungierte Schranke von $\mathbb{T}_2$.

Entsprechend definieren wir β: wenn t nichtmaximal ist, nehmen wir ein $c > t$ und setzen $\beta := \min\{b, c\} \in \mathbb{T}_1 \subseteq \mathbb{T}_2$. Andernfalls sei β die obere adjungierte Schranke von $\mathbb{T}_2$.
Mit diesen α, β gilt dann: $t \in]\alpha, \beta[\subseteq U$, es ist also $U' :=]\alpha, \beta[$ eine Umgebung von t im Raum $\mathbb{T}_2$, und für alle $s \in U'$ gilt (B). Da man σ und μ in (C) auch als Sprungoperator bzw. Wachstumseichung in der Maßkette $\mathbb{T}_2$ interpretieren kann, und $g(\sigma(t)) = f(\sigma(t))$ sowie $f(s) = g(s)$ für $s \in U'$ gilt, folgt aus (C) per Def des Ableitung, dass g ebenso wie f an der Stelle t die Ableitung x hat. Wegen $t \in \mathbb{T}_2^\kappa$ ist x die einzige Ableitung, also f an der Stelle t differenzierbar. ■

Nr. 92 (Satz) Ableitung komplexer Funktionen

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{T}$ und $x \in X$.

1. *f hat an der Stelle t die Ableitung x*
   $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}\, f$ hat an der Stelle t die Ableitung $\mathrm{Re}\, x$ und $\mathrm{Im}\, f$ die Ableitung $\mathrm{Im}\, x$
2. *f ist in t differenzierbar $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}\, f$ und $\mathrm{Im}\, f$ sind in t differenzierbar*
3. *$f^\Delta(t) = (\mathrm{Re}\, f)^\Delta(t) + i(\mathrm{Im}\, f)^\Delta(t)$*
4. *f ist differenzierbar $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}\, f$ und $\mathrm{Im}\, f$ sind differenzierbar*
   und im Fall der Differenzierbarkeit gilt $f^\Delta = (\mathrm{Re}\, f)^\Delta + i(\mathrm{Im}\, f)^\Delta$.

Beweis. Zu (1). Habe f hat an der Stelle t die Ableitung x, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von t mit für alle $s \in U$:
(A) $|f(\sigma(t)) - f(s) - x\mu(\sigma(t), s)| \leq \varepsilon|\mu(\sigma(t), s)|$.
Für komplexe Zahlen x gilt $|\mathrm{Re}\, x|, |\mathrm{Im}\, x| \leq |x|$. Es bleibt also (A) gültig, wenn die linke Seite durch $|\mathrm{Re}(f(\sigma(t)) - f(s) - x\mu(\sigma(t), s)|$, das ist $|(\mathrm{Re}\, f)(\sigma(t)) - (\mathrm{Re}\, f)(x) - \mathrm{Re}\, x\mu(\sigma(t), s)|$ ersetzt wird, und ebenso, wenn sie durch $|(\mathrm{Im}\, f)(\sigma(t)) - (\mathrm{Im}\, f)(x) - \mathrm{Im}\, x\mu(\sigma(t), s)|$ ersetzt wird. Also haben $\mathrm{Re}\, f$ bzw. $\mathrm{Im}\, f$ an der Stelle t die Ableitung $\mathrm{Re}\, x$ bzw. $\mathrm{Im}\, x$.

Habe umgekehrt $\mathrm{Re}\, f$ und $\mathrm{Im}\, f$ an der Stelle t die Ableitung $\mathrm{Re}\, x$ bzw. $\mathrm{Im}\, x$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von t mit für alle $s \in U$:
(B) $|\mathrm{Re}(f(\sigma(t)) - f(s) - x\mu(\sigma(t), s))| \leq \frac{1}{2}\varepsilon|\mu(\sigma(t), s)|$ und
(C) $|\mathrm{Im}(f(\sigma(t)) - f(s) - x\mu(\sigma(t), s))| \leq \frac{1}{2}\varepsilon|\mu(\sigma(t), s)|$.
Da für komplexe Zahlen x gilt $|x| \leq |\mathrm{Re}(x)| + |\mathrm{Im}(x)|$, folgt aus (A) und (B), dass $|f(\sigma(t)) - f(s) - x\mu(\sigma(t), s)|$ kleinergleich der Summe der linken Seiten von (A) und (B) ist, also auch kleinergleich der Summe der rechten Seiten, das heißt $\leq \varepsilon|\mu(\sigma(t), s)|$. Damit hat f an der Stelle t die Ableitung x.

Zu (2). Folgt unmittelbar aus (1).

Zu (3). Wegen (2) ist die linke Seite der Gleichung genau dann definiert, wenn es die rechte ist. Daher gilt die Gleichung, wenn eine der beiden Seiten (und daher jede) undefiniert ist. Wegen (1) gilt die Gleichung auch, wenn eine der beiden Seiten (und daher jede) definiert ist.

Zu (4). Wegen (2) gilt die behauptete Äquivalenz. Im Fall der Differenzierbarkeit ist $\mathbb{T}^\kappa$ Definitionsbereich sowohl von f^Δ wie auch von $\mathrm{Re}\, f$ und $\mathrm{Im}\, f$, so dass beide Seiten der behaupteten Gleichung wohldefiniert sind. Die behauptete Gleichung gilt dann wegen (3). ■

Nr. 93 (Def) Ableitung mehrdimensionaler Funktionen

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $n \in \mathbb{N}$, $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{K}^n$, $t \in \mathbb{T}$ und $x \in X$.
Für $i \in \{1, \dots, n\}$ kürzen wir die i-te Komponente eines $y \in \mathbb{K}^n$ mit y_i und die i-te Komponentenfunktion einer Funktion g in $\mathbb{K}^n$ mit g_i ab.

1. f hat an der Stelle t die Ableitung x
   $\Leftrightarrow$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ hat f_i an der Stelle t die Ableitung x_i
2. f ist in t differenzierbar
   $\Leftrightarrow$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ ist f_i in t differenzierbar,
3. $f^\Delta(t) = (f_1^\Delta(t), \dots, f_n^\Delta(t))$
4. f ist differenzierbar $\Leftrightarrow$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ ist f_i differenzierbar,
   und im Fall der Differenzierbarkeit gilt $f^\Delta = (f_1^\Delta, \dots, f_n^\Delta)$.

Beweis. Zu (1). Im Fall $n = 0$ ist $\mathbb{K}^n = \{\emptyset\}$ Nullraum; dann siehe Satz 82(3). Sei also $n \in \mathbb{N}^{\odot}$. In der Definition der Ableitung dürfen wir nun wegen Satz 81 und der Äquivalenz der Normen auf $\mathbb{K}^n$ eine beliebige Norm des $\mathbb{K}^n$ einsetzen. Wir nehmen die Maximumsnorm, es ist dann also für alle $y \in \mathbb{K}^n$: $\|y\| = \max_{i \in I} |y_i|$. Nun gilt: f hat an der Stelle t die Ableitung x
$\Leftrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, U \in \mathfrak{U}(t)\ \forall\, s \in U\ \|f(\sigma(t)) - f(s) - x\mu(\sigma(t), s)\| \leq \varepsilon|\mu(\sigma(t), s)|$
$\Leftrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, U \in \mathfrak{U}(t)\ \forall\, s \in U\ \max_{i \in \{1,\dots,n\}} |f_i(\sigma(t)) - f_i(s) - x_i\mu(\sigma(t), s)| \leq \varepsilon|\mu(\sigma(t), s)|$
$\Leftrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, U \in \mathfrak{U}(t)\ \forall\, s \in U$
$|f_1(\sigma(t)) - f_1(s) - x_1\mu(\sigma(t), s)|, \dots, |f_n(\sigma(t)) - f_n(s) - x_n\mu(\sigma(t), s)| \leq \varepsilon|\mu(\sigma(t), s)|$
$\Leftrightarrow$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, U \in \mathfrak{U}(t)\ \forall\, s \in U$
$|f_i(\sigma(t)) - f_i(s) - x_i\mu(\sigma(t), s)| \leq \varepsilon|\mu(\sigma(t), s)|$
$\Leftrightarrow$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ hat f_i an der Stelle t die Ableitung x_i.

Zu (2). Folgt unmittelbar aus (1).

Zu (3). Wegen (2) ist die linke Seite der Gleichung genau dann definiert, wenn es die rechte ist. Daher gilt die Gleichung, wenn eine der beiden Seiten (und daher jede) undefiniert ist. Wegen (1) gilt die Gleichung auch, wenn eine der beiden Seiten (und daher jede) definiert ist.

Zu (4). Wegen (2) gilt die behauptete Äquivalenz. Im Fall der Differenzierbarkeit ist $\mathbb{T}^\kappa$ Definitionsbereich sowohl von f^Δ wie auch von f_1^Δ und ... und f_n^Δ, so dass beide Seiten der behaupteten Gleichung wohldefiniert sind. Diese Gleichung gilt dann wegen (3). ■

Nr. 94 (Satz) Linearität der Ableitung

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette und $\mathcal{X}$ Banachraum. Seien $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ und $g\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ in $t \in \mathbb{T}^\kappa$ differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann ist auch $f+g$ und λf in t differenzierbar, und es gilt:

1. $(f+g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t)$
2. $(\lambda f)^\Delta(t) = \lambda f^\Delta(t)$

Beweis. Zu (1). Zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gibt es nach Voraussetzung (und weil Schnitte zweier Umgebungen wieder eine Umgebung von t sind) eine Umgebung U von t mit für alle $s \in U$:
$\|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)\mu(\sigma(t), s)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}|\mu(\sigma(t), s)|$ und zugleich
$\|g(\sigma(t)) - g(s) - g^\Delta(t)\mu(\sigma(t), s)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}|\mu(\sigma(t), s)|$,
also folgt mit der Dreiecksungleichung
$\|(f+g)(\sigma(t)) - (f+g)(s) - (f^\Delta(t) + g^\Delta(t))\mu(\sigma(t), s)\| \leq \|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)\mu(\sigma(t), s)\|$
$+\|g(\sigma(t)) - g(s) - g^\Delta(t)\mu(\sigma(t), s)\| \leq \varepsilon|\mu(\sigma(t), s)|$.

Zu (2). Im Fall $\lambda = 0$ siehe Satz 85. Sei also $\lambda \neq 0$. Dann gibt es zu $\frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ eine Umgebung U von t mit für alle $s \in U$:
$\|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)\mu(\sigma(t), s)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}|\mu(\sigma(t), s)|$,
und es folgt per Homogenität der Norm
$\|(\lambda f)(\sigma(t)) - (\lambda f)(s) - (\lambda f^\Delta(t))\mu(\sigma(t), s)\| = |\lambda|\|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)\mu(\sigma(t), s)\|$
$\leq |\lambda|\frac{\varepsilon}{|\lambda|}|\mu(\sigma(t), s)| = \varepsilon|\mu(\sigma(t), s)|$. ■

Nr. 95 (Satz und Def) Multiplikation zwischen halbnormierten Vektorräumen

Seien $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_3$ halbnormierte $\mathbb{K}$-Vektorräume, und $\cdot\colon \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \longrightarrow \mathcal{Y}_3$. Dann heißt $\cdot$ eine (mit den Halbnormen verträgliche) *Multiplikation* zwischen $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_3$, genau wenn gilt:

1. (Distributivität) $\forall\, a, b \in Y_1 \;\forall\, c, d \in Y_2 \quad (a+b)c = ac + bc$ und $a(c+d) = ac + ad$
2. (Vorzeichenregeln) $\forall\, a \in Y_1 \;\forall\, b \in Y_2 \quad -(ab) = (-a)b = a(-b)$
3. (multiplikative Dreiecksungleichung) $\forall\, a \in Y_1 \;\forall\, b \in Y_2 \quad \|ab\| \leq \|a\|\|b\|$

Für solche Multiplikationen gelten zwei weitere Vorzeichenregeln: $(-a)(-b) = ab$ und $(-1)a = -a$, sowie das Minus-Distributivgesetz $(a-b)c = ac - bc$ und $c(a-b) = ca - cb$

Beweis. Mit $d := -a$ gilt $(-a)(-b) = d(-b) = -(db) = -((-a)b) = --(ab) = ab$, außerdem $(-1)a = -(1a) = -a$ sowie $(a-b)c = (a+-b)c = ac + (-b)c = ac + -(bc) = ac - bc$, analog folgt $c(a-b) = ca - cb$. ■

Beispiele für Multiplikationen

1. $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y}_2 = \mathcal{Y}_3$ ist normierte $\mathbb{K}$-Algebra und $\cdot$ ihre Multiplikation, also etwa
   a) $Y_1 = Y_2 = Y_3 = \mathbb{K}$ mit Betragsnorm und Körpermultiplikation
   b) $Y_1 = Y_2 = Y_3 = \mathbb{K}^{n \times n}$ mit Abbildungsnorm und Matrixmultiplikation
   c) $Y_1 = Y_2 = Y_3 =$ Menge $\mathcal{L}(V)$ der beschränkten linearen Endomorphismen in einem normierten Vektorraum V mit Operatornorm und Komposition als Multiplikation
2. $\mathcal{Y}_1 = \mathbb{K}$ und $\mathcal{Y}_2 = \mathcal{Y}_3$ ist normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\cdot$ die Skalarmultiplikation
3. $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y}_2$ ist Innenproduktraum und $Y_3 = \mathbb{K}$ und $\cdot$ das Innenprodukt
4. $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y}_2 = \mathcal{Y}_3 = \mathbb{R}^3$ mit der Hilbertnorm als Norm, und $\cdot$ ist das äußere Vektorprodukt

Nr. 96 (Satz) Produktregel

Sei $\mathbb{T}$ eine Maßkette, seien $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ $\mathbb{K}$-Banachräume,
sei $\cdot\colon \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \longrightarrow \mathcal{X}_3$ eine Multiplikation zwischen $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ gemäß Def 95
und seien $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}_1$ und $g\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}_2$ in $t \in \mathbb{T}^\kappa$ differenzierbare Funktionen.

Dann ist auch $f \cdot g$ in t differenzierbar, und es gilt $(fg)^\Delta(t) = f(\sigma(t))g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g(t)$.

Beweis (vgl. [Hil 90, Theorem 2.6.(ii), S. 30]). Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann sei:
$\varepsilon_1 := \begin{cases} 1 & \text{falls } \|f(\sigma(t))\| = 0 \\ \frac{\varepsilon}{3\|f(\sigma(t))\|} & \text{sonst} \end{cases}$, $\varepsilon_2 := \frac{\varepsilon}{\|g(t)\|+\varepsilon_3}$ und $\varepsilon_3 := \begin{cases} 1 & \text{falls } \|f^\Delta(t)\| = 0 \\ \frac{\varepsilon}{3\|f^\Delta(t)\|} & \text{sonst} \end{cases}$.

Dann sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ positive Zahlen, so dass jeder Summand in
$\|f(\sigma(t))\|\varepsilon_1 + (\|g(t)\| + \varepsilon_3)\varepsilon_2 + \|f^\Delta(t)\|\varepsilon_3$ kleinergleich $\frac{\varepsilon}{3}$ ist; also gilt
(A) $\|f(\sigma(t))\|\varepsilon_1 + (\|g(t)\| + \varepsilon_3)\varepsilon_2 + \|f^\Delta(t)\|\varepsilon_3 \leq \varepsilon$.

Da f, g in t differenzierbar und g nach Satz 90 in t stetig ist, gibt es ein $U \in \mathfrak{U}(t)$ mit
(B) $\|g(\sigma(t) - g(s) - g^\Delta(t)\mu(\sigma(t), s)\| \leq \varepsilon_1|\mu(\sigma(t), s)|$ und
(C) $\|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)\mu(\sigma(t), s)\| \leq \varepsilon_2|\mu(\sigma(t), s)|$ und
(D) $\|g(s) - g(t)\| \leq \varepsilon_3$.

Mit Hilfe von (A) bis (D) schließt man, dass für alle $s \in U$ gilt:
$\|f(\sigma(t))g(\sigma(t)) - f(s)g(s) - (f(\sigma(t))g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g(t))\mu(\sigma(t), s)\|$
$= \|f(\sigma(t))g(\sigma(t)) - f(s)g(s) - f(\sigma(t))g^\Delta(t)\mu(\sigma(t), s) - f^\Delta(t)g(t)\mu(\sigma(t), s)\|$
$= \|f(\sigma(t))[g(\sigma(t)) - g(s) - g^\Delta(t)\mu(\sigma(t), s)]$
$\quad +[f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)\mu(\sigma(t), s)](g(t) + g(s) - g(t))$
$\quad +f^\Delta(t)[g(s) - g(t)]\mu(\sigma(t), s)\|$
$\leq \|f(\sigma(t))\|\varepsilon_1|\mu(\sigma(t), s)| + (\|g(t)\| + \varepsilon_3)\varepsilon_2|\mu(\sigma(t), s)| + \|f^\Delta(t)\|\varepsilon_3|\mu(\sigma(t), s)|$
$\leq \varepsilon|\mu(\sigma(t), s)|$. ■

Nr. 97 (Satz) Invertierungsregel (Quotientenregel)

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $\mathcal{X}$ Banachalgebra, $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ eine in $t \in \mathbb{T}^\kappa$ differenzierbare Funktion, so dass $f(s)$ für alle $s \in \mathbb{T}$ invertierbar ist.

Dann ist auch die Funktion $g\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ mit $\forall\, t \in \mathbb{T}\ g(t) := f(t)^{-1}$ im Punkt t differenzierbar und es gilt $g^\Delta(t) = -g(\sigma(t))f^\Delta(t)g(t)$.

Korollar. Ist die Banachalgebra kommutativ, ist t rechts-dicht ($\Leftrightarrow \sigma(t) = t$) und schreiben wir für das für das inverse Element x^{-1} von $x \in X$ stets $\frac{1}{x}$, so geht obige Formel offenbar über in die gewöhnliche Quotientenregel: $\frac{1}{f}^\Delta(t) = -\frac{1}{g(t)^2} f^\Delta(t)$

Beweis (vgl. [Hil 90, Theorem 2.6.(iii), S. 30]). Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann sei
$\varepsilon_1 := \begin{cases} 1 & \text{falls } \|g(\sigma(t))\|\|f^\Delta(t)\| = 0 \\ \frac{\varepsilon}{2\|g(\sigma(t))\|\|f^\Delta(t)\|} & \text{sonst} \end{cases}$, $\varepsilon_2 := \begin{cases} 1 & \text{falls } \|g(\sigma(t))\| = 0 \\ \frac{\varepsilon}{2\|g(\sigma(t))\|(\varepsilon_1 + \|g(t)\|)} & \text{sonst} \end{cases}$.
Es sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ positive Zahlen, und jeder Summand in
$\|g(\sigma(t))\|\varepsilon_2(\varepsilon_1 + \|g(t)\|) + \|g(\sigma(t))\|\varepsilon_1\|f^\Delta(t)\|$ ist kleinergleich $\frac{\varepsilon}{2}$, also gilt
(A) $\|g(\sigma(t))\|[\varepsilon_2(\varepsilon_1 + \|g(t)\|) + \varepsilon_1\|f^\Delta(t)\|] \le \varepsilon$.

Die Funktion q: $X \setminus \{0\} \longrightarrow X$, die jedes x ihres Definitionsbereichs dem zu x inversen Element x^{-1} zuordnet, ist bekanntlich stetig, so das auch $g = f^{-1} = q \circ f$ stetig ist. Es gibt also eine Umgebung U von t mit für alle $s \in U$:
(B) $\|g(t) - g(s)\| \le \varepsilon_1$
(C) $\|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)\mu(\sigma(t), s)\| \le \varepsilon_2|\mu(\sigma(t), s)|$
Mit Hilfe von (A), (B) und (C) schließt man, dass für alle $x \in U$ gilt:

$\|g(\sigma(t)) - g(s) - (-g(\sigma(t))f^\Delta(t)g(t))\mu(\sigma(t), s)\|$

$= \|g(\sigma(t)) - g(s) + g(\sigma(t))f^\Delta(t)g(t))\mu(\sigma(t), s)\|$

$= \|g(\sigma(t)) \cdot 1 - 1 \cdot g(s) + g(\sigma(t))f^\Delta(t)g(t))\mu(\sigma(t), s)\|$, das ist wegen $\forall\, x \in \mathbb{T}\ f(x)g(x) = 1$

$= \|g(\sigma(t)) \cdot f(s)g(s) - g(\sigma(t))f(\sigma(t)) \cdot g(s)$
$\quad + g(\sigma(t))f^\Delta(t)\mu(\sigma(t), s)g(s) - g(\sigma(t))f^\Delta(t)g(s)\mu(\sigma(t), s) + g(\sigma(t))f^\Delta(t)g(t))\mu(\sigma(t), s)\|$

$= \| - g(\sigma(t))[f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)\mu(\sigma(t), s)]g(s) \ + \ g(\sigma(t))f^\Delta(t)[g(t) - g(s)]\mu(\sigma(t), s)\|$

$\le \|g(\sigma(t)\| \ (\varepsilon_2|\mu(\sigma(t), s)|\|g(s)\| + \|f^\Delta(t)\|\varepsilon_1|\mu(\sigma(t), s)|)$

$= \|g(\sigma(t)\| \ (\varepsilon_2\|g(s)\| + \|f^\Delta(t)\|\varepsilon_1) \ |\mu(\sigma(t), s)|)$

$= \|g(\sigma(t)\| \ (\varepsilon_2\|g(s) - g(t) + g(t)\| + \|f^\Delta(t)\|\varepsilon_1 \ |\mu(\sigma(t), s)|)$

$\le \|g(\sigma(t)\| \ (\varepsilon_2|(\varepsilon_1 + g(t)) + \|f^\Delta(t)\|\varepsilon_1) \ |\mu(\sigma(t), s)| \le \varepsilon \ |\mu(\sigma(t), s|$. ■

Nr. 98 (Satz) Bewahrung der Differenzierbarkeit bei Vereinigung differenzierbarer Funktionen

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $\mathcal{X}$ Banachraum, $\tau \in \mathbb{T}$ nichtmaximal, $\mathbb{T}_1 := [-\infty, \tau]$ und $\mathbb{T}_2 := [\tau, \infty]$.
Sei $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$, und seien $f_1 = f|\mathbb{T}_1$ und $f_2 = f|\mathbb{T}_2$ differenzierbar, wobei gilt:
(*) Falls τ links-dicht ist, gilt $f_1^\Delta(\tau) = f_2^\Delta(\tau)$
(beachte $\tau \in \mathbb{T}_1^\kappa$, da τ links-dicht ist, und $\tau \in \mathbb{T}_2^\kappa$ wegen der Nichtmaximalität von τ)
Dann ist f differenzierbar, und für $t \in \mathbb{T}^\kappa$ gilt: $f^\Delta(t) = \begin{cases} f_1^\Delta(t) & \text{falls } t \in \mathbb{T}_1^\kappa \\ f_2^\Delta(t) & \text{falls } t \in \mathbb{T}_2^\kappa \end{cases}$

Beweis (vgl. [Hil 88, Satz 4.1., S. 28]). Zunächst ist f stetig: denn f_1 und f_2 sind als differenzierbare Funktionen stetig, stimmen auf dem Schnitt $\{\tau\}$ ihrer Definitionsbereiche überein und ihre Definitionsbereiche sind abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{T}$. — Sei nun $t \in \mathbb{T}^\kappa$.

$\boxed{\text{Sei } t \text{ rechts-zerstreut}}$. Dann folgt die Differenzierbarkeit von f in t sofort aus Satz 89.
Sei nun $i := \begin{cases} 2 & \text{falls } t \in \mathbb{T}_2 \\ 1 & \text{sonst, d. h. falls } t \in \mathbb{T}_1 \setminus \mathbb{T}_2 \end{cases}$
Es ist dann $t \in \mathbb{T}_i^\kappa$, denn im Fall $i = 2$ (also $t \in \mathbb{T}_2$) ist wegen der Rechts-Zerstreutheit von t der Punkt t in $\mathbb{T}$ nicht-maximal, also auch in $\mathbb{T}_2$ nicht-maximal, und im Fall $i = 1$ (also $t \in \mathbb{T}_1 \setminus \mathbb{T}_2$) ist t ein von τ verschiedenes, also nicht-maximales Element von $\mathbb{T}_1$.
Per Def von i ist $t \in \mathbb{T}_i$; es ist aber auch $\sigma(t) \in \mathbb{T}_i$: im Fall $i = 2$ folgt dies aus $\sigma(t) \geq t$, und im Fall $i = 1$ gilt $\tau > t$, also gilt für das Infimum $\sigma(t)$ der Zahlen, die größer als t sind, dass $\sigma(t) \leq \tau$ und damit $\sigma(t) \in \mathbb{T}_1$.
Da also $t, \sigma(t) \in \mathbb{T}_i$, gilt $f(t) = f_i(t)$ und $f(\sigma(t)) = f_i(\sigma(t))$; außerdem ist t auch in $\mathbb{T}_i$ ein rechts-zerstreuter Punkt. Somit folgt aus Satz 89:

(A) $f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu^*(t)} = \frac{f_i(\sigma(t)) - f_i(t)}{\mu^*(t)} = f_i^\Delta(t).$

Falls nun $t \in \mathbb{T}_2^\kappa$, ist $t \in \mathbb{T}_2$, also $i = 2$, und (A) zeigt, dass $f^\Delta(t) = f_2^\Delta(t)$.
Falls aber $t \in \mathbb{T}_1^\kappa$, ist entweder $t \in \mathbb{T}_1 \setminus \mathbb{T}_2$ oder $t = \tau$.
Im ersten Fall ($t \in \mathbb{T}_1 \setminus \mathbb{T}_2$) ist $i = 1$ und (A) zeigt, dass $f^\Delta(t) = f_1^\Delta(t)$.
Im zweiten Fall ($t = \tau$) ist τ wegen $\tau \in \mathbb{T}_1^\kappa$ ein nicht-maximales Element oder links-dichtes Maximum von $\mathbb{T}_1$. Da ersteres falsch ist (τ ist ja Maximum von $\mathbb{T}_1$), ist τ links-dicht in $\mathbb{T}_1$ und daher auch in $\mathbb{T}$. Dann zeigt die Voraussetzung (*), dass $f_1^\Delta(t) = f_2^\Delta(t)$, und wegen (A) ist letzteres $= f^\Delta(t)$, also gilt wieder $f^\Delta(t) = f_1^\Delta(t)$.

$\boxed{\text{Sei } t \text{ rechts-dicht oder maximal}}$. Wenn $t \neq \tau$, ist die Beh trivial. Sei also $t = \tau$.
Wegen der Nichtmaximalität von τ ist dann τ rechts-dicht.
Sei τ zugleich links-dicht, so ist $\tau \in \mathbb{T}_1^\kappa \cap \mathbb{T}_2^\kappa$ und die Vereinigung einer $\mathbb{T}_1$-Umgebung von τ und einer $\mathbb{T}_2$-Umgebung von τ ist eine $\mathbb{T}$-Umgebung von τ; daher folgt die Behauptung mit (*) direkt aus der Definition der Ableitung.
Ist aber τ links-zerstreut oder minimal, so ist $t \in \mathbb{T}_2^\kappa$ und $t \notin \mathbb{T}_1^\kappa$, und jede $\mathbb{T}_2$-Umgebung von t auch eine $\mathbb{T}$-Umgebung; die Behauptung folgt dann aus der Definition der Ableitung. ■

4.2 Vordifferenzierbarkeit und darauf aufbauende Sätze

Nr. 99 (Def) Vordifferenzierbarkeit

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $\mathcal{X}$ Banachraum, D eine Menge und $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ eine Funktion.
f ist mit D *vordifferenzierbar* $:\Leftrightarrow$

1. $D \subseteq \mathbb{T}^\kappa$
2. $\mathbb{T}^\kappa \setminus D$ ist abzählbar (also endlich oder abzählbar unendlich)
3. Alle $t \in \mathbb{T}^\kappa \setminus D$ sind nicht rechts-zerstreut (also maximal oder rechts-dicht)
4. f ist stetig
5. f ist in jedem Punkt $t \in D$ differenzierbar

Nr. 100 (Satz) Vordifferenzierbarkeit und globale Differenzierbarkeit

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $\mathcal{X}$ Banachraum und $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$. Dann gilt:

f ist global differenzierbar $\Leftrightarrow$ f ist mit $\mathbb{T}^\kappa$ vordifferenzierbar.

Beweis. Zu $\Rightarrow$. Die Bedingung (1) der Vordifferenzierbarkeit mit $\mathbb{T}^\kappa$ gilt wegen $\mathbb{T}^\kappa \subseteq \mathbb{T}^\kappa$. Die Bedingungen (2) und (3) gelten wegen $\mathbb{T}^\kappa \setminus \mathbb{T}^\kappa = \emptyset$ und der Leermengen-Konvention für All-Aussagen. Bedingung (4) gilt wegen Satz 90, und Bedingung (5) folgt aus Def 84.
Zu $\Leftarrow$. Die globale Differenzierbarkeit folgt aus Bedingung (5). ■

Nr. 101 (Satz) Vordifferenzierbarkeit komplexer und mehrdimensionaler Funktionen

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $g\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{K}^n$ und D Menge.
Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei die i-te Komponentenfunktion von g mit g_i abgekürzt. Dann gilt:

f ist mit D vordifferenzierbar $:\Leftrightarrow$ $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ sind mit D vordifferenzierbar

g ist mit D vordifferenzierbar $:\Leftrightarrow$ Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist g_i mit D vordifferenzierbar

Beweis. Bezüglich Bedingung (4) der Vordifferenzierbarkeit ist zu beachten: eine komplexe Funktion ist genau dann stetig, wenn ihr Real– und Imaginärteil stetig ist; eine mehrdimensionale Funktion ist genau dann stetig ist, wenn ihre Komponenten stetig sind.
Bezüglich Bedingung (5) beachte Sätze 92(2) und 93(2) die Behauptung.
Mit diesen Beobachtungen ist die Behauptung trivial. ■

Nr. 102 (Satz) Mittelwertsatz für Maßketten

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $\mathcal{X}$ Banachraum,
sei $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ und $g\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ vordifferenzierbar mit D und $\forall\, t \in D$ $\|f^{\Delta}(t)\| \leq g^{\Delta}(t)$.

Es gilt dann für alle $r, s \in \mathbb{T}$ mit $r \leq s$: $\|f(s) - f(r)\| \leq g(s) - g(r)$.

Beweis nach [Hil 90, Theorem 3.2., S. 31-32]. Wegen der Abzählbarkeit der Menge $\mathbb{T}^{\kappa} \setminus D$ ist auch deren Teilmenge $[r, s[\setminus D$ abzählbar. Also gibt es eine surjektive Funktion $h\colon \mathbb{N} \longrightarrow [r, s[\setminus D$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir zeigen per Induktionsprinzip (Satz 42), dass für alle $t \in [r, s]$ die Aussage

$A(t) : \|f(t) - f(r)\| \leq g(t) - g(r) + \varepsilon(\mu(t, r) + \sum_{h(n)<t} 2^{-n})$

wahr ist. Insbesondere gilt sie dann für $t = s$, und zwar für jedes ε. Da $\mu(t, s) + \sum_{h(n)<s} 2^{-n}$ als Funktion von ε konstant ist, konvergiert für $\varepsilon \to 0$ der Summand $\varepsilon(\mu(t, r) + \sum_{h(n)<t} 2^{-n})$ gegen Null, woraus die Behauptung folgt.

$\boxed{\text{IA}}$. Die Beh geht für $t = r$ über in $\|f(r) - f(r)\| \leq g(r) - g(r) + \varepsilon(\mu(r, r) + \sum_{h(n)<r} 2^{-n})$, d. h. in $0 \leq \varepsilon(0 + \sum_{h(n)<r} 2^{-n})$. Das trifft zu, weil die rechte Seite nichtnegativ ist.

$\boxed{\text{PP}}$. Nach Voraussetzung gilt die Behauptung für ein rechts-zerstreutes $t \in [r, s[$.
Wegen Bedingung (3) der Vordifferenzierbarkeit ist $t \in D$ und nach Satz 89 gilt
$f(\sigma(t)) - f(t) = f^{\Delta}(t)\mu^*(t)$ und $g(\sigma(t)) - g(t) = g^{\Delta}(t)\mu^*(t)$. Mit diesen Gleichungen, der Voraussetzung $\|f^{\Delta}(t)\| \leq g^{\Delta}(t)$ und der Nichtnegativität der Körnigkeit (Satz 72) folgt
$\|f(\sigma(t)) - f(t)\| = \|f^{\Delta}(t)\||\mu^*(t)| = \|f^{\Delta}(t)\|\mu^*(t) \leq g^{\Delta}(t)\mu^*(t) = g(\sigma(t)) - g(t)$.
Mit dieser Ungleichung und der Voraussetzung $A(t)$ folgt schließlich
$\|f(\sigma(t)) - f(r)\| = \|f(\sigma(t)) - f(t) + f(t) - f(r)\| \leq \|f(\sigma(t) - f(t)\| + \|f(t) - f(r)\|$
$\leq g(\sigma(t)) - g(t) + g(t) - g(r) + \varepsilon(\mu(t, r) + \sum_{h(n)<t} 2^{-n})$
$= g(\sigma(t)) - g(r) + \varepsilon(\mu(t, r) + \sum_{h(n)<t} 2^{-n})$, und wegen $\sum_{h(n)<t} 2^{-n} \leq \sum_{h(n)<\sigma(t)} 2^{-n}$
ist letzteres $\leq g(\sigma(t)) - g(r) + \varepsilon(\mu(t, r) + \sum_{h(n)<\sigma t} 2^{-n})$.

$\boxed{\text{PU}}$. Nach Voraussetzung gilt die Behauptung für ein rechts-dichtes $t \in [r, s[$.
Es gilt also $\sigma(t) = t < s$. Wir unterscheiden die Fälle $t \in D$ und $t \notin D$.

$\boxed{\text{Fall 1}}$. Sei $t \in D$. Dann sind f, g in t differenzierbar, so dass es eine Umgebung U on t gibt mit für alle $p \in U$ (unter Beachtung von $\sigma(t) = t$):
(A) $\|f(t) - f(p) - f^{\Delta}(t)\mu(t, p)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}|\mu(t, p)|$, und
(B) $|g(t) - g(p) - g^{\Delta}(t)\mu(t, p)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|\mu(t, p)|$.
Wegen der umgekehrten Dreiecksungleichung
$\|f(t) - f(p)\| - \|f^{\Delta}(t)\mu(t, p)\| \leq \|f(t) - f(p) - f^{\Delta}(t)\mu(t, p)\|$ folgt aus (A) die Ungleichung
(C) $\|f(p) - f(t)\| \leq (\|f^{\Delta}(t)\| + \frac{\varepsilon}{2})|\mu(t, p)| = (\|f^{\Delta}(t)\| + \frac{\varepsilon}{2})|\mu(p, t)|$

Aus (B) folgt $g(t) - g(p) - g^{\Delta}(t)\mu(t, p) \leq \frac{\varepsilon}{2}|\mu(t, p)|$ und mit Satz 66(3) folgt

$g^\Delta(t)\mu(p,t) = -g^\Delta(\mu(t,p) \leq g(p) - g(t) + \frac{\varepsilon}{2}|\mu(t,p)| = g(p) - g(t) + \frac{\varepsilon}{2}|\mu(p,t)|$, also
(D) $g^\Delta(t)\mu(p,t) \leq g(p) - g(t) + \frac{\varepsilon}{2}|\mu(p,t)|$

Für alle $p \in U$ mit $p > t$ (also mit $|\mu(p,t)| = \mu(p,t)$ wegen Satz 67(3)) folgt mit Blick auf die Voraussetzung $\|f^\Delta(t)\| \leq g^\Delta(t)$ aus (C) und (D):

$\|f(p) - f(t)\| \leq (\|f^\Delta(t)\| + \frac{\varepsilon}{2})\mu(p,t) \leq (g^\Delta(t) + \frac{\varepsilon}{2})\mu(p,t) = g(p) - g(t) + \varepsilon\mu(p,t)$. Da $\sum_{t\leq h(n)<p} 2^{-n}$ nichtnegativ ist, folgt insgesamt
$\|f(p) - f(t)\| \leq g(p) - g(t) + \varepsilon(\mu(p,t) + \sum_{t\leq h(n)<p} 2^{-n})$.

$\boxed{\text{Fall 2}}$. Sei $t \notin D$, also $t \in [r,s[\setminus D$. Es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $t = h(m)$. Wegen der Stetigkeit von f und g im Punkt t gibt es eine Umgebung U von t mit für alle $p \in U$:
(E) $\|f(p) - f(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}2^{-m}$ und
(F) $\|g(p) - g(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}2^{-m}$.

Aus (F) folgt $-\frac{\varepsilon}{2}2^{-m} \leq g(p) - g(t)$ und somit
(G) $0 \leq g(p) - g(t) + \frac{\varepsilon}{2}2^{-m}$

und indem wir (G) zu (E) addieren, erhalten wir
$\|f(p) - f(t)\| \leq g(p) - g(t) + \varepsilon 2^{-m}$. Falls $p > t$, ist nun $2^{-m} \leq \sum_{t\leq h(n)<p} 2^{-n}$; außerdem ist für diese p die Zahl $\mu(p,t)$ nichtnegativ (Satz 67(3)). Für diese p folgt also
$\|f(p) - f(t)\| \leq g(p) - g(t) + \varepsilon(\mu(p,t) + \sum_{t\leq h(n)<p} 2^{-n})$.

$\boxed{\text{In beiden Fällen}}$ existiert also eine Umgebung U von t mit für alle $p \in U$ mit $p > t$:
$\|f(p) - f(t)\| \leq g(p) - g(t) + \varepsilon(\mu(p,t + \sum_{t\leq h(n)<p} 2^{-n})$.

Da $A(t)$ nach Voraussetzung gilt, folgt nun:
$\|f(p) - f(r)\| = \|f(p) - f(t)\| + \|f(t) - f(r)\|$

$\leq g(p) - g(t) + \varepsilon(\mu(p,t) + \sum_{t\leq h(n)<p} 2^{-n}) \;+\; g(t) - g(r) + \varepsilon(\mu(t,r) + \sum_{h(n)<t} 2^{-n})$

$= g(p) - g(r) + \varepsilon(\mu(p,r) + \sum_{h(n)<p} 2^{-n})$, also gilt $A(p)$.

$\boxed{\text{VP}}$. Nach Voraussetzung ist t links-dicht und es gilt für alle $\tau \in [r,t[$:
$\|f(\tau) - f(r)\| \leq g(\tau) - g(r) + \varepsilon(\mu(\tau,r) + \sum_{h(n)<\tau} 2^{-n})$. Wegen $t > \tau$ gilt erst recht:
(H) $\|f(\tau) - f(r)\| \leq g(\tau) - g(r) + \varepsilon(\mu(\tau,r) + \sum_{h(n)<t} 2^{-n})$.

Sei c die Konstante $\sum_{h(n)<t} 2^{-n}$, und betrachte die Funktion k: $[r,t] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit für alle $\tau \in [r,t]$: $k(\tau) = g(\tau) - g(r) + \varepsilon(\mu(\tau,r) + c) - \|f(\tau) - f(r)\|$. Diese ist stetig und für alle $\tau \in [r,t[$ gilt wegen (H), dass $k(\tau)$ nichtnegativ ist.

Angenommen, $k(t) < 0$, gäbe es eine Umgebung V von $k(t)$, deren Elemente alle negativ sind; zu dieser gäbe es eine U Umgebung von t, die k in V hinein abbildet. In U gibt es wegen der Links-Dichtheit nach Satz 36 ein $\tau < t$; also wäre $k(\tau) \in V$ und somit negativ ($\lightning$). Die Annahme ist also falsch und es gilt $k(t) \geq 0$. Daraus folgt

$\|f(t)-f(r)\| \leq g(t)-g(r)+\varepsilon(\mu(t,r)+\sum_{h(n)<t} 2^{-n})$, d. h. $A(t)$. ■

Nr. 103 (Satz) Abschätzung für $\|f(t_2)-f(t_1)\|$

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow X$ vordifferenzierbar mit der Menge D.
Sei M obere Schranke von $\|f^\Delta\|$, d.h. reelle Zahl mit $\forall\, t \in D \;\; \|f^\Delta(t)\| \leq M$.

Für alle $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$ gilt dann: $\|f(t_2)-f(t_1)\| \leq M|\mu(t_2,t_1)|$

Beweis. Wegen $\|f(t_2)-f(t_1)\| = \|f(t_1)-f(t_2)\|$ und $|\mu(t_2,t_1)| = |\mu(t_1,t_2)|$ genügt es, die Behauptung für den Fall $t_2 \geq t_1$ zu beweisen. Mit Blick auf Satz 67(3) ist in diesem Fall $|\mu(t_2,t_1)| = \mu(t_2,t_1)$, zu zeigen ist also: $\|f(t_2)-f(t_1)\| \leq M\mu(t_2,t_1)$.
Sei g die Funktion $g\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\forall\, t \in \mathbb{T} \;\; g(t) = M\mu(t,t_1)$. Diese ist mit D vordifferenzierbar (siehe Sätze 68, 88, 94), und nach den letzten beiden Sätzen gilt für alle $t \in D$: $g^\Delta(t) = M$, also $\|f^\Delta(t)\| \leq M = g^\Delta(t)$. Die Anwendung des Mittelwertsatzes auf f und g ergibt dann $\|f(t_2)-f(t_1)\| \leq M\mu(t_2,t_1) - M\mu(t_1,t_1) = M\mu(t_2,t_1)$. ■

Nr. 104 (Satz) Hinreichendes Kriterium für Konstanz

Ist $\mathbb{T}$ Maßkette, $\mathcal{X}$ Banachraum, $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ vordifferenzierbar mit D und $\forall\, t \in D \;\; \|f^\Delta(t)\| = 0$, so ist f konstant.

Beweis. Man kann in Satz 103 über Abschätzung für $\|f(t_2)-f(t_1)\|$ nach Voraussetzung $M = 0$ setzen. Dann folgt für $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$, dass $\|f(t_2)-f(t_1)\| = 0$, also $f(t_1) = f(t_2)$. ■

Nr. 105 (Satz) Vertauschung von Grenzwertbildung und Differentiation

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $\mathcal{X}$ Banachraum, D Menge und $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow X$.
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von mit D vordifferenzierbaren Funktionen $f_n\colon \mathbb{T} \longrightarrow X$.
Zu jedem $t \in \mathbb{T}^\kappa$ gebe es eine kompakte Intervall-Umgebung U_t von t, so dass $(f_n^\Delta(t))_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $U_t \cap D$.

1. *Konvergiere $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem Punkt $\tau \in U_t$ $(t \in \mathbb{T}^\kappa)$.*
   Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig in der ganzen Umgebung U_t.
2. *Wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem Punkt $\tau \in \mathbb{T}$ konvergiert, konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in jedem Punkt $t \in \mathbb{T}$ gegen ein $f(t)$ (und konvergiert dann wegen (1) sogar gleichmäßig in jedem U_t). Es ist also die Grenzfunktion $f := \lim_{n\to\infty} f$ wohldefiniert.*
3. *f ist vordifferenzierbar mit D und für jedes $t \in D$ gilt: $f^\Delta(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n^\Delta(t)$*

Beweis nach [Hil 90, Theorem 3.4., S. 32-34]. Die Funktionenfolge $(f_n^\Delta)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf $U_t \cap D$ gleichmäßig; wenn $\sigma(t) \in D$, konvergiert sie außerdem im Punkt $\sigma(t)$ [denn sie konvergiert auf $U_{\sigma(t)} \cap D$]. Daraus folgt, wenn U_t' die kompakte Umgebung $U_t \cup \{\sigma(t)\}$ von t bezeichnet, dass die Funktionenfolge auf $U_t' \cap D$ gleichmäßig konvergiert. Das gilt auch, wenn $\sigma(t) \notin D$, dann ist nämlich $U_t' \cap D = (U_t \cup \{\sigma(t)\}) \cap D$ nichts anderes als $U_t \cap D$. Aus diesem Grund können wir die Umgebungen U_t stets derartig wählen, dass immer $\sigma(t) \in U_t$ ist.

Zu (1). Wegen der vorausgesetzten gleichmäßigen Konvergenz von $(f_n^\Delta)_{n\in\mathbb{N}}$ im U_t gilt:
$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq n_0\ \forall\ s \in U_t \cap D\ \|f_n^\Delta(s) - f(s)\| < \varepsilon$, also auch
$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ m, n \geq n_0\ \forall\ s \in U_t \cap D\ \|f_n^\Delta(s) - f_m^\Delta(s)\| \leq \|f_n^\Delta(s) - f(s)\| +$ $\|f(s) - f_m^\Delta(s)\| < 2\varepsilon$. Wenn m, n größergleich einem hinreichend großen n_0 sind, ist also $\sup\limits_{s\in U_t\cap D} \|(f_n^\Delta - f_m^\Delta)(s)\|$ reell und kann unter jede positive Schranke ε gedrückt werden.

Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung und Satz 103 gilt für $m, n \geq n_0$ und $r, \rho \in U_t$, wenn wir $M = \sup\limits_{s\in U_t\cap D} \|(f_n^\Delta - f_m^\Delta)(s)\|$ setzen (so dass nach Satz 94 gilt $M = \sup\limits_{s\in U_t\cap D} \|(f_n - f_m)^\Delta(s)\|$):
(A) $\|f_n(r) - f_m(r)\| - \|f_n(\rho) - f_m(\rho)\| \leq \|(f_n(r) - f_m(r)) - (f_n(\rho) - f_m(\rho))\|$
$= \|(f_n - f_m)(r) - (f_n - f_m)(\rho)\| \leq M|\mu(r, \rho)|$

Wegen Satz 67(1) und 67(2) (und weil das kompakte Intervall U_t Maximum und Minimum besitzt), ist $\mu(r, \rho) \leq \mu(\max U_t, \min U_t)$, ebenso $-\mu(\rho, \tau) = \mu(\tau, \rho) \leq \mu(\max U_1, \min U_t)$, insgesamt also $|\mu(\rho, \tau)| \leq \mu(\max U_t, \min U_t)$. Mit dieser Ungleichung und (A) folgt
$\forall\ r, \rho \in U_t\ \ \|f_n(r) - f_m(r)\| - \|f_n(\rho) - f_m(\rho)\| \leq M\mu(\max U_t, \min U_t)$,
daraus folgt (mit $\rho = \tau$), dass
(B) $\forall\ r \in U_t\ \ \|f_n(r) - f_m(r)\| \leq \|f_n(\tau) - f_m(\tau)\| + M\mu(\max U_t, \min U_t)$.

Nun konvergiert $(f_n(\tau))$, ist also eine Cauchyfolge. Wird daher m, n größergleich einem hinreichend großes n_0 gewählt, so ist $\|f_n(\tau) - f_m(\tau)\|$ kleiner als eine beliebige vorgegebene positive Zahl ε. Das gleiche gilt, wie schon festgestellt, für $M := \sup\limits_{s\in U_t\cap D} \|(f_n^\Delta - f_m^\Delta)(s)\|$, und somit für die gesamte rechte Seite von (B). Da $\mathcal{X}$ vollständig ist, beweist dies die Konvergenz von $(f_n(r))$.
Somit konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in U_t punktweise. Da aber die Wahl von n_0 (um die rechte Seite von B unter ein vorgegebenes ε zu drücken), von r unabhängig erfolgt (denn r kommt gar nicht auf der rechten Seite vor), liegt sogar gleichmäßige Konvergenz vor. Damit ist (1) bewiesen.

Zu (2). Für zeigen zunächst per Induktionsprinzip die Konvergenz in jedem $t \in [\tau, \infty[$.

$\boxed{\text{IA}}$. Die Konvergenz von $(f_n(\tau))_{n\in\mathbb{N}}$ ist in der Behauptung vorausgesetzt.

$\boxed{\text{PP}}$. Sei t rechts-zerstreut, also $t \in D$. Es gilt dann wegen Satz 89 $f_n(\sigma(t)) = f_n(t) + f_n^\Delta(t)\mu^*(t)$. Da nach Voraussetzung $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, konvergiert die rechte Seite der letzten Gleichung, also konvergiert auch die linke Seite, das heißt $(f_n(\sigma(t)))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

$\boxed{\text{PU}}$. Dies folgt aus (1).

$\boxed{\text{VP}}$. Dies folgt auch aus (1), da es für links-zerstreutes t in U_t ein s mit $s < t$ gibt.

Die Konvergenz für jedes $t \in]-\infty, \tau]$ folgt ebenfalls per Induktionsprinzip, aber bezogen auf die duale Zeitkette: das Intervall $]-\infty, \tau]$ in der hier betrachteten Zeitkette ist ja gleich dem Intervall $[\tau, \infty[$ in der dualen Zeitkette. (IA), (PU), (UP) folgen dort ganz entsprechend zu der oben gezeigten Anwendung des Induktionsprinzips.
Bleibt nur noch (PP) zu zeigen. Sei t bezüglich der dualen Zeitkette rechts-zerstreut, also links-zerstreut. Dann ist $\rho(t)$ rechts-zerstreut, also $\in D$. Es gilt dann wegen Satz 89 $f_n(t) = f_n(\rho(t)) + f_n^\Delta(\rho(t))\mu^*(\rho(t))$, also $f_n(\rho(t)) = f_n(t) - f_n^\Delta(\rho(t))\mu^*(\rho(t))$. Da nach Voraussetzung $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, konvergiert die rechte Seite der letzten Gleichung, also konvergiert auch die linke Seite, das heißt $(f_n(\rho(t)))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, das ist aber $= (f_n(\sigma(t)))_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich der dualen Zeitkette.

Zu (3). Da die Funktionenfolge für jedes $t \in \mathbb{T}$ auf U_t gleichmäßig konvergiert, ist die Einschränkung der Grenzfunktion auf U_t jeweils stetig, also ist die Grenzfunktion in t stetig. Sei g: $D \longrightarrow X$ mit $\forall\, t \in D\ g(t) := \lim\limits_{n\to\infty} f^\Delta(t)$. Zu zeigen bleibt nur $\forall\, t \in D\ g(t) = f^\Delta(t)$.

Sei nun $t \in D$ und $\varepsilon > 0$. Aus dem Beweis von Teil (1) folgt, dass für m, n größergleich einem hinreichend großen n_1 gilt: $\sup\limits_{s\in U_t\cap D} |f_n^\Delta(s) - f_m^\Delta(s)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Setzen wir nun in Ungleichung (A) für ρ das Element $\sigma(t)$ ein (beachte, dass wir anfangs $\sigma(t) \in U_t$ vorausgesetzt haben), so folgt für alle $r \in U_t$ und $m, n \geq n_1$:

$$\|(f_n(r) - f_m(r)) - (f_n(\sigma(t)) - f_m(\sigma(t)))\| \leq \sup_{s\in U_t\cap D} \|f_n^\Delta(s) - f_m^\Delta(s)\||\mu(r, \sigma(t))| \leq \tfrac{\varepsilon}{3}|\mu(r, \sigma(t))|$$

Lassen wir auf beiden Seiten $m \to \infty$ gehen, folgt für alle $n \geq n_1$ und $r \in U_t$:
$\|(f_n(r) - f(r)) - (f_n(\sigma(t)) - f(\sigma(t)))\| \leq \frac{\varepsilon}{3}|\mu(r, \sigma(t))|$ oder
(C) $\|(f(\sigma(t)) - f(r)) - (f_n(\sigma(t)) - f_n(r))\| \leq \frac{\varepsilon}{3}|\mu(r, \sigma(t))|$

Wegen $g(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n^\Delta(t)$ gibt es ein $j \geq n_1$ mit
(D) $\|f_j^\Delta(t) - g(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Für dieses j gilt also gemäß (C) für alle $r \in U_t$:
(E) $\|(f(\sigma(t)) - f(r)) - (f_j(\sigma(t)) - f_j(r))\| \leq \frac{\varepsilon}{3}|\mu(r, \sigma(t))|$

Schließlich gibt es wegen der Differenzierbarkeit von f_j in t eine Umgebung W von t mit für alle $r \in W$:
(F) $\|f_j(\sigma(t)) - f_j(r) - f_j^\Delta(r)(t)\mu(\sigma(t), r)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}|\mu(r, \sigma(t))|$

Insgesamt folgt aus (D), (E), und (F) für $r \in U_t \cap W$:
$\|f(\sigma(t)) - f(r) - g(t)\mu(\sigma(t), r)\|$
$\leq \|(f(\sigma(t)) - f(r)) - (f_j(\sigma(t)) - f_j(r))\| + \|f_j(\sigma(t)) - f_j(r) - f_j^\Delta(t)\mu(\sigma(t), r)\|$
$+\|(f_j^\Delta(t) - g(t))\mu(\sigma(t), r)\|$
$\leq (\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3})|\mu(\sigma(t), r)| \leq \varepsilon|\mu(\sigma(t), r)|$, so dass $g(t)$ die Ableitung von f an der Stelle t ist. ■

5 Vorbereitung der Integrationstheorie

5.1 Sprungstetigkeit und rd-Stetigkeit

Nr. 106 (Def) Sprungstetigkeit (Regelfunktionen) und $\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$

f ist *sprungstetige Funktion* (*Regelfunktion*) von einer Maßkette $\mathbb{T}$ in einen Banachraum $\mathcal{X}$
$:\Leftrightarrow$ in jedem links-dichten Punkt $t \in \mathbb{T}$ existiert der linksseitige Grenzwert $f(t-)$
und in jedem rechts-dichten Punkt $t \in \mathbb{T}$ der rechtsseitige Grenzwert $f(t+)$

Bem. In der Def des links- bzw. rechtsseitigen Grenzwertes in t ist vorausgesetzt, dass t Häufungspunkt von $\mathbb{T}^{<t}$ bzw. $\mathbb{T}^{>t}$ ist, was für links- bzw. rechts-dichtes t trivialerweise gilt.

$\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ bezeichne die Menge der Regelfunktionen von $\mathbb{T}$ in X.

Nr. 107 (Satz) $\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ als Untervektorraum von $\mathcal{B}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$

Für beschränkte Maßketten $\mathbb{T}$ und Banachräume $\mathcal{X}$ ist $\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ Unterraum des Banachraums $\mathcal{B}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ der beschränkten Funktionen von $\mathbb{T}$ in X.

Beweis (vgl. [Ama 99, Bem 1.1(d), S. 5]). Angenommen, $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ ist nicht beschränkt. Dann gibt es eine Folge (t_n) in $\mathbb{T}$ mit (A) $\|f(t_n)\| \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(A) impliziert, dass es eine injektive Teilfolge von (t_n) gibt; diese nennen wir wieder (t_n) und es gilt nach diesem Bezeichnungswechsel immer noch (A). Wegen der Beschränktheit von $\mathbb{T}$ ist der Träger von $\mathbb{T}$ gleich $[\min \mathbb{T}, \max \mathbb{T}]$, also $\mathbb{T}$ kompakt. Per Metrisierbarkeit von $\mathbb{T}$ gibt es daher eine Teilfolge von (t_n), die wir wieder (t_n) nennen, die gegen ein $t \in \mathbb{T}$ konvergiert. Wegen der Injektivität, die sich auf die Teilfolge überträgt, haben unendlich viele Folgenglieder einen von t verschiedenen Wert. Dann sind unendlich viele $< t$ oder unendlich viele $> t$. Also können wir nochmals eine Teilfolge bilden, die wir auch wieder (t_n) nennen, die isoton oder antiton ist und gegen t konvergiert. Nach wie vor gilt (A), und t ist dann Häufungspunkt von $\mathbb{T}^{\geq t}$ bzw. $\mathbb{T}^{\leq t}$, also rechts-dichter bzw. links-dichter Punkt. Wegen der Sprungstetigkeit strebt also $(f(t_n))$ gegen den rechts- bzw. linksseitigen Grenzwert g von f an der Stelle t. Wegen der Stetigkeit der Normfunktion strebt dann $(\|f(t_n)\|)$ gegen $\|g\|$. Nun ist aber letztere Folge als konvergente Folge beschränkt im Widerspruch zu (A). $\lightning$
Die Annahme ist also falsch, und die Regelfunktionen bilden eine Teilmenge von $\mathcal{B}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$. Mit Blick auf die Linearität des Grenzwertes bilden sie sogar einen Untervektorraum. ■

Nr. 108 (Def) rd-Stetigkeit und $\mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$

f ist *rechts-dicht-stetige* (*rd-stetige*) Funktion von einer Maßkette $\mathbb{T}$ in einen Banachraum $\mathcal{X}$
$:\Leftrightarrow$ in jedem rechts-dichten oder maximalen $t \in \mathbb{T}$ ist g stetig,
und für jedes links-dichte $t \in \mathbb{T}$ existiert $f(t-)$.

$\mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ bezeichne die Menge der rd-stetigen Funktionen von $\mathbb{T}$ in X.

Nr. 109 (Satz) Zusammenhang der vorgenannten Begriffe

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $\mathcal{X}$ Banachraum und f Funktion von $\mathbb{T}$ in $\mathcal{X}$.

1. *f ist stetig $\Rightarrow$ f ist rd-stetig $\Rightarrow$ f ist Regelfunktion.*
2. *Die erste Implikation von (1) ist umkehrbar, wenn $\mathbb{T}$ keine Punkte enthält, die zugleich links-dicht und rechts-zerstreut sind.*
3. *Wenn $\mathbb{T}$ diskret geordnet ist, treffen alle drei Aussagen von (1) zu.*

Beweis. (1a). Wir zeigen: f ist stetig $\Rightarrow$ f ist rd-stetig. Sei f stetig. Zu zeigen ist, dass für links-dichtes t der linksseitige Grenzwert $f(t-)$ existiert. Sei V Umgebung von $f(t)$. Dann ist zu zeigen, dass es im Unterraum $\mathbb{T}' :=]-\infty, t]$ von $\mathbb{T}$ eine Umgebung U' von t gibt mit $f[U' \setminus \{t\}] \subseteq V$. Wegen der Stetigkeit von f in t existiert eine Umgebung U von t im Raum $\mathbb{T}$ mit $f[U] \subseteq V$. Man kann als U' also einfach die Spur $U \cap \mathbb{T}'$ von U im Raum $\mathbb{T}'$ nehmen.

(1b). Wir zeigen: f ist rd-stetig $\Rightarrow$ f ist Regelfunktion. Sei f rd-stetig, insbesondere stetig in allen rechts-dichten Punkten. Zu zeigen ist, dass für jedes rechts-dichte t der rechtsseitige Grenzwert $f(t+)$ existiert. Einen Beweis hierfür erhält man, wenn man im Teil (1a) dieses Beweises „rechts“ durch „links“ und $]-\infty, t]$ durch $[t, \infty[$ ersetzt.

(2). Sei f rd-stetig. Zu zeigen ist, dass f in allen rechts-zerstreuten Punkten t stetig ist. Da es nach Voraussetzung keine Punkte gibt, die zugleich links-dicht und rechts-zerstreut sind, ist ein solches t entweder rechts-zerstreut und links-zerstreut, oder rechts-zerstreut und minimal. In beiden Fällen ist $U := \{t\}$ eine Umgebung von t und für jede Umgebung V von $f(t)$ ist dann $f[U] = \{t\} \subseteq V$, so dass in der Tat f in t stetig ist.

(3). Wegen (1) brauchen wir nur die Stetigkeit von f zeigen. Ist nun $\mathbb{T}$ diskret geordnet, so folgt aus (Def 19), dass alle nichtminimalen Punkte links-zerstreut und alle nichtmaximalen Punkte rechts-zerstreut sind. Dann ist zu jedem $t \in \mathbb{T}$ die Menge $U := \{t\}$ eine Umgebung von t, und zu jeder Umgebung V von $f(t)$ ist dann $f[U] = \{t\} \subseteq V$. ■

Nr. 110 (Satz) $\mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ als Untervektorraum von $\mathcal{R}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ und somit von $\mathcal{B}(\mathbb{T},\mathcal{X})$

1. *Für beschränkte Maßketten $\mathbb{T}$ und Banachräume $\mathcal{X}$ ist $\mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ Unterraum von $\mathcal{R}(\mathbb{T},\mathcal{X})$.*
2. *(Unmittelbares Korollar) Da $\mathcal{R}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ Untervektorraum von $\mathcal{B}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ ist (Satz 107), ist erst recht $C_{rd}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ Untervektorraum von $\mathcal{B}(\mathbb{T},\mathcal{X})$.*

Beweis. Nach Satz 109 bilden die rd-stetigen Funktionen eine Teilmenge von $\mathcal{R}(\mathbb{T},\mathcal{X})$, also im Blick auf die Linearität des Grenzwertes und der Stetigkeit einen Untervektorraum. ■

Nr. 111 (Satz) Konvergenzsatz für Komposition mit dem Sprungoperator

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette und $\mathcal{X}$ Banachraum.
Dann gilt für links-dichte bzw. rechts-dichte Punkte t:

Ist $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ eine Funktion, für welche der links- bzw. rechtsseitige Grenzwert $f(t\pm)$ existiert, so existiert auch $f(\sigma(t\pm))$, und es ist $f(t\pm) = f(\sigma(t\pm))$.

Beweis nach [Hil 90, Theorem 4.1.(i), S. 35]. Strebt (s_n) mit $\forall\ n\ s_n < t$ bzw. $s_n > t$ gegen t, gilt dies offenbar auch für $(\sigma(s_n))$, und nach Voraussetzung strebt $(f(\sigma(s_n))$ gegen t. ■

Nr. 112 (Satz) Bewahrung von Sprungstetigkeit und rd-Stetigkeit bei gleichmäßiger Konvergenz

1. *Ist $\mathbb{T}$ Maßkette, $\mathcal{X}$ Banachraum, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathcal{R}(\mathbb{T},b\mathcal{X})$ und strebt (f_n) gleichmäßig gegen f, so ist $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T},\mathcal{X})$.*
2. *In (1) darf man $\mathcal{R}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ durch $\mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T},\mathcal{B})$ ersetzt werden.*

Beweis. Zu (1). Wir zeigen für recht-dichtes t, dass f in t einen rechtsseitigen Grenzwert besitzt (die entsprechende Aussage für links-dichtes t folgt analog). Sei $\varepsilon > 0$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall\ n \geq n_0, s \in \mathbb{T}\ \ \|f_n(s) - f(s)\| < \frac{\varepsilon}{4}$. Da der rechtsseitige Grenzwert von f_{n_0} in t existiert, gibt es ein $U \in \mathfrak{U}(t)$ mit $\forall\ s \in U^{>t}\ \ f_{n_0}(s) \in \mathbb{B}_{\frac{\varepsilon}{2}} f_{n_0}(t)$, also
$\|f(s) - f_{n_0}(s)\| < \frac{\varepsilon}{4}$ (nach Wahl von n_0)
$\|f_{n_0}(s) - f_{n_0}(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ (nach Wahl von U)
$\|f_{n_0}(t) - f(t)\| < \frac{\varepsilon}{4}$ (nach Wahl von n_0), und per Dreiecksungleichung folgt
$\forall\ s \in U^{>t}\ \|f(s) - f(t)\| \leq \|f(s) - f_{n_0}(s)\| + \|f_{n_0}(s) - f_{n_0}(t)\| + \|f_{n_0}(t) - f(t)\| < \varepsilon.$

Zu (2). Wegen (1) ist nur noch zu zeigen, dass in rechts-dichten und maximalen Punkten t, in denen nach Voraussetzung dann alle f_n stetig sind, auch die Grenzfunktion stetig ist. Das folgt aber, weil die Stetigkeit bei gleichmäßiger Konvergenz erhalten bleibt. ■

Nr. 113 (Satz) Bewahrung von Sprungstetigkeit und rd-Stetigkeit unter verschiedenen Operationen

Seien $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ Banachräume,
seien $f, f_1, f_2\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ und $g\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{Y}$ sprungstetig.
Sei $n \in \mathbb{N}^{\odot}$ und für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei $r_i\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}_i$ sprungstetig und $h\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ stetig.
Sei $\cdot\colon \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z}$ eine Multiplikation zwischen $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ (vgl. Def 95).

1. *$f \circ \sigma$, $f_1 + f_2$, $f \cdot g$, $h \circ f$ sowie $r\colon \mathbb{T} \longrightarrow \prod_{i=1}^n \mathcal{X}_i$ mit $r(t) := (r_1(t), \ldots, r_n(t))$ sind sprungstetige Funktionen.*
2. *Aussage (1) bleibt wahr, wenn man „sprungstetig“ durch „rd-stetig“ ersetzt.*

Beweis. Zu (1). Nach Voraussetzung existiert in links/rechts-dichten Punkten t der links/rechtsseitige Grenzwert von f, f_1, f_2, g und jedem r_i. Nach Satz 111 und weil die Konvergenz unter Addition, Multiplikation, Komposition mit einer stetigen Funktion erhalten bleibt sowie Konvergenz von Funktionen in Produkträumen aus der Konvergenz der Komponenten folgt, existiert dann in t auch der links/rechtsseitige Grenzwert von $f \circ \sigma$, $f_1 + f_2$, $f \cdot g$, $h \circ f$ und r.

Zu (2). Wir haben jeweils noch die Stetigkeit von $f \circ \sigma$ bzw. $f_1 + f_2$ bzw. $f \cdot g$ bzw. $h \circ f$ bzw. r an jeder rechts-dichten oder maximalen Stelle $t \in \mathbb{T}$ nachzuweisen. Diese folgt sofort aus den bekannten Sätzen über Bewahrung der Stetigkeit unter den entsprechenden Operationen; lediglich für $f \circ \sigma$ steht kein entsprechender Stetigkeitssatz zur Verfügung.
Für $f \circ \sigma$ argumentieren wir nun wie folgt. Sei V Umgebung von $f(t)$. Dann existiert wegen der Stetigkeit von f in t eine Umgebung U von t mit für alle $s \in U : \ f(s) \in V$, wobei U als Intervall $]a, b[$ mit $a, b \in \overline{\mathbb{T}}$ gewählt werden kann. Wenn nun t maximal ist, ist $b = \infty$ und dann liegt für $s \in\,]a, b[$ auch $\sigma(s)$ in $]a, b[$, so das $f(\sigma(s)) \in V$. Also ist $f \circ \sigma$ in t stetig. Wenn aber t rechts-dicht ist, gibt es nach Satz 36(1) ein $b^* \in\,]t, b[$, und dann ist $U^* :=\,]a, b^*[$ eine Umgebung von t ist. Für alle $s \in U^*$ ist dann aber $\sigma(s) \in\,]a, b[$ und daher $f(\sigma(s)) \in V$. Also ist $f \circ \sigma$ auch jetzt in t stetig. ■

Nr. 114 (Satz) Übertragung der Kompaktheit durch Regelfunktionen

Ist $\mathbb{T}$ Maßkette, $\mathcal{X}$ Banachraum, $D \subseteq \mathbb{T}$ kompakt und $f\colon D \longrightarrow \mathcal{X}$ sprungstetig, so ist $f[D]$ kompakt.

Beweis. Sei $(f(t_i))$ Folge in $f[D]$. Wir zeigen, dass sie eine konvergente Teilfolge enthält. Wegen der Kompaktheit von D enthält die Folge (t_i) eine gegen ein $t \in D$ konvergente Teilfolge $(t_{h(i)})$. Sind fast alle ihre Glieder gleich t, konvergiert die Teilfolge $(f(t_{h(i)}))$ von $(f(t_i))$ gegen $f(t)$. Andernfalls gibt es eine Teilfolge von $(h_{h(i)})$, in der unendlich viele Glieder kleiner oder unendlich viele größer als t sind. Die Konvergenz dieser Folge gegen t zeigt nun, dass t Häufungspunkt von $D \cap \mathbb{T}^{<t}$ bzw. von $D \cap \mathbb{T}^{>t}$, also ist t nach Satz 37 links-dicht bzw. rechts-dicht. Da f Regelfunktion ist, existiert je nachdem $y := \lim_{s \to t; s<t} f(s)$ oder $y := \lim_{x \to t; s>t} f(x)$, so dass $(f(t_{h(i)}))_{i \in \mathbb{N}}$ gegen y konvergiert. ■

5.2 Treppenfunktionen

Nr. 115 (Def) Zerlegung sowie Teilungspunkt und Intervall einer Zerlegungen

Sei $\mathbb{T}$ beschränkte Maßkette mit $a = \min \mathbb{T} < \max \mathbb{T} = b$.
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $(t_0, \ldots, t_n)$ ein $(n+1)$-Tupel mit Komponenten aus $\mathbb{T}$.

$(t_0, \ldots, t_n)$ ist *(Intervall-)Zerlegung* von $\mathbb{T}$ $:\Leftrightarrow$ $t_0 = a < t_1 \cdots < t_n = b$
$\mathfrak{Z}_{\mathbb{T}} := \{Z \,:\, Z \text{ ist Intervall-Zerlegung von } \mathbb{T}\}$

Die Punkte $t_0, \ldots, t_n$ heißen *Teilungspunkte* der Zerlegung,
die Intervalle $]t_{j-1}, t_j[$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$ heißen die *offenen Teilintervalle* der Zerlegung,
die Intervalle $[t_{j-1}, t_j[$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$ die *rechtshalboffenen Teilintervalle* der Zerlegung.
Entsprechend sind die *linkshalboffenen* und die *geschlossenen Teilintervalle* definiert.

Nr. 116 (Satz und Def) Verfeinerung und Feinheit von Zerlegungen

Sei $\mathbb{T}$ beschränkte Maßkette mit $a = \min \mathbb{T} < \max \mathbb{T} = b$. Sei $Z = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathfrak{Z}_{\mathbb{T}}$.
Seien $(t_0, \ldots, t_n)$ und $(u_0, \ldots, u_m)$ Intervall-Zerlegungen von $\mathbb{T}$.

$(t_0, \ldots, t_m)$ *ist feiner als* oder *Verfeinerung von* $(u_0, \ldots, u_n)$ $:\Leftrightarrow$ $\{t_0, \ldots, t_m\} \supseteq \{u_0, \ldots, u_n\}$

$\triangle_{(\mathbb{T},Z)} \;:=\; \max\{\mu(a_j, a_{j-1}) \,:\, j \in \{1, \ldots, n\}\}$ heißt *Feinheit von Z*
und wird wkM mit $\triangle_Z$ oder $\triangle$ bezeichnet.

Ist Z feiner als Z', so $\triangle_Z \leq \triangle_{Z'}$.

Beweis. Sei $Z = (t_0, \ldots, t_m)$ feiner als $Z' = (u_0, \ldots, u_n)$. Angenommen, $\triangle_Z$ ist größer als $\triangle'_Z$.
Es gibt ein $i \in \{1, \ldots m\}$ mit $\triangle_Z = \mu(t_i, t_{i-1})$.
Da t_{i-1} und t_i auch Teilungspunkte von Z' sind, gibt es $j, k \in \{0, \ldots, n\}$ mit $t_{i-1} = u_j$ und $t_i = u_k$, wobei wegen der Reihenfolge der Teilungspunkte $j < k$ ist.
Daraus folgt $u_j \leq u_{k-1} < u_k$ und nach Satz 67(1) ist $\mu(u_j, u_k) \leq \mu(u_{k-1}, u_k)$, und daher $\triangle_{Z'} < \triangle_Z = \mu(t_i, t_{i-1}) = \mu(u_j, u_k) \leq \mu(u_{k-1}, u_k) \leq \triangle_{Z'}$ (↯). ■

Nr. 117 (Satz und Def) gröbste gemeinsame Verfeinerung von Zerlegungen

Sei $\mathbb{T}$ beschränkte Maßkette mit $\min \mathbb{T} < \max \mathbb{T}$ und $Z, Z' \in \mathfrak{Z}_{\mathbb{T}}$.

$Z \bigvee Z'$ $:=$ die Zerlegung, deren Teilungspunkte diejenigen von Z und von Z' sind.

Offenbar ist $Z \bigvee Z'$ eine Verfeinerung sowohl von Z wie auch von Z',
und alle gemeinsamen Verfeinerungen sind feiner als $Z \bigvee Z'$.
Daher heißt $Z \bigvee Z'$ die *gröbste gemeinsame Verfeinerung* von Z und Z'.

Nr. 118 (Def) **[[-/][-Treppenfunktion, [[-/][-Zerlegung, $\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ und $\mathcal{T}_{][}(\mathbb{T},\mathcal{X})$**

Sei $\mathbb{T}$ beschränkte Maßkette mit $\min\mathbb{T} < \max\mathbb{T}$ und $\mathcal{X}$ Banachraum. Sei $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$:

f ist [[-*Treppenfunktion* $:\Leftrightarrow$ es gibt eine Zerlegung Z von $\mathbb{T}$, so dass f über den rechtshalboffenen Teilintervallen von Z konstant ist. Ein solches Z heißt [[-*Zerlegung* für f.

f ist][-*Treppenfunktion* $:\Leftrightarrow$ es gibt eine Zerlegung Z von $\mathbb{T}$, so dass f über den offenen Teilintervallen von Z konstant ist. Ein solches Z heißt][-*Zerlegung* für f.

$\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X}) := \mathcal{T}(\mathbb{T},\mathcal{X}) := \{f : f \text{ ist [[-Treppenfunktion von } \mathbb{T} \text{ in } \mathcal{X}\}$
$\mathcal{T}_{][}(\mathbb{T},\mathcal{X}) := \{f : f \text{ ist][-Treppenfunktion von } \mathbb{T} \text{ in } \mathcal{X}\}$

Bem. 1: Außer den hier eingeführten Treppenfunktionen wird in der Maßtheorie (Def 255) noch ein dritter Treppenfunktions-Begriff definiert werden: die maßtheoretische Treppenfunktion.

Bem. 2: In der kontinuierlichen Analysis werden meist die hier als][-Treppenfunktionen bezeichneten Funktionen bei der Definition des Riemann-Integrals verwendet. Bei nicht-kontinuierlichem (genauer: nicht dicht geordnetem) $\mathbb{T}$ kann aber $]t_{i-1},t_i[$ leer sein, wodurch, wie wir sehen werden, die][-Treppenfunktionen zur Konstruktion eines Riemann-Cauchy-Integrals auf Maßketten unbrauchbar werden siehe Satz 156. Diese Probleme lassen sich umgehen, wenn man für die Integrationstheorie über Maßketten an Stelle der][-Treppenfunktionen die [[-Treppenfunktionen nimmt.

Nr. 119 (Satz) $\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X}) \le \mathcal{T}_{][}(\mathbb{T},\mathcal{X}) \le \mathcal{R}(\mathbb{T},\mathcal{X}) \le \mathcal{B}(\mathbb{T},\mathcal{X}))$

Sei $\mathbb{T}$ beschränkte Maßkette mit $\min\mathbb{T} < \max\mathbb{T}$ und $\mathcal{X}$ Banachraum.

1. *$\mathcal{T}_{][}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ ist Untervektorraum des Vektorraums $\mathcal{R}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ der Regelfunktionen, und damit selbst ein Vektorraum.*
2. *$\mathcal{T}(\mathbb{T},\mathcal{X}) = \mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ ist Untervektorraum des Vektorraums $\mathcal{T}_{][}(\mathbb{T},\mathcal{X})$, und damit selbst ein Vektorraum.*
3. *Bezeichnet $\le$ die Relation „ist Untervektorraum von“, so gilt also insgesamt $\mathcal{T}_{][}(\mathbb{T},\mathcal{X}) \le \mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X}) \le \mathcal{R}(\mathbb{T},\mathcal{X}) \le \mathcal{B}(\mathbb{T},\mathcal{X}))$.*

Beweis. (2) ist trivial, (3) ist Zusammenfassung von (1), (2) und Satz 107. Nur (1) ist zu zeigen. Sei f][-Treppenfunktion von $\mathbb{T}$ in $\mathcal{X}$, und $(t_0,\ldots,t_n)$][-Zerlegung für f. Ist zunächst t rechts-dicht, so ist $t \neq \max\mathbb{T}$, also gibt es ein $i \in \{1,\ldots,n\}$ mit $t \in [t_{i-1},t_i[$. Wegen Satz 36(1) existiert ein $c \in]t,t_i[$, das dann auch $\in]t_{i-1},t_i[$ ist. Dann ist $f(c)$ der konstante Wert, den f über dem offenen Intervall $]t_{i-1},t_i[$ und damit auch über $]t,t_i[$ annimmt, und der rechtsseitige Grenzwert $f(t+)$ von f an der Stelle t ist $= f(c)$. Analog folgt für links-dichtes t, dass $f(-)$ existiert. Damit bilden die][-Treppenfunktionen eine Teilmenge von $\mathcal{R}(\mathbb{T},\mathcal{X})$, und dass ein Untervektorraum vorliegt, folgt aus dem Unterraumkriterium der linearen Algebra. ■

Nr. 120 (Satz) Approximation von sprungstetigen und von rd-stetigen Funktionen durch Treppenfunktionen

Sei $\mathbb{T}$ beschränkte Maßkette mit $a = \min \mathbb{T} < \max \mathbb{T} = b$, $\mathcal{X}$ Banachraum, $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$.

1. *f ist sprungstetig $\Leftrightarrow$ Es gibt eine Folge von][-Treppenfunktionen $f_n\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$, die gleichmäßig gegen f konvergiert*
2. *f ist rd-stetig $\Rightarrow$ es gibt eine Folge von [[-Treppenfunktionen $f_n\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Richtung $\Leftarrow$ ist i.a. falsch.*
3. *Jede gleichmäßig konvergente Folge von [[-Treppenfunktionen $f_n\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ konvergiert gegen eine sprungstetige Funktion*

Beweis (für (1) vgl. [Ama 99, Theorem 1.2, S. 6-7]).

$\boxed{\text{Zu (1), Teil} \Rightarrow}$. Sei f sprungstetig. Zu zeigen ist, dass es zu jedem $n > 0$ eine][-Treppenfunktion $f_n\colon [a,b] \longrightarrow \mathcal{X}$ gibt mit $\|f(t) - f_n(t)\| \leq \frac{1}{n}$ für alle $t \in \mathbb{T}$.

Sei $t \in [a,b]$. Ist t links-dicht, so sei g der linksseitige Grenzwert von f: dann gibt es ein $\alpha(t) < t$ mit für alle $s \in]\alpha(t), t[\ :\ \|f(s) - g\| \leq \frac{1}{2n}$. Es hat dann $\alpha(t)$ die Eigenschaft $\forall\, s_1, s_2 \in]\alpha(t), t[\ \|f(s_1) - f(s_2)\| \leq \|f(s_1) - g\| + \|g - f(s_2)\| \leq \frac{1}{n}$.
Ist t links-zerstreut, sei $\alpha(t) := \rho(t)$. Ist t minimal, sei $\alpha(t) = -\infty$. Dann hat $\alpha(t)$ unter Beachtung der Leermengen-Konvention auch für links-zerstreutes oder maximales t und damit für alle $t \in \mathbb{T}$ die Eigenschaften $\alpha(t) < t$ sowie $\forall\, s_1, s_2 \in]\alpha(t), t[\ \|f(s_1) - f(s_2)\| \leq \frac{1}{n}$.

Analog sieht man, dass es zu jedem $t \in \mathbb{T}$ auch ein $\beta(t) \in \overline{\mathbb{T}}$ gibt mit $\beta(t) > t$ und $\forall\, s_1, s_2 \in]t, \beta(t)[\ \|f(s_1) - f(s_2)\| \leq \frac{1}{n}$.

Insgesamt gilt also für jedes $t \in \mathbb{T}$, dass es $\alpha(t), \beta(t) \in \overline{\mathbb{T}}$ gibt mit $\alpha(t) < t < \beta(t)$ und $\forall\, s_1, s_2 \in]\alpha(t), t[\ \ \|f(s_1 - f(s_2)\| \leq \frac{1}{n}$ sowie $\forall\, s_1, s_2 \in]t, \beta(t)[\ \|f(s_1 - f(s_2)\| \leq \frac{1}{n}$

Nun ist die Familie $(]\alpha(t), \beta(t)[)_{t \in \mathbb{T}}$ eine offene Überdeckung der kompakten Menge $\mathbb{T}$, besitzt also eine endliche Teilfamilie f, die ebenfalls $\mathbb{T}$ überdeckt. Sei nun $(t_0, \dots, t_n)$ die Zerlegung von $\mathbb{T}$, deren Teilungspunkte genau die Punkte a, b und die von $-\infty$ und ∞ verschiedenen Punkte $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ $(t \in \mathbb{T})$ sind. Dann gilt $\forall\, n \in \{1, \dots, n\}\ \forall\, s_1, s_2 \in]t_{n-1}, t_n[\ \|f(s_1) - f(s_2)\| < \frac{1}{n}$.

Für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $]t_{j-1}, t_j[\ \neq \emptyset$ wählen wir ein $s_j \in]t_{j-1}, t_j[$ und definieren:
$$f_n(t) := \begin{cases} f(t_j) & \text{falls } t = t_j \text{ für ein } i \in \{0, \dots, n\} \\ f(s_j) & \text{falls } t \in]t_{j-1}, t_j[\text{ für ein } j \in \{0, \dots, n\} \end{cases}$$
Dann ist f_n][-Treppenfunktion, und es gilt für $t \in \mathbb{T}$ nach Konstruktion: $\|f(t) - f_n(t)\| < \frac{1}{n}$.

$\boxed{\text{Zu (2), Richtung} \Rightarrow}$. Sei f rd-stetig. Es ist zu zeigen, dass es zu jedem $n > 0$ eine [[-Treppenfunktion $f_n\colon [a,b] \longrightarrow \mathcal{X}$ gibt mit $\|f(t) - f_n(t)\| \leq \frac{1}{n}$ für alle $t \in \mathbb{T}$.

Wörtlich wie im vorhergehenden Teil des Beweises folgt, dass es zu jedem $t \in \mathbb{T}$ ein $\alpha(t) \in \overline{\mathbb{T}}$ gibt mit $\alpha(t) < t$ sowie $\forall\ s_1, s_2 \in\ ]\alpha(t), t[\ \|f(s_1) - f(s_2)\| \leq \frac{1}{n}$.

Sei nun t rechts-dicht, so gibt es wegen der Stetigkeit von f im Punkt t ein eine Umgebung U mit für alle $s \in U$: $\|f(s) - g\| \leq \frac{1}{2n}$. Es gibt dann nach Satz 36(2) ein $\beta(t) > t$, so dass $[t, \beta(t)[\ \subseteq U$. Dieses $\beta(t)$ hat also die Eigenschaft
$\forall\ s_1, s_2 \in [\alpha(t), t[\ \|f(s_1) - f(s_2)\| \leq \|f(s_1) - g\| + \|g - f(s_2)\| \leq \frac{1}{n}$.
Ist t rechts-zerstreut, sei $\beta(t) := \sigma(t)$. Ist t maximal, sei $\beta(t) = \infty$. Für rechts-zerstreutes oder maximales t ist dann t das einzige Element von $[t, \beta(t)[$, also gilt für diese t ebenso wie für rechts-dichte t, dass $\forall\ s_1, s_2 \in [t, \beta(t)[\ \|f(s_1) - f(s_2)\| \leq \frac{1}{n}$.
Insgesamt gilt also für jedes $t \in \mathbb{T}$, dass es $\alpha(t), \beta(t)$ gibt mit $\alpha(t) < t < \beta(t)$
und $\forall\ s_1, s_2 \in\ ]\alpha(t), t[\ \ \|f(s_1 - f(s_2)\| \leq \frac{1}{n}$ sowie $\forall\ s_1, s_2 \in [t, \beta(t)[\ \|f(s_1 - f(s_2)\| \leq \frac{1}{n}$

Wir zeigen nun mit dem Induktionsprinzip, dass es zu jedem $\tau \in [a, b]$ die Aussage $A(\tau)$ gilt, dass es eine endliche Menge M_τ von Intervallen der Form $[t, \gamma(t)[$ mit $t < \gamma(t) \in \overline{\mathbb{T}}$ gibt, so dass $\forall\ s_1, s_2 \in [t, \gamma(t)[\ :\ \|f(s_1) - f(s_2)\| < \frac{1}{n}$ sowie $\bigcup M \supseteq [a, \tau[$ gilt.
$\boxed{\text{IA}}$. Mit $M_a := \{[a, \beta(a)[\}$ ist $A(a)$ erfüllt.
$\boxed{\text{PP}}$. Gilt $A(\tau)$ für rechts-zerstreutes $\tau \in [a, b[$,
so gilt mit $M_{\sigma(\tau)} := M_\tau \cup \{[\sigma(\tau), \beta(\sigma(\tau))[\}$ die Aussage $A(\sigma(\tau))$.
$\boxed{\text{PU}}$. Gilt $A(\tau)$ für rechts-dichtes $\tau \in [a, b[$, so wähle ein $s \in \overline{\mathbb{T}}$ mit $s < \tau$.
Dann ist $U :=]s, \beta(\tau)[$ eine Umgebung von τ.
Ist x ein Element von U mit $\tau < x$, so gilt mit $M_x := M_\tau \cup \{[\tau, \beta(\tau)[\}$ die Aussage $A(x)$.
$\boxed{\text{VP}}$. Gelte $A(x)$ für alle Vorgänger eines links-dichten $\tau \in [a, b]$.
Wir können nun ein $x \in\ ]\alpha(t), t[$ wählen. Mit $M_\tau := M_x \cup \{[x, \tau[\}$ gilt dann $A(\tau)$.

Somit gibt es endlich viele Intervalle $[t, \gamma(t)[$ das Intervall $[a, b[$ überdecken. Sei $(t_0, \ldots, t_n)$ die Zerlegung von $[a, b]$, deren Teilungspunkt genau die Punkte a, b und die von ∞ verschiedenen $\gamma(t)$ sind. Dann gilt $\forall\ n \in \{1, \ldots, n\}\ \forall\ s_1, s_2 \in [t_{n-1}, t_n[\ \|f(s_1) - f(s_2)\| < \frac{1}{n}$.
Für alle $t \in \mathbb{T} \setminus \{b\}$ sei nun $f_n(t) := f(t_{i-1})$, wobei i dasjenige Element von $\{1, \ldots, n\}$ ist mit $t \in [t_{i-1}, t_i[$. Außerdem sei $f_n(b) := f(b)$. Es ist dann f_n eine [[-Treppenfunktion, und es gilt für alle $t \in \mathbb{T}$ nach Konstruktion: $\|f(t) - f_n(t)\| < \frac{1}{n}$.

$\boxed{\text{Richtung} \Leftarrow \text{von (2) ist i.a. falsch}}$. Sei $\mathcal{X}$ nicht der Nullraum, x_1, x_2 verschiedene Elemente von X und $t \in\ ]a, b[$ zugleich rechts- und links-dicht. Sei $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow X$ die [[-Treppenfunktion mit $\forall\ s \in [a, t[\ f(s) = x_1$ und $\forall\ s \in [t, b[\ f(s) = x_2$. Mit $\forall\ n \in \mathbb{N}\ f_n := f$ konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f, aber f ist im rechts-dichten Punkt t unstetig (wie man per Def der Stetigkeit nachprüft, wobei zu beachten ist, dass t rechts *und* links-dicht ist, so dass es in jeder Umgebung von t nach Satz 36(2) stets s_1, s_2 mit $s_1 < t < s_2$ gibt), also ist f nicht rd-stetig.

$\boxed{\text{Zu (1), Teil} \Leftarrow}$. Die f_n liegen nach Satz 119 in $\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$, wegen Satz 112 gilt das auch für f.

$\boxed{\text{Zu (3)}}$. Da [[-Treppenfunktionen][-Treppenfunktionen sind, folgt dies aus (1), Teil $\Leftarrow$. ■

Nr. 121 (Satz) Kriterium für Sprungstetigkeit komplexer und mehrdimensionaler Funktionen

Sei $\mathbb{T}$ beschränkte Maßkette mit $a = \min \mathbb{T} < \max \mathbb{T} = b$.
Sei $n \in \mathbb{N}^{\odot}$, $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{K}^n$.

1. *f ist sprungstetig* $:\Leftrightarrow$ *$Re f$ und $Im f$ sind sprungstetig*
2. *g ist sprungstetig* $:\Leftrightarrow$ *für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist die i-te Komponentenfunktion g_i sprungstetig*

Beweis. (1) folgt wegen Satz 120(1) und der Tatsache, dass eine komplexe Folge genau dann konvergiert, wenn Real– und Imaginärteil konvergieren, wenn man beachtet, dass eine Funktion t: $\mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{K}^n$ genau dann eine][-Treppenfunktion ist, wenn ihr Real– und Imaginärteil][-Treppenfunktionen sind).

(2) folgt wegen Satz 120(1) und der Tatsache, dass eine mehrdimensionale Folge genau dann konvergiert, wenn ihre Komponenten konvergieren, wenn man beachtet, dass eine Funktion t: $\mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{K}^n$ genau dann eine][-Treppenfunktion ist, wenn alle ihre Komponentenfunktionen t_i: $\mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{K}$ ($i \in \{1, \ldots, n\}$)][-Treppenfunktionen sind). ■

Nr. 122 (Satz) Gleichheit von $\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ und $\overline{\mathcal{T}_{][}(\mathbb{T}, \mathcal{X})}$;
$\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ als abgeschlossener Unterraum und Banachraum

Sei $\mathbb{T}$ beschränkte Maßkette mit $\min \mathbb{T} < \max \mathbb{T}$ und $\mathcal{X}$ Banachraum.

1. $\overline{\mathcal{T}_{][}(\mathbb{T}, \mathcal{X})} = \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ *(wobei der Abschluss im Raum $\mathcal{B}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ gebildet wird)*
2. *$\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ ist abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{B}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ und selbst ein Banachraum.*

Beweis (vgl. [Ama 99, Theorem 1.4, S. 7]).

Zu (1). Nach Satz 120(1) ist $\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ gleich der Menge aller Grenzfunktionen gleichmäßig konvergenter][-Treppenfunktionen, das heißt gleich der Menge aller Grenzfunktionen von][-Treppenfunktionen, die im Raum $\mathcal{B}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ konvergieren. Damit ist $\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ gleich der Menge der Berührungspunkte von $\mathcal{T}_{][}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$, das heißt gleich $\overline{\mathcal{T}_{][}(\mathbb{T}, \mathcal{X})}$.

Zu (2). Wegen (1) ist $\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ als Abschluss der Menge $\mathcal{T}_{][}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ im Raum $\mathcal{B}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ eine abgeschlossene Menge dieses Raumes. Da $\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ (nach Satz 119) ein Unterraum von $\mathcal{B}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ ist, ist $\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ also insgesamt ein abgeschlossener Unterraum.
Da $\mathcal{B}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ ein Banachraum ist, strebt jede Cauchyfolge in $\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ (weil es eine Cauchyfolge in $\mathcal{B}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ ist) gegen ein $f \in \mathcal{B}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ liegt aber f wieder in $\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$. Somit ist $\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ auch selbst ein Banachraum. ■

Nr. 123 (Satz) Teilmengenverhältnis von $C_{rd}(\mathbb{T},\mathcal{X})$, $\overline{\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})}$ und $\mathcal{R}(\mathbb{T},\mathcal{X})$

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette mit $a = \min \mathbb{T} < \max \mathbb{T} = b$ und $\mathcal{X}$ Banachraum.

1. $C_{rd}(\mathbb{T},\mathcal{X}) \subseteq \overline{\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})} \subseteq \mathcal{R}(\mathbb{T},\mathcal{X})$.
2. *Das in (1) ausgesagte Teilmengenverhältnis $C_{rd}(\mathbb{T},\mathcal{X}) \subseteq \overline{\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})}$ ist echt,*

   wenn $\mathcal{X}$ nicht der Nullraum ist und es einen zugleich rechts- und links-dichten Punkt t in $]a,b[$ gibt.
3. *Das in (1) ausgesagte Teilmengenverhältnis $\overline{\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})} \subseteq \mathcal{R}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ ist echt,*

   wenn $\mathcal{X}$ nicht der Nullraum ist und es einen rechts-dichten Punkt t in $[a,b[$ gibt.

Beweis. Zu (1). Nach Satz 120(2) gilt für jedes Element von $C_{rd}(\mathbb{T},\mathcal{X})$, dass es eine Folge (f_n) in $\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T};\mathcal{X})$ gibt, die gleichmäßig (das heißt: im Raum $\mathcal{B}(\mathbb{T},\mathcal{X})$) gegen f konvergiert. Daher gehört jede rd-stetige Funktion zur Menge $\overline{\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})}$ der Berührungspunkte von $\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ im Raum $\mathcal{B}(\mathbb{T},\mathcal{X})$, das heißt es gilt $C_{rd}(\mathbb{T},\mathcal{X}) \subseteq \overline{\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})}$.
Ferner zeigt Satz 120(3) unmittelbar, dass $\overline{\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})} \subseteq \mathcal{R}(\mathbb{T},\mathcal{X})$.

Zu (2). Im Beweis von 120(2) wurde unter der angegebenen Bedingung gezeigt, dass es eine [[-Treppenfunktion f gibt (also ein Element von $\overline{\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})}$), die nicht rd-stetig ist.

Zu (3). Seien x_1, x_2 verschiedene Elemente von X und sei g die Funktion $g\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ mit $g(t) = x_1$ und $\forall\ s \in \mathbb{T} \setminus \{t\}\ g(s) = x_2$. Dann ist g eine][-Treppenfunktion, also ein Element von $\overline{\mathcal{T}_{][}(\mathbb{T},\mathcal{X})}$, und somit nach Satz 122 von $\mathcal{R}(\mathbb{T},\mathcal{X})$.

Angenommen, g ist Element von $\overline{\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})}$, dann gibt es eine Folge (g_n) von [[-Treppenabbildungen, die gleichmäßig gegen g konvergiert. Es gibt dann zu $\varepsilon = \frac{\|x_1 - x_2\|}{2}$ ein n_0 mit für alle $n \geq n_0$ und $x \in \mathbb{T}$:

$\|g_n(x) - g(x)\| < \varepsilon$, insbesondere $\|g_n(t) - x_1\| < \varepsilon$ und $\|g_n(x) - x_2\| < \varepsilon$ für $x \in \mathbb{T} \setminus \{t\}$.

Dann ist aber $g_n(t) \neq g_n(x)$ (andernfalls wäre $\|x_1 - x_2\| = \|g_n(x) - x_2 - (g_n(t) - x_1)\| \leq \|g_n(x) - x_2\| + \|g_n(t) - x_1\| < 2\varepsilon = \|x_1 - x_2\|$ ($\lightning$)). Sei nun $[t_1, t_2[$ das Intervall einer [[-Zerlegung für g_n, das t enthält, es ist also g_n über $[t_1, t_2[$ konstant. Nun gibt es außer t mindestens noch ein weiteres Element x im Intervall $[t_1, t_2[$: denn wenn $t \neq t_1$, ist t_1 ein solches x, und wenn $t = t_1$, so folgt die Existenz von x aus Satz 36(1), weil $t = t_1$ dann rechts-dicht ist. Wegen $x \neq t$ ist dann aber $g_n(x) = x_2 \neq x_1 = g_n(t)$ im Widerspruch dazu, dass g_n über $[t_1, t_2[$ konstant ist ($\lightning$). Also ist die Annahme falsch, und $g \notin \overline{\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})}$. ■

5.3 Stamm– und Vorstammfunktionen

Nr. 124 (Def) Vorstammfunktion und Stammfunktion

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $\mathcal{X}$ Banachraum, D Menge und seien $f, F\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ Funktionen[1].

F ist mit D *Vorstammfunktion* von f
$:\Leftrightarrow$ F ist mit D vordifferenzierbar und $\forall\ t \in D\ F^{\Delta}(t) = f(t)$.

F ist *Stammfunktion* von f
$:\Leftrightarrow$ F ist mit $\mathbb{T}^{\kappa}$ Vorstammfunktion von f

Nr. 125 (Satz) Kriterium für Stammfunktionen

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $\mathcal{X}$ Banachraum, und seien $f, F\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ Funktionen.

F ist eine Stammfunktion von f $\Leftrightarrow$ F ist global differenzierbar und $\forall\ t \in \mathbb{T}^{\kappa}\ F^{\Delta}(t) = f(t)$

Beweis. Satz 100 in Verbindung mit der Def der Stamm- und Vorstammfunktion. ■

Nr. 126 (Satz) Vorstammfunktionen und Stammfunktionen komplexer und mehrdimensionaler Funktionen

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $f, F\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $g, G\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{K}^n$ und D Menge.

1. *F ist mit D Vorstammfunktion von f*
   $\Leftrightarrow$ *$\operatorname{Re} F$ und $\operatorname{Im} F$ sind mit D Vorstammfunktionen von $\operatorname{Re} f$ bzw. $\operatorname{Im} f$*
2. *G ist mit D Vorstammfunktion von g*
   $\Leftrightarrow$ *Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist G_i mit D Vorstammfunktion von g_i*
3. *F ist Stammfunktion von f*
   $\Leftrightarrow$ *$\operatorname{Re} F$ und $\operatorname{Im} F$ sind Stammfunktionen von $\operatorname{Re} f$ bzw. $\operatorname{Im} f$*
4. *G ist Stammfunktion von g*
   $\Leftrightarrow$ *Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist G_i Stammfunktion von g_i*

Beweis. (1) und (2) folgt aus Sätzen 101, 92(3) und 93(3). (3) und (4) folgt aus (1) und (2). ■

[1] Hilger setzt in dieser Definition und den darauf aufbauenden Sätzen voraus, dass der Definitionsbereich von f nicht $\mathbb{T}$, sondern $\mathbb{T}^{\kappa}$ ist [Hil 90, Abschnitte 4.2-4.4, S. 35-39].
Man kann aber problemlos auch ganz $\mathbb{T}$ nehmen [Boh 00, Kap. 1.3]

6 Das Cauchy-Integral

6.1 Konstruktion des Cauchy-Integrals

Die in diesem Kapitel vorgestellten reinen Cauchy-Integrale, die als Umkehrung der Differentiation definiert sind, sind die im Maßkettenkalkül bisher ausschließlich verwendeten Integrale.

Nr. 127 (Lemma) Erstes Lemma zum Beweis des nächsten Satzes

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette und $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{T}$ mit $\tau_1 \leq \tau_2$. Sei $\tau_3 \in [\tau_1, \tau_2]$.
Sei $\mathcal{X}$ Banachraum und $x \in X$. Sei $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ eine Regelfunktion.

Es gibt zu jedem $n \in \mathbb{N}^{\odot}$ ein $F_n\colon [\tau_1, \tau_2] \longrightarrow \mathcal{X}$ und eine Menge D_n, so dass
F_n mit D vordifferenzierbar ist und $\forall\ s \in D\ \|F_n^{\Delta}(s) - f(s)\| \leq \frac{1}{n}$ sowie $F_n(\tau_3) = x$ gilt.

Beweis nach [Hil 90, Theorem 4.2, S. 35-37]. Sei $n \in \mathbb{N}^{\odot}$ fest gewählt und $\tau := \tau_1$.
Wir zeigen per Induktionsprinzip, dass für $t \in [\tau, \infty[$, die folgende Aussage gilt:

$\boxed{A(t)}$ Es gibt ein $F_{n,t}\colon [\tau, t] \longrightarrow \mathcal{X}$ und eine Menge $D_{n,t}$, so dass
$F_{n,t}$ mit $D_{n,t}$ vordifferenzierbar ist und $\forall\ s \in D_{n,t}\ \|F_{n,t}^{\Delta}(s) - f(s)\| \leq \frac{1}{n}$ gilt.

Ist dies gezeigt, so gilt insbesondere $A(t)$ für $t = \tau_2$. Sei dann $c := F_{n,\tau_2}(\tau_3)$. Dann hat offenbar die Funktion $F_n\colon [\tau_1, \tau_2] \longrightarrow \mathcal{X}$ mit $\forall\ s \in [\tau_1, \tau_2]\ F_n(s) := F_{n,\tau_2}(s) - c + x$ zusammen mit der Menge $D_n := D_{n,\tau_2}$ die behaupteten Eigenschaften, und wir sind fertig.

$\boxed{\text{IA}}$. Wähle $F_{n,\tau}\colon \{\tau\} \longrightarrow \mathcal{X}$ mit $F_{n,\tau}(\tau) := x$ und $D_{n,\tau} := \emptyset$. Dann ist $D_{n,\tau} = \emptyset \subseteq \{\tau\}^{\kappa}$ und $\{\tau\}^{\kappa} \setminus D_{n,\tau} = \emptyset \setminus \emptyset = \emptyset$ abzählbar. Nach der Leermengen-Konvention sind alle t aus $\{\tau\}^{\kappa} \setminus D_{n,\tau} = \emptyset$ maximal oder rechts-dicht. $F_{n,\tau}$ ist trivialerweise stetig (alle Teilmengen des Definitionsbereichs, nämlich $\{\tau\}$ und $\emptyset$, sind offen). Nach der Leermengen-Konvention ist f in jedem t aus $D_{n,\tau} = \emptyset$ differenzierbar. Somit ist $F_{n,\tau}$ mit $D_{n,\tau}$ vordifferenzierbar. Wieder per Leermengen-Konvention gilt $\forall\ s \in \emptyset\ \|F_{n,t}^{\Delta}(s) - f(s)\| \leq \frac{1}{n}$. Somit gilt $A(\tau)$.

$\boxed{\text{PP}}$. Nach Voraussetzung gibt es für ein rechts-zerstreutes t ein entsprechendes $f_{n,t}$ und $D_{n,t}$.
Dann sei $D_{n,\sigma(t)} := D_{n,t} \cup \{t\}$ und $F_{n,\sigma(t)}\colon [\tau, \sigma(t)] \longrightarrow X$

mit für alle $s \in [\tau, \sigma(t)]$: $\quad F_{n,\sigma(t)}(s) := \begin{cases} F_{n,t}(s) & \text{falls } s \in [\tau, t] \\ F_{n,t}(t) + f(t)\mu^*(t) & \text{falls } s = \sigma(t) \end{cases}$

Da $D_{n,t} \subseteq [\tau, t]$ und $D_{n,\sigma(t)} = D_{n,t} \cup \{t\}$, gilt auch $D_{n,\sigma(t)} \subseteq [\tau, t]$. Nun ist das Maximum $\sigma(t)$ von $[\tau, \sigma(t)]$ links-zerstreut, also $[\tau, \sigma(t)]^{\kappa} = [\tau, t]$, also $D_{n,\sigma(t)} \subseteq [\tau, \sigma(t)]^{\kappa}$.

Es besitzt nun $[\tau,\sigma(t)]^\kappa = [\tau,t]$ höchstens ein Element, nämlich t, was $[\tau,t]^\kappa$ nicht besitzt, aber da t nicht in $[\tau,\sigma(t)]^\kappa \setminus D_{n,\sigma(t)}$ enthalten ist, gilt $[\tau,\sigma(t)]^\kappa \setminus D_{n,\sigma(t)} \subseteq [\tau,t]^\kappa \setminus D_{n,t}$, also ist $[\tau,\sigma(t)]^\kappa \setminus D_{n,\sigma(t)}$ als Teilmenge einer abzählbaren Menge abzählbar.

Auch enthält $[\tau,\sigma(t)]^\kappa \setminus D_{n,\sigma(t)}$ keine rechts-zerstreuten Punkte des Raumes $[\tau,\sigma(t)]$: denn der rechts-zerstreute Punkt t ist kein Element von $[\tau,\sigma(t)]^\kappa \setminus D_{n,\sigma(t)}$ und die übrigen rechts-zerstreuten Punkt des Raumes $[\tau,\sigma(t)]$ wären auch solche des Raumes $[\tau,t]$, und wären, wenn in $[\tau,\sigma(t)]^\kappa \setminus D_{n,\sigma(t)}$ enthalten, auch Elemente der Obermenge $[\tau,t]^\kappa \setminus D_{n,t}$, was falsch ist.

Trivialerweise ist $F_{n,\sigma(t)}$ stetig.

Die Differenzierbarkeit von $F_{n,\sigma(t)}$ in den Punkten s aus $D_{n,t} \setminus \{t\}$ folgt aus der Differenzierbarkeit von $F_{n,t}$: $[\tau,t] \longrightarrow \mathcal{X}$ in diesen Punkten mittels Satz 91(2), wobei man beachte, dass $\min[\tau,t] = \min[\tau,\sigma(t)]$ und $s \neq \max[\tau,t]$. Es gilt $F^\Delta_{n,\sigma(t)}(s) = F^\Delta_{n,t}(s)$.

Die Differenzierbarkeit im Punkt t schließlich folgt aus Satz 89, wobei
$F^\Delta_{n,\sigma(t)}(t) = \frac{F_{n,\sigma(t)}(\sigma(t))-F_{n,\sigma(t)}(t)}{\mu^*(t)} = \frac{F_{n,t}(t)+f(t)\mu^*(t)-F_{n,t}(t)}{\mu^*(t)} = f(t)$.

Mit der Voraussetzung $A(t)$ folgt also
$\|F^\Delta_{n,\sigma(t)}(s) - f(s)\| \begin{cases} = \|F^\Delta_{n,t}(s) - f(s)\| \leq \frac{1}{n} & \text{falls } s \in D_{n,t} \setminus \{t\} \\ = 0 \leq \frac{1}{n} & \text{falls } s = t \end{cases}$ Damit gilt $A(\sigma(t))$.

$\boxed{\text{PU}}$. Nach Voraussetzung gibt es für ein rechts-dichtes t ein entsprechendes $f_{n,t}$ und $D_{n,t}$. Da der rechtsseitige Grenzwert der Regelfunktion f im Punkt t existiert, gibt es eine Umgebung U von t mit

(*) $\|f(s) - f(t+)\| \leq \frac{1}{n}$ für alle $s \in U$ mit $s > t$.

Für alle $r \in U$ mit $r > t$ sei nun $D_{n,r} := (D_{n,t} \setminus \{t\}) \cup]t,r]^\kappa$
und $F_{n,r} : [\tau,r] \longrightarrow \mathcal{X}$ mit für alle $s \in [\tau,r]$: $F_{n,r}(s) := \begin{cases} F_{n,t}(s) & \text{falls } s \in [\tau,t] \\ F_{n,t}(t) + f(t+)\mu(s,t) & \text{falls } s \in [t,r] \end{cases}$

Diese Definition enthält keinen Widerspruch, denn falls zugleich $s \in [\tau,t]$ und $[t,r]$ (also im Fall $s = t$), gilt $F_{n,t}(t) = F_{n,t}(t) + f(t+)\mu(t,t)$, da $\mu(t,t) = 0$.

Da $]t,r]$ wegen der Rechts-Dichtheit von t nichtleer ist, ist r genau dann entartet in $[\tau,r]$, wenn r in $[t,r]$ entartet ist. Damit folgt $[\tau,r]^\kappa = [\tau,t] \cup]t,r]^\kappa$.
Also ist $D_{n,r} = (D_{n,t} \setminus \{t\}) \cup]t,r]^\kappa \subseteq [\tau,t[\cup]t,r]^\kappa \subseteq [\tau,t] \cup]t,r]^\kappa = [\tau,r]^\kappa$.

Weiter ist $[\tau,r]^\kappa \setminus D_{n,r} = ([\tau,t] \cup]t,r]^\kappa) \setminus ((D_{n,t} \setminus \{t\}) \cup]t,r]^\kappa) = [\tau,t] \setminus (D_{n,t} \setminus \{t\}) = ([\tau,t] \setminus D_{n,t}) \cup \{t\}$, diese Menge hat also höchstens ein Element (nämlich eventuell t), das die abzählbare Menge $[\tau,t] \setminus D_{n,t}$ nicht besitzt. Daher ist $[\tau,r]^\kappa \setminus D_{n,r}$ abzählbar.

Die Punkte x von $[\tau,t] \setminus D_{n,t}$ sind nach Voraussetzung keine rechts-zerstreuten Punkte im Raum $[\tau,t]$; diejenigen von ihnen, die $< t$ sind, sind dann auch keine rechts-zerstreuten Punkte im

Raum $[\tau, r]$, und t ist als rechts-dichter Punkt von $\mathbb{T}$ ebenfalls nicht rechts-zerstreut in $\mathbb{T}$ (und dann auch nicht in $[\tau, r]$).
Also enthält $[\tau, r]^\kappa \setminus D_{n,r}$ keine rechts-zerstreuten Punkte des Raumes $[\tau, r]$.

Die Funktion $F_{n,r}$ ist nach obiger Definition die Vereinigung zweier auf abgeschlossenen Mengen definierter stetiger Funktionen und somit selbst stetig.

Die Differenzierbarkeit von $F_{n,r}$ in den Punkten $s \in D_{n,t} \setminus \{t\}$ folgt aus der Differenzierbarkeit von $F_{n,t}$: $[\tau, t] \longrightarrow \mathcal{X}$ in diesen Punkten mittels Satz 91(2), wobei $\min[\tau, t] = \min[\tau, r]$ und $s < \max[\tau, t]$ zu beachten ist. Mit Satz 94 ergibt sich $F_{n,r}^\Delta(s) = F_{n,t}^\Delta(s)$.

Die Differenzierbarkeit in den Punkten s aus $]t, r]^\kappa$ folgt aus der Differenzierbarkeit der Funktion g: $[t, r]^\kappa \longrightarrow \mathcal{X}$ mit $g(s) = F_{n,t}(t) + f(t+)\mu(s, t)$ (die mittels Produktregel und Linearität aus 88 folgt) in Verbindung mit Satz 91(2), wobei $\max[t, r]^\kappa = \max[\tau, r]^\kappa$ und $\min[t, r]^\kappa \neq s$ zu beachten ist. Mit Satz 94 folgt $F_{n,r}^\Delta(s) = f(t+)$.

Mit der Voraussetzung $A(t)$ und (*) folgt also

$$\|F_{n,r}^\Delta(s) - f(s)\| \begin{cases} = \|F_{n,t}^\Delta(s) - f(s)\| \leq \frac{1}{n} & \text{falls } s \in D_{n,t} \setminus \{t\} \\ = \|f(t+) - f(s)\| \leq \frac{1}{n} & \text{falls } s \in \,]t, r]^\kappa \end{cases}$$

so dass $A(r)$.

$\boxed{\text{VP}}$. Sei schließlich t links-dicht und für alle $r < t$ sei ein entsprechendes $f_{n,r}$ und $D_{n,r}$ gegeben. Da dann der linksseitige Grenzwert der Regelfunktion f im Punkt t existiert, gibt es eine Umgebung U von t mit

(**) $\|f(s) - f(t-)\| \leq \frac{1}{n}$ für $s \in U$ mit $s < t$.

Wir wählen nun ein r mit $s < r < t$ aus U (was wegen der Links-Dichtheit geht), und definieren:

$$D_{n,t} := \begin{cases} (D_{n,r} \setminus \{r\}) \cup \,]r, t[& \text{falls } r \text{ rechts-dicht} \\ (D_{n,r} \setminus \{r\}) \cup [r, t[& \text{falls } r \text{ rechts-zerstreut} \end{cases}$$

und $F_{n,t}$: $[\tau, t] \longrightarrow \mathcal{X}$ mit für alle $s \in [\tau, t]: \; F_{n,t}(s) := \begin{cases} F_{n,r}(s) & \text{falls } s \in [\tau, r] \\ F_{n,r}(r) + f(t-)\mu(s, r) & \text{falls } s \in [r, t] \end{cases}$

Diese Definition enthält keinen Widerspruch, denn falls zugleich $s \in [\tau, r]$ und $[r, t]$ (also im Fall $s = r$), gilt $F_{n,t}(r) = F_{n,t}(r) + f(t-)\mu(r, r)$, da $\mu(r, r) = 0$.

Es ist trivialerweise ist $D_{n,t} \subseteq [\tau, t] = [\tau, t]^\kappa$. Außerdem ist $[\tau, t]^\kappa \setminus D_{n,t} = [\tau, t] \setminus D_{n,t}$; nun sind es höchstens die Punkte r, t, die $[\tau, t] \setminus D_{n,t}$ besitzt, aber $[\tau, r] \setminus D_{n,r}$ nicht besitzt, daher ist $[\tau, t] \setminus D_{n,t}$ wie $[\tau, r] \setminus D_{n,r}$ abzählbar.

Außerdem enthält $[\tau, t]^\kappa \setminus D_{n,t}$ den Punkt r nicht, falls dieser (im Raum $\mathbb{T}$, und das heißt hier auch im Raum $[\tau, t]$) rechts-zerstreut ist. Weiter ist t in $[\tau, t]$ nicht rechts-zerstreut, da maximal. Schließlich enthält $[\tau, t]^\kappa \setminus D_{n,t}$ auch keine von r und t verschiedenen rechts-zerstreuten Punkte von $[\tau, t]$, denn diese wären auch rechts-zerstreute Punkte von $[\tau, r]^\kappa \setminus D_{n,r}$ in der Kette $[\tau, r]$, was nach Voraussetzung falsch ist.

Nun ist F nach obiger Definition die Vereinigung zweier auf abgeschlossenen Mengen definierter verträglicher stetiger Funktionen und somit selbst stetig.

Die Differenzierbarkeit von F in den Punkten s aus $D_{n,r} \setminus \{r\}$ folgt wieder aus der Differenzierbarkeit von $F_{n,r}$: $[\tau, r] \longrightarrow \mathcal{X}$ in diesen Punkten mittels Satz 91, wobei $\min [\tau, r] = \min [\tau, t]$ und $s < \max [\tau, r]$ zu beachten ist. Es ist $F_{n,t}^{\Delta}(s) = F_{n,r}^{\Delta}(s)$.

Die Differenzierbarkeit in den Punkten s aus $D_{n,t}$ mit $r < s$ folgt aus der Differenzierbarkeit der Funktion g: $[r, t] \longrightarrow \mathcal{X}$ mit $g(s) = F_{n,r}(t) + f(t-)\mu(s, r)$ (die mittels Produktregel und Linearität aus 88 folgt) in Verbindung mit Satz 91, wobei $\max [\tau, t] = \max [r, t]$ und $\min [r, t] \neq s$ zu beachten ist. Mit Satz 94 folgt $F_{n,t}^{\Delta}(s) = f(t-)$.

Die Differenzierbarkeit im Punkt r schließlich (die nur im Fall der rechts-Zerstreutheit von r behauptet ist, weil nur dann $r \in D_{n,t}$ gilt) folgt aus Satz 89, wobei
$F_{n,t}^{\Delta}(t) = \frac{F_{n,t}(\sigma(r)) - F_{n,t}(r)}{\mu^*(r)} = \frac{F_{n,r}(r) + f(t-)\mu(\sigma(r), r) - F_{n,r}(r)}{\mu(\sigma(r), r)} = f(t-)$.

Mit der Voraussetzung $A(r)$ und (**) folgt also

$$\|F_{n,t}^{\Delta}(s) - f(s)\| \begin{cases} = \|F_{n,r}^{\Delta}(s) - f(s)\| \leq \frac{1}{n} & \text{falls } s \in D_{n,r} \setminus \{r\} \\ = \|f(t-) - f(s)\| \leq \frac{1}{n} & \text{falls } s \in D_{n,t} \text{ mit } r < s \\ = \|f(t-) - f(r)\| \leq \frac{1}{n} & \text{falls } s = r \text{ und } r \text{ rechts-zerstreut} \end{cases} \quad \text{so dass } A(t). \blacksquare$$

Nr. 128 (Lemma) Zweites Lemma zum Beweis des nächstens Satzes

Seien die Voraussetzungen dieselben wie beim ersten Lemma, also
$\mathbb{T}$ *Maßkette,* $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{T}$ *mit* $\tau_1 \leq \tau_2$, $\tau_3 \in [\tau_1, \tau_2]$,
$\mathcal{X}$ *Banachraum,* $x \in X$ *und* f: $\mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ *eine Regelfunktion.*

Dann gibt es eine Funktion F: $[\tau_1, \tau_2] \longrightarrow \mathcal{X}$ *und eine Menge* D,
so dass F *mit* D *vordifferenzierbar ist und* $\forall\ t \in D\ F^{\Delta}(t) = f(t)$ *sowie* $F(\tau_3) = x$ *gilt.*

Beweis. Nach dem ersten Lemma gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}^{\odot}$ eine Funktion F_n: $[\tau_1, \tau_2] \longrightarrow \mathcal{X}$ und eine Menge D_n, so dass F_n mit D_n vordifferenzierbar ist und $\forall\ s \in D\ \|F_n^{\Delta}(s) - f(s)\| \leq \frac{1}{n}$ sowie $F_n(\tau_3) = x$ gilt. Sei nun $D := \bigcap_{n \in \mathbb{N}^{\odot}} D_n$.

Wir zeigen, dass dann jedes F_n mit D vordifferenzierbar ist. Zunächst ist $D \subseteq D_1 \subseteq [\tau_1, \tau_2]^{\kappa}$, außerdem ist $[\tau_1, \tau_2]^{\kappa} \setminus D = [\tau_1, \tau_2]^{\kappa} \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}^{\odot}} D_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^{\odot}} ([\tau_1, \tau_2]^{\kappa} \setminus D_n)$, und letzteres ist als Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen selbst abzählbar.
Da jedes $[\tau_1, \tau_2]^{\kappa} \setminus D_n$ nur maximale oder rechts-dichte Punkte von $[\tau_1, \tau_2]$ enthält, gilt dies auch für $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^{\odot}} ([\tau_1, \tau_2]^{\kappa} \setminus D_n) = [\tau_1, \tau_2]^{\kappa} \setminus D$.
Schließlich ist F_n stetig, und in jedem Punkt von D differenzierbar.

Zu jedem $t \in [\tau_1, \tau_2]^{\kappa}$ gibt es eine kompakte Intervall-Umgebung U_t von t im Raum $[\tau_1, \tau_2]$, (nämlich $[\tau_1, \tau_2]$ selbst), so dass die Folge $(f_n^\Delta(t))_{n\in\mathbb{N}^\odot}$ der Ableitungen gleichmäßig auf $U_t \cap D$ $(= D)$ gegen die Funktion f konvergiert: denn zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}^\odot$ mit für alle $n \geq n_0$ und $s \in D$: $\varepsilon > \frac{1}{n} \geq \|F_n^\Delta(s) - f(s)\|$. Ferner konvergiert $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^\odot}$ im Punkt τ_3 trivialerweise gegen x. Damit sind die Voraussetzungen für die Anwendung des Satzes 105 gegeben.

Aus diesem folgt, dass $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion F: $[\tau_1, \tau_2] \longrightarrow X$ konvergiert, welche vordifferenzierbar mit D ist und für alle $t \in D$ der Gleichung $F^\Delta(t) = \lim\limits_{n\to\infty} F_n^\Delta(t) = f(t)$ genügt. Weiter ist $F(\tau_3) = \lim\limits_{n\to\infty} F_n(\tau_3) = x$. ■

Nr. 129 (Satz) Existenz von Vorstammfunktionen von Regelfunktionen

Sei $\tau \in \mathbb{T}, x \in \mathcal{X}$ und f eine Regelfunktion f: $\mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$.

Dann gibt es ein $D \subseteq \mathbb{T}^\kappa$ und zu D genau eine Funktion S: $\mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$, die mit D Vorstammfunktion von f ist, so dass $S(\tau) = x$.

Beweis. Eindeutigkeit. Sind S_1, S_2 solche Funktionen, so ist $S_1 - S_2$ vordifferenzierbar mit D und $(S_1 - S_2)(t) = f(t) - f(t) = 0$ für alle $t \in D$. Nach dem hinreichenden Kriterium für Konstanz folgt, dass $S_1 - S_2$ konstant ist. Wegen $S_1(\tau) = S_2(\tau) = x$ ist dann $S_1 - S_2$ konstant $= 0$ und somit $S_1 = S_2$.

Existenz. Hat $\mathbb{T}$ weniger als zwei verschiedene Elemente, so ist τ das einzige Element und die Behauptung gilt mit $D = \emptyset$ und S: $\{\tau\} \longrightarrow \mathcal{X}$, $S(\tau) := x$). Wir können daher davon ausgehen, dass $\mathbb{T}$ mindestens zwei verschiedene Elemente hat. Nach Satz 74 ist $\mathbb{T}$ Vereinigung abzählbar vieler kompakter Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ ($n \in N$, wobei $N = \mathbb{N}$ oder $N = \{n \in \mathbb{N} : n \leq m\}$ mit $m \in \mathbb{N}$), von denen je zwei verschiedene höchstens einen Punkt gemeinsam haben, der dann gemeinsamer Grenzpunkt der Intervalle ist.
Da $\mathbb{T}$ mindestens zwei Elemente enthält, können wir ferner davon ausgehen, dass auch jedes der Intervalle I_n mindestens zwei Elemente enthält (das erreichen wir nötigenfalls durch Zusammenfassen mehrerer Intervalle zu einem einzigen).

Nach dem zweiten Lemma gibt es zu jedem $n \in N$ eine Funktion F_n: $I_n \longrightarrow \mathcal{X}$ und eine Menge D_n, so dass F_n mit D_n vordifferenzierbar ist und $F_n^\Delta(t) = f(t)$ für alle $t \in D_n$, wobei wir den Wert von F_n am einer ausgesuchten Stelle, etwa am linken Grenzpunkt a_n von $[a_n, b_n]$, frei vorgeben können. Dabei setzen wir an allen linken Grenzpunkten denselben Wert fest, etwa 0. Damit erreichen wir, dass für Intervalle I_n und I_m mit $n \neq m$, die einen gemeinsamen Grenzpunkt a haben, stets $F_n(a) = F_m(a)$ gilt (denn a ist dann für eines der Intervalle I_n, I_m der linke Grenzpunkt). Sei F die aus den F_n „zusammengesetzte“ Funktion $F : \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$, also die Vereinigung dieser Funktionen.

Sei G die Menge aller Grenzpunkte der Intervalle I_n, und G^* die Menge aller nicht-rechtszerstreuten Grenzpunkte. Da die Menge der Intervalle abzählbar ist, ist auch G und erst rechte G^* abzählbar.

Sei $D := (\bigcup_{n\in N} D_n) \setminus G^*$. Dann enthält D nicht das (eventuell existierende) Maximum von $\mathbb{T}$ (das ja $\in G^*$ ist), also ist auf jeden Fall $D \subseteq \mathbb{T}^\kappa$. Ferner ist $\mathbb{T}^\kappa \setminus D = \mathbb{T}^\kappa \setminus ((\bigcup_{n\in N} D_n) \setminus G^*) = (\mathbb{T}^\kappa \setminus \bigcup_{n\in N} D_n) \cup (\mathbb{T}^\kappa \cap G^*) = \bigcap_{n\in N}(\mathbb{T}^\kappa \setminus D_n) \cup (\mathbb{T}^\kappa \cap G^*) \subseteq (\mathbb{T}^\kappa \setminus D_0) \cup G^*$, wobei letzteres Vereinigung zweier abzählbarer Mengen, also selbst abzählbare Menge ist. Ferner enthält $\mathbb{T}^\kappa \setminus D$ keine rechts-zerstreuten Punkte (weil $\mathbb{T}^\kappa \setminus D$ und G^* keine solchen besitzt).

Weiter ist F in jedem $x \in \mathbb{T}$ stetig: ist x Element der offenen Menge $]a_n, b_n[$ oder $x = a_n = \min \mathbb{T}$ (so dass x Element der offenen Menge $]-\infty, b_n[$ ist) oder $x = b_n = \max \mathbb{T}$ (so dass x Element der offenen Menge $]a_n, \infty[$ ist), so folgt die Stetigkeit von F im Punkt x aus der Stetigkeit von F_n im Punkt x. Andernfalls ist x gemeinsamer Grenzpunkt $b_m = a_n$ zweier Intervalle I_m und I_n mit $a_m < b_m = x = a_n < b_n$: dann ist die aus F_n und F_m zusammengesetzte Funktion in x stetig, und da x Element der offenen Menge $]a_m, b_n[$ ist, ist auch F in x stetig. Insgesamt ist also F global stetig.

Außerdem ist F in jedem Punkt x aus einem $]a_n, b_n[\cap D_n$ gemäß Satz 91 differenzierbar mit $F^\Delta(s) = F_n^\Delta(s) = f(s)$. Damit ist F in jedem Punkt aus $D^\Delta := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \setminus G$ differenzierbar. Diejenigen Punkte s aus D aber, die nicht zu D^Δ gehören, sind rechts-zerstreute Grenzpunkte. In diesen ist F nach Satz 89 ebenfalls differenzierbar, wobei $F^\Delta(s) = \frac{F(\sigma(s))-F(s)}{\mu^*(s)}$. Da der Grenzpunkt s rechts-zerstreut uns somit nichtmaximal ist, ist s *linker* Grenzpunkt eines Intervalls I_n, und da I_n mindestens zwei Elemente enthält, ist auch $\sigma(s)$ Element von I_n. Dann zeigt aber Satz 89, dass $F^\Delta(s) = \frac{F(\sigma(s))-F(s)}{\mu^*(s)} = \frac{F_n(\sigma(s))-F_n(s)}{\mu^*(s)} = F_n^\Delta(s) = f(s)$. Insgesamt ist also F mit D vordifferenzierbar mit $\forall\ s \in D \quad F^\Delta(s) = f(s)$.

Sei schließlich $c := F(\tau)$, so ist $S\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ mit für alle $t \in \mathbb{T}:\ S(t) := F(t) - c + x$ ebenfalls mit D vordifferenzierbar mit $S^\Delta(t) = F^\Delta(t) = f(t)$ für alle $t \in D$.
Außerdem gilt $S(\tau) = x$. ■

Nr. 130 (Def) Cauchy-Integral

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $\mathcal{X}$ Banachraum, $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ Regelfunktion, und $F\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ eine Vorstammfunktion von f (eine solche existiert nach Satz 129). Sei $r, s \in \mathbb{T}$.

$\int_r^s f(x)\Delta\, x := F(s) - F(r)$, wobei diese Differenz unabhängig von der Wahl von F ist.

Dieser Term heißt das *Cauchy-Integral* der Funktion f in den Grenzen von r bis s.
f heißt der *Integrand* dieses Terms und $[r, s]$ sein *Integrationsintervall.*

Beweis der Unabhängigkeit von der Wahl von F. Seien F, G Vorstammfunktionen von f, die mit D_1 bzw. D_2 vordifferenzierbar sind. Dann ist $F - G$ auf $D := D_1 \cap D_2$ vordifferenzierbar und $(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ für alle $x \in D$. Nach Satz 104 ist $F - G$ auf $\mathbb{T}$ konstant, also für alle $x \in \mathbb{T} : F(x) - G(x) = \xi$ mit einem $\xi \in X$. Dann gilt aber $F(s) - F(r) = (\xi + G(s)) - (\xi + G(r)) = G(s) - G(r)$. ■

6.2 Eigenschaften des Cauchy-Integrals

Nr. 131 (Satz) Additivität bezüglich Integrationsbereich für Cauchy-Integrale

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $r, s \in \mathbb{T}$ mit $r < s$, $I = [r, s]$, $\mathcal{X}$ Banachraum, und $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$.
Sei $a, b, c \in I$.

1. *(Nullregel)* $\int_a^a f(x)\ \Delta x = 0$
2. *(Alternationsregel)* $\int_a^b f(x)\Delta x = -\int_b^a f(x)\Delta x$
3. *(Additionsregel)* $\int_a^c f(x)\Delta x = \int_a^b f(x)\Delta x + \int_b^c f(x)\ \Delta x$
4. *(Subtraktionsregel)* $\int_a^c f(x)\Delta x - \int_a^b f(x)\Delta x = \int_b^c f(x)\ \Delta\ x$

Beweis. Sei F eine Vorstammfunktion von f.

Zu (1). $\int_a^a f(x)\Delta x = F(a) - F(a) = 0.$

Zu (2). $\int_a^b f(x)\Delta x = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)\ \Delta x$

Zu (3). $\int_a^c f(x)\Delta x = F(c) - F(a) = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = \int_a^b f(x)\ \Delta x + \int_b^c f(x)\ \Delta x$

Zu (4). subtrahiere $\int_a^b f(x)\Delta x$ auf beiden Seiten von Gleichung (3). ■

Nr. 132 (Satz) Unabhängigkeit des Integrals von Verlauf des Integranden außerhalb der Integrationsgrenzen

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $\mathcal{X}$ Banachraum, $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ Regelfunktion.
Sei $r, s \in \mathbb{T}$ und I das abgeschlossene Intervall mit den Grenzen r, s.
Sei e die Einschränkung $e := f|I$ von f.

Dann ist $\int_r^s f(x)\Delta x = \int_r^s e(x)\Delta x$.

Unmittelbares Korollar: Ist $g\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ eine Regelfunktion mit $f|I = g|I$,
so gilt für alle $a, b \in \mathbb{T}$: $\int_a^b f(x)\Delta x = \int_a^b g(x)\Delta x$.

Beweis. Zunächst ist trivialerweise e wieder eine Regelfunktion, also sind beide Integrale wohldefiniert. Wegen 131(1) gilt die Behauptung im Fall $r = s$. Im Fall $r \neq s$ aber genügt es wegen Satz 131(2), den Fall $r < s$ zu betrachten. Sei also $r < s$ und somit $I = [r, s]$, und sei F mit D eine Vorstammfunktion von f, also F mit D vordifferenzierbar und $F^{\Delta}(x) = f(x)$ für alle $x \in D$. Sei $I^* := I \setminus \{s\}$. Wenn wir zeigen, dass $F|I$ mit $D \cap I^*$ vordifferenzierbar ist, so gilt wegen Satz 91 für alle $x \in D \cap I^*:\ (F|I)^{\Delta}(x) = f(x)(= e(x))$, also folgt per Def des Integrals $\int_a^b f(x)\Delta x = F(b) - F(a) = (F|I)(b) - (F|I)(a) = \int_a^b e(x)\Delta x$ und wir sind wir fertig.

Zu zeigen ist also nur die Vordifferenzierbarkeit von $F|I$. Dazu sind die Bedingungen aus Def 99 nachzuprüfen. Die Stetigkeitsbedingung folgt aus der Stetigkeit von F, ebenso die Differenzierbarkeitsbedingung aus Satz 91 und der entsprechenden Bedingung für F. Ferner ist die Bedingung $I^* \subseteq I^\kappa$, erfüllt, da I^* das Maximum s von I nicht enthält. Trivialerweise ist auch $I^* \subseteq \mathbb{T}^\kappa$, und es folgt
(A) $I^\kappa \setminus (D \cap I^*) = (I^\kappa \setminus D) \cup I^\kappa \setminus I^* \subseteq (I^\kappa \setminus D) \cup \{s\} \subseteq (\mathbb{T}^\kappa \setminus D) \cup \{s\}$,
was wegen der Abzählbarkeit von $\mathbb{T}^\kappa \setminus D$ abzählbar ist. Schließlich sind die Elemente von $\mathbb{T}^\kappa \setminus D$ nicht rechts-zerstreut in $\mathbb{T}$ (erst recht nicht in $I = [r, s]$) und s ist ebenfalls in I nicht rechts-zerstreut (sondern maximal). Insgesamt enthält $(\mathbb{T}^\kappa \setminus D) \cup \{s\}$ in I keine rechts-zerstreuten Punkt und wegen (A) gilt das erst recht für die Teilmenge $I^\kappa \setminus (D \cap I^*)$ von $(\mathbb{T}^\kappa \setminus D) \cup \{s\}$. ■

Nr. 133 (Satz) Unabhängigkeit des Integrals vom Wert des Integranden an den Integrationsgrenzen

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $\mathcal{X}$ Banachraum, $r, s \in \mathbb{T}$ mit $r \leq s$, $I := [r, s]$ und $f, g \in \mathcal{R}(I, \mathcal{X})$.

1. *(Unabhängigkeit vom Wert an der oberen Grenze)*
   Nehmen f, g höchstens an der oberen Grenze s verschiedene Werte an, so gilt
   $\int_r^s f(x)\Delta x = \int_r^s g(x)\Delta x$
2. *(Unabhängigkeit vom Wert an der unteren Grenze)*
   Ist die untere Grenze r nicht rechts-zerstreut
   und nehmen f, g höchstens in r verschiedene Werte an, so gilt
   $\int_r^s f(x)\Delta x = \int_r^s g(x)\Delta x$

Beweis. Zu (1). Im Fall $r = s$ folgt die Behauptung aus Satz 131(1). Sei also $r < s$ und $F\colon I \longrightarrow X$ mit D eine Vorstammfunktion von $f|I$, also F mit D vordifferenzierbar mit $\forall\, t \in D\ F(t) = f(t)$. Wegen Satz 132 gilt $\inf_r^s f(x)\Delta x = F(r) - F(s)$.
Wenn wir nun zeigen, dass F auch mit $D \setminus \{s\}$ vordifferenzierbar ist, so gilt $\forall\, t \in D \setminus \{s\}\ F(t) = f(t) = g(t)$, also folgt $\int_r^s f(x)\Delta x = F(s) - F(r) = \int_r^s g(x)\Delta x$ und wir sind fertig.

Somit bleibt nur zu zeigen, dass F mit $D \setminus \{s\}$ vordifferenzierbar ist. Hierzu sind die fünf Bedingungen aus Def 99 nachzuprüfen. Da F bereits mit D vordifferenzierbar ist, ist dies trivial: nur bei der dritten muss man etwas genauer hinschauen: es ist $I^\kappa \setminus (D \setminus \{s\} \subseteq (I^\kappa \setminus D) \cup \{s\}$; nach Voraussetzung sind die Elemente von $\mathbb{T}^\kappa \setminus D$ nicht rechts-zerstreut in I, dort ist auch s als Maximum von I nicht rechts-zerstreut. Also enthält $I^\kappa \setminus (D \setminus \{s\}$ keine rechts-zerstreuten Punkte von I.

Zu (2). Analog zu (1) ist zu zeigen, dass F mit $D \setminus \{r\}$ vordifferenzierbar ist. Hierzu ist der letzte Absatz des Beweises von (1) zu wiederholen, wobei r durch s und der Satzteil „s ist als Maximum von I ebenfalls nicht rechts-zerstreut“ durch „s ist nach Voraussetzung ebenfalls nicht rechts-zerstreut“ zu ersetzen ist. ■

Nr. 134 (Satz) Stammfunktion und Integration einer auf $\mathbb{T}^\kappa$ konstanten sprungstetigen Funktion

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $\mathcal{X}$ Banachraum und $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ mit $\forall\ t \in \mathbb{T}^\kappa\ f(t) = c$ für eine Konstante $c \in X$.

1. *Für beliebiges $\tau \in \mathbb{T}$ und $x \in X$ ist die Funktion $F\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ mit $\forall\ t \in \mathbb{T}\ F(t) = c\mu(t,\tau) + x$ eine Stammfunktion von f.*
2. *Für alle $a, b \in \mathbb{T}$ ist $\int_a^b f(t)\ \Delta t = c\mu(b,a)$, anders geschrieben $\int_a^b c\ \Delta t = c\,\mu(b,a)$.*

Beweis. Zu (1). Es ist dann F nach Sätzen 88, Satz 85 und 94 an jeder Stelle $t \in \mathbb{T}^\kappa$ differenzierbar mit $F^\Delta(t) = \mu(\sigma(t),\tau)0 + 1c = c = f(t)$.

Zu (2). Da F eine Stammfunktion von f ist, gilt $\int_a^b f(t)\Delta t = F(b) - F(a) = (c\,\mu(b,\tau) + x) - (c\,\mu(a,\tau) + x) \underset{Satz\ 66(1)}{=} c\,\mu(b,a)$. ■

Nr. 135 (Satz) Integration in den Grenzen von t bis $\sigma(t)$

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $t \in \mathbb{T}$, $\mathcal{X}$ Banachraum, und $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$.

$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta\tau = \mu^*(t)f(t)$

Beweis. Entweder ist $t = \sigma(t)$ oder $t < \sigma(t)$. Im ersten Fall ist die linke Seite nach Satz 131(1) gleich 0, und es ist auch $\mu^*(t) := \mu(\sigma(t), t) = \mu(t,t) = 0$.

Im zweiten Fall genügt es wegen Satz 132 zu zeigen, dass für die Funktion $e := f|[t, \sigma(t)]$ gilt $\int_t^{\sigma(t)} e(x)\Delta x = \mu^*(t)e(t)$. Nun ist e über $[t,\sigma(t)]^\kappa = \{t\}$ konstant $= f(t)$. Also folgt aus Satz 134 in der Tat, dass $\int_t^{\sigma(t)} e(x)\Delta x = f(t)\,\mu(\sigma(t), t) = f(x)\,\mu^*(t)$. ■

Nr. 136 (Satz) Integration einer [[-Treppenfunktion

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $a, b \in \mathbb{T}$, $a < b$, $I := [a, b]$, $\mathcal{X}$ Banachraum und $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$.
Sei $(a_0, \ldots, a_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$.
Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ sei f_j der konstante Wert von f auf $[a_{j-1}, a_j[$. Dann gilt:

$\int_a^b f(x)\Delta x = \sum_{j=1}^n f_j\,\mu(a_j, a_{j-1})$

Beweis. Wegen Satz 131(3) genügt es, zu jedem $j \in \{1, \ldots, n\}$ zu zeigen, dass
$\int_{a_{j-1}}^{a_j} f(x)\Delta x = f_j\mu(a_j, a_{j-1})$.
Dazu genügt es wegen Satz 132 zu zeigen, dass für die Einschränkung $e := f|[a_{j-1}, a_j]$ gilt:

$\int_{a_{j-1}}^{a_j} e(x)\Delta x = f_j\mu(a_j, a_{j-1})$.
Gehen wir von e zu der Funktion e^*: $[a_{j-1}, a_j] \longrightarrow \mathcal{X}$ über, die konstant $= f_i$ ist, so nehmen die Funktionen e und $e*$ höchstens im Punkt a_j verschiedene Werte an, und nach Satz 133 genügt es zu zeigen, dass $\int_{a_{j-1}}^{a_j} e^*(x)\Delta x = f_j\mu(a_j, a_{j-1})$ gilt. Dies gilt aber nach Satz 134(2). ∎

Nr. 137 (Satz) Integration einer][-Treppenfunktion

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $a, b \in \mathbb{T}$, $a < b$, $I := [a, b]$, $\mathcal{X}$ Banachraum und $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$.
Sei $(a_0, \ldots, a_n)$ Zerlegung von $[a, b]$ mit rechts-dichten Teilungspunkten $a_0, \ldots, a_{n-1}$
Letztere Bedingung garantiert, dass für $j \in \{1, \ldots, n\}$ das Intervall $]a_{j-1}, a_j[$ nichtleer ist[1], so dass wir für $j \in \{1, \ldots, n\}$ vom konstanten Wert f_j von f auf $]a_{j-1}, a_j[$ sprechen können.

$\int_a^b f(x)\Delta x = \sum_{j=1}^n f_j\, \mu(a_j, a_{j-1})$

Beweis. Wieder genügt es wegen Satz 131(3), zu jedem $j \in \{1, \ldots, n\}$ zu zeigen, dass $\int_{a_{j-1}}^{a_j} f(x)\Delta x = f_j\mu(a_j, a_{j-1})$.
Dazu genügt es wegen Satz 132 zu zeigen, dass für die Einschränkung $e := f|[a_{j-1}, a_j]$ gilt: $\int_{a_{j-1}}^{a_j} e(x)\Delta x = f_j\mu(a_j, a_{j-1})$.
Gehen wir von e zu der Funktion e^*: $[a_{j-1}, a_j] \longrightarrow \mathcal{X}$ über, die konstant $= f_i$ ist, so nehmen die Funktionen e und $e*$ höchstens in den beiden Punkten a_j und a_{j-1} verschiedene Werte an, wobei a_{j-1} rechts-dicht ist. Zweifache Anwendung von Satz 133 zeigt also: es genügt zu zeigen, dass $\int_{a_{j-1}}^{a_j} e^*(x)\Delta x = f_j\mu(a_j, a_{j-1})$. Das aber gilt nach Satz 134(2). ∎

Nr. 138 (Satz) Linearität des Cauchy-Integrals

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $r, s \in \mathbb{T}$, $\mathcal{X}$ ein $\mathbb{K}$-Banachraum, $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

$\int_r^s f(t) + g(t)\Delta t = \int_r^s f(t)\Delta t + \int_r^a g(t)\Delta t$ *sowie* $\int_r^s \lambda f(t)\Delta t = \lambda \int_r^s f(t)\Delta t$

Beweis. Beachte zunächst, dass $f + g$ sowie λf wegen Satz 113 Regelfunktionen sind, also sind die Terme wohldefiniert.

Ist nun F eine mit D_1 vordifferenzierbare Vorstammfunktion von f und G eine mit D_2 vordifferenzierbaren Vorstammfunktion von G, so ist aufgrund der Linearität der Ableitung $F + G$ eine mit $D_1 \cap D_2$ vordifferenzierbare Vorstammfunktion von $f + g$ und λF eine mit D_1 vordifferenzierbare Vorstammfunktion von λf.

Also ist $\int_r^s f(t)+g(t)\Delta t = (F+G)(s)-(F+G)(r) = F(s)-F(r)+G(s)-G(r) = \int_r^s f(t)\Delta t + \int_r^a g(t)\Delta t$, sowie $\int_r^s \lambda f(t)\Delta t = (\lambda F)(s) - (\lambda F)(r) = \lambda(F(s) - F(r)) = \lambda \int_r^s f(t)\Delta t$. ∎

[1] Außerdem wird auf diese Bedingung im Beweis benötigt, um Satz 133(2) anwenden zu können.

Nr. 139 (Satz) Cauchy-Integral komplexer und mehrdimensionaler Funktionen

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $r, s \in \mathbb{T}$, $n \in \mathbb{N}^{\odot}$, $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{K}^n$.
Für $i \in \{1, \dots, n\}$ bezeichne g_i die i-te Komponentenfunktion von g. Dann gilt:

1. $\int_r^s f(x)\Delta x = \int_r^s (\mathrm{Re}\, f)(x)\Delta x + i \int_r^s (\mathrm{Im}\, f)(x)\Delta x$
2. $\int_r^s g(x)\Delta x = (\int_r^s g_1(x)\Delta x, \dots, \int_r^s g_n(x)\Delta x)$

Beweis. Wir müssen jeweils zeigen, das die linke Seite genau dann definiert ist, wenn die rechte definiert ist, und dass im Fall der Definiertheit beide Seiten gleich sind. Die linke Seite ist nun genau dann definiert, wenn f bzw. g Regelfunktion ist; das ist nach Satz 121 genau dann der Fall, wenn $\mathrm{Re}\, f$ und $\mathrm{Im}\, f$ bzw. wenn alle Komponentenfunktionen g_i vom g Regelfunktionen sind, und genau dann ist die linke Seite definiert. Wir können also im weiteren annehmen, dass alle Terme definiert sind.

Zu (1). Wir wählen eine Vorstammfunktion $F\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ von f, so sind nach Satz 126 $\mathrm{Re}\, F$ und $\mathrm{Im}\, F$ Vorstammfunktionen von $\mathrm{Re}\, f$ bzw. $\mathrm{Im}\, f$. Es gilt also $\int_r^s f(x)\Delta x = F(s) - F(r)$, und $\int_r^s (\mathrm{Re}\, f)(x) = (\mathrm{Re}\, F)(s) - (Ref)(r) = \mathrm{Re}(F(x) - F(r)) = \mathrm{Re} \int_r^s f(x)\Delta x$. Ebenso folgt $\int_r^s (\mathrm{Im}\, f)(x) = (\mathrm{Im}\, F)(s) - (\mathrm{Im}\, f)(r) = \mathrm{Im}(F(x) - F(r)) = \mathrm{Im} \int_r^s f(x)\Delta x$.

Zu (2). Wir wählen eine Vorstammfunktion $F\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{K}^n$ von f, so ist für $i \in \{1, \dots, n\}$ nach Satz 126 die Funktion F_i jeweils Vorstammfunktion von f_i. Es gilt also $\int_r^s f(x)\Delta x = F(s) - F(r)$, also ist die i-te Komponente von $\int_r^s f(x)\Delta x$ jeweils gleich $F_i(s) - F_i(r)$, und das ist gleich $\int f_i(x)\Delta x$. ■

Nr. 140 (Satz) Partielle Integration

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, und $r, s \in \mathbb{T}$.
Seien $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ $\mathbb{K}$-Banachräume und $\cdot$ Multiplikation zwischen diesen (vgl. Def 95).
Seien $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow X_1$ und $g\colon \mathbb{T} \longrightarrow X_2$ differenzierbar und seien f^Δ und g^Δ Regelfunktionen.

$\int_r^s f(\sigma(t))g^\Delta(t)\Delta t + \int_r^s f^\Delta(t)g(t)\Delta t = f(s)g(s) - f(r)g(r).$

Beweis. Beachte zunächst, dass $(\sigma \circ f) \cdot g^\Delta$ und $f^\Delta \cdot g$ wegen Satz 113 Regelfunktionen sind, also sind die Terme wohldefiniert.
Sei nun $h\colon \mathbb{T} \longrightarrow X$ Funktion mit $h(t) = f(t)g(t)$ für alle $t \in \mathbb{T}$. Nach Satz 96 ist h differenzierbar mit $h^\Delta(t) = f(\sigma(t))g^\Delta(t) + g(t)f^\Delta(t)$ für alle $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Es ist h^Δ nach Satz 113 Regelfunktion und h Stammfunktion von h^Δ. Daher gilt für alle $r, s \in \mathbb{T}$:
$\int_r^s f(\sigma(t))g^\Delta(t) + g(t)f^\Delta(t)\Delta t = h(r) - h(s)$, das heißt per Def von h und per Linearität
$\int_r^s f(\sigma(t))g^\Delta(t)\Delta t + \int_r^s g(t)f^\Delta(t)\Delta t = f(r)g(r) - f(s)g(s)$. ■

Nr. 141 (Satz) Integralungleichung für Cauchy-Integrale

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $\mathcal{X}$ Banachraum.
Seien $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow X$ und $g\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ Regelabbildungen.
Seien $r, s \in \mathbb{T}^\kappa$ mit $r \leq s$ und $\|f(t)\| \leq g(t)$ für alle $t \in [r,s]^\kappa$.

$\| \int_r^s f(t)\Delta t\| \leq \int_r^s \|f(t)\|\Delta t \leq \int_r^s g(t)\Delta t \leq \sup_{t\in[r,s]^\kappa} g(t)\mu(s,r)$

Als unmittelbares Korollar folgt im Spezialfall $g = \|f\|$:
$\| \int_r^s f(t)\Delta t\| \leq \int_r^s \|f(t)\|\Delta t \leq \sup_{t\in[r,s]^\kappa} \|f(t)\|\mu(s,r)$

Beweis (vgl. [Hil 88, Satz 4.4(iii), S. 33-34]. Wegen $\|f\| = f \circ h$ (mit $h :=$ Normfunktion des Banachraums $\mathcal{X}$) und Satz 113 ist $\|f\|$ eine Regelabbildung. Somit besitzen $f, \|f\|$ und g jeweils eine Vorstammfunktion F mit D_1 bzw. F_1 mit D_2 bzw. G mit D_3. Ist $D := \bigcap_{i=1}^3 D_i$, so sind F, F_1, G auch mit D Vorstammfunktionen von f bzw. $\|f\|$ bzw. g.

Sei $H\colon [r,s] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $H(t) := \sup g[[r,s]^\kappa] \cdot \mu(t,r)$. Das Supremum ist reell, da $[r,s]$ kompakt ist, und die Regelfunktion g die Kompaktheit überträgt (Satz 114), ist $g[[r,s]]$ eine kompakte und daher beschränkte Teilmenge der Zeitkette $\mathbb{R}$. Erst recht ist die Teilmenge $g[[r,s]^\kappa]$ von $g[[r,s]]$ beschränkt. — H ist nach den Sätzen 88 und 94 differenzierbar mit $H'(t) = \sup g[[r,s]^\kappa]$ für alle $t \in [r,s]^\kappa$.

Für $t \in [r,s]^\kappa \cap D$ gilt dann: $\|F^\Delta(t)\| = \|f(t)\| = F_1^\Delta(t)$, erst recht $\|F^\Delta(t)\| \leq F_1^\Delta(t)$.
Damit sind die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes erfüllt, und dieser liefert
(A) $\|F(s) - F(r)\| \leq F_1(s) - F_1(r)$.

Weiter gilt für $t \in [r,s]^\kappa \cap D$: $|F_1'(t)| = \|f(t)\| \leq g(t) = G'(t)$, und der Mittelwertsatz liefert
(B) $|F_1(s) - F_2(r)| \leq G(s) - G(r)$.

Schließlich gilt für $t \in [r,s]^\kappa \cap D$: $|G'(t)| = G'(t) = g(t) \leq \sup g[[r,s]^\kappa] = H'(t)$, also
(C) $\|G(s) - G(r)\| \underset{Mittelwertsatz}{\leq} H(s) - H(r) = \sup g[[r,s]^\kappa](\mu(s,r) - \mu(r,r))$
$\underset{Satz\ 66(2)}{=} \sup g[[r,s]^\kappa]\mu(s,r)$.

Da die rechte Seite von (A) kleinergleich der linken von (B) ist und die rechte von (B) kleinergleich der linken von (C), folgt

$\|F(s) - F(r)\| \leq |F_1(s) - F_2(r)| \leq G_1(s) - G_1(r) \leq \sup g[[r,s]^\kappa]\mu(s,r)$, das heißt

$\| \int_r^s f(t)\ \Delta t\| \ \leq\ | \int_r^s \|f(t)\|\ \Delta t| \ \leq\ \int_r^s g(t)\ \Delta t \ \leq\ \sup g[[r,s]^\kappa]\mu(s,r)$,

wobei für $| \int_r^s \|f(t)\|\ \Delta t|$ trivialerweise $\int_r^s \|f(t)\|\ \Delta t$ gesetzt werden kann. ■

Nr. 142 (Satz) Konvergenzsatz für Cauchy-Integrale

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette mit $a = \min \mathbb{T} < \max \mathbb{T} = b$ und $\mathcal{X}$ Banachraum, und strebe die Folge (f_n) von Funktionen $f_n \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ gleichmäßig gegen f.

Dann strebt $\left(\int_a^b f_n(t)\Delta t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\int_a^b f(t)\Delta t$.

Beweis nach [Hil 88, Satz 4.4(iii), S. 33-34]. Zunächst gilt wegen Satz 112, dass $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$, also sind die Terme wohldefiniert. — Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wegen $b > a$ ist $\mu(b, a) > 0$ und darum $\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{\mu(b,a)}$ wohldefiniert und positiv. Also gibt es zu ε_1 ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit für alle $n \geq n_0$: $\sup_{t\in[a,b]} \|f_n(t) - f(t)\| \leq \varepsilon_1$. Es folgt per Linearität und Integralungleichung:
$\| \int_a^b f_n(t)\Delta t - \int_a^b f(t)\Delta t\| = \| \int_a^b [f_n(t) - f(t)]\Delta t\| \leq \sup_{t\in[a,b]^\kappa} \|f_n(t) - f(t)\|\mu(b, a) \leq \varepsilon$. ■

Nr. 143 (Satz) Existenz von Stammfunktionen für rd-stetige Funktionen

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $r \in \mathbb{T}$, $\mathcal{X}$ Banachraum und $f \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$.

Dann besitzt f die Stammfunktion $F\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ mit $F(t) := \int_r^t f(s)\Delta s$.

Beweis (vgl. [Hil 88, Satz 4.4, S. 38-39]. Es ist $F\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$, $F(t) = S(t) - S(r)$, wobei S mit einem D eine Vorstammfunktion von f ist, also $S^\Delta(t) = f(t)$ für alle $t \in D$ gilt. Für $t \in D$ ist dann auch $F^\Delta(t) = S^\Delta(t) = f(t)$. Es bleibt noch zu zeigen, dass F auch in Punkten $t \in \mathbb{T}^\kappa \setminus D$ differenzierbar ist mit Ableitung $f(t)$.

Sei also t ein solcher Punkt; da t nicht rechts-zerstreut ist, gilt $\sigma(t) = t$. Als Regelfunktion ist f in t stetig. Es gibt also zu $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von t mit

(A) $\|f(s) - f(t)\| \leq \varepsilon$ für alle $s \in U$.

Für festes $\tau \in \mathbb{T}$ ist die Funktion $h\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ mit $\forall\ s \in \mathbb{T}\ h(s) := F(s) - f(t)\mu(s, \tau)$ mit D vordifferenzierbar, wobei $\forall\ s \in D\ \ h^\Delta(s) = F^\Delta(s) - f(t) = f(s) - f(t)$. Mit (A) folgt:

(B) $\forall\ s \in D \cap U\ \ \|h^\Delta(s)\| \leq \varepsilon$. Damit folgt für $r \in U$:

$$\|F(t) - F(r) - f(t)\mu(t, r)\| \underset{(F(r)=0;\ -f(t)\mu(t,r)=f(t)\mu(r,t))}{=} \|(F(t) - 0) - (F(r) - f(t)\mu(r, t))\|$$
$$\underset{(\mu(t,t)=0)}{=} \|(F(t) - f(t)\mu(t, t)) - (F(r) - f(t)\mu(r, t))\| = \|h(t) - h(r)\|,$$

letzteres ist nach Satz 103 kleinergleich $\sup_{x\in U^\kappa\cap D} \|h^\Delta(s)\| \cdot |\mu(t, r)|$, das ist wegen (B) kleinergleich $\varepsilon|\mu(t, r)|$. Insgesamt ist, wenn man noch $\sigma(t) = t$ beachtet:

$$\|F(t) - F(r) - f(t)\mu(\sigma(t), r)\| \leq \varepsilon|\mu(\sigma(t), r)|.$$

Damit besitzt F im Punkt t die Ableitung $f(t)$. ■

7 Das Riemann-Integral

Von diesem Kapitel an geht es darum, über das reine Cauchy-Integral hinausgehende Integralbegriffe auf Maßketten zu übertragen.

Nr. 144 (Satz und Def) Riemann-Integrierbarkeit und Riemann-Integral in der reellen Analysis

Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, sei $\mathcal{X}$ Banachraum und $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathcal{X}$.

f ist *Riemann-integrierbar*
$:\Leftrightarrow$ es existiert ein $x \in X$ mit folgender Eigenschaft:
zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$,
so dass für alle Zerlegungen $Z = (a_0, \ldots, a_n)$ mit $\triangle_Z < \delta$
und jede Wahl von Zwischenpunkten $\xi_j \in [a_{j-1}a_j]$ $(j \in \{1, \ldots, n\})$ gilt:
$\|x - \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\mu(a_j, a_{j-1})\| \leq \varepsilon$

Ist f Riemann-integrierbar, so ist x eindeutig bestimmt. Dieses x heißt das *Riemann-Integral* von f und wird mit $\int f$ oder $\int_{[a,b]} f$ oder $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ bezeichnet.

Beweis. Wir führen den Beweis in drei Teilen.

(1). Hätte y dieselbe Eigenschaft wie x, so gibt es zu vorgegebenem ε ein $\delta_1 > 0$ und ein $\delta_2 > 0$, so dass für alle Zerlegungen $Z = (a_0, \ldots, a_n)$ mit $\triangle_Z < \delta_1$ und jede Wahl entsprechender Zwischenpunkte ξ_j gilt $\|x - \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\mu(a_j, a_{j-1})\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, und außerdem für alle Zerlegungen $Z = (()a_0, \ldots, a_m)$ mit $\triangle_Z < \delta_2$ und jede Wahl entsprechender Zwischenpunkte ξ_j gilt $\|y - \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\mu(a_j, a_{j-1})\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Sei nun $\delta_3 := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Dann gilt für alle Zerlegungen $Z = (a_0, \ldots, a_n)$ mit $\triangle_Z < \delta_3$ und jede Wahl entsprechender Zwischenpunkte ξ_j, dass
$\|x - \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(a_j - a_{j-1})\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ sowie $\|y - \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\mu(a_j, a_{j-1})\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

(2). Nun gilt für jedes $\delta > 0$, dass es eine Zerlegung Z von $[a, b]$ mit $\triangle_Z < \delta$ gibt: zu δ gibt es nämlich eine positive Zahl δ^*, die kleiner als δ ist, und nach dem archimedischen Satz gibt es ein kleinstes $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{b-a}{\delta^*}$, das heißt mit $n\delta^* > b - a$. Dieses kleinste n sei n_0. Wähle nun als Z die Zerlegung mit den Teilungspunkten $a_n := a + n\delta^*$ für $n \in \{0, \ldots, n_0 - 1\}$, und füge im Fall, dass der letzte dieser Teilungspunkte a_{n_0-1} von b verschieden ist (dann ist er kleiner als b) noch den Punkt b als letzten Teilungspunkt hinzu. Dann ist Z auf jeden Fall eine Zerlegung mit der Feinheit $\triangle_Z \leq \delta^* < \delta_3$.

(3). Wir können also auch zu δ_3 eine Zerlegung $Z = (a_0, \dots, a_n)$ mit $\triangle_Z < \delta$ wählen, und als Zwischenpunkte ξ_j jeweils den linken Grenzpunkt des Intervalls $[a_{j-1}, a_j]$ nehmen. Dann folgt: $\|x - y\| = \|x - \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(a_j - a_{j-1}) - (y - \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(a_j - a_{j-1}))\|$
$\leq \|x - \sum_{j=1}^n f(\xi_j)\mu(a_j, a_{j-1})\| - \|(y - \sum_{j=1}^n f(\xi_j)\mu(a_j, a_{j-1}))\| \leq \varepsilon$.
Da dies für jedes positive ε gilt, folgt $\|x - y\| = 0$, also $x = y$. ■

Überlegung zur Übertragung des Riemann-Integrals auf allgemeine Maßketten

Es soll nun die Definition der Riemann-Integrierbarkeit und des Riemann-Integrals auf allgemeine Maßketten übertragen werden. Damit die Riemann-Integrierbarkeit sinnvoll ist, muss gesichert sein, dass in Def 144 genannte Element $x \in X$ eindeutig bestimmt ist. Der entscheidende Punkt im Beweis der Eindeutigkeit von x war nun aber der zweite Teil, in dem gezeigt wurde, *dass es zu einer beliebigen positiven Zahl δ stets eine Zerlegung Z gibt, deren Feinheit kleiner als diese Zahl ist.* Das muss bei allgemeinen Maßketten keineswegs der Fall sein (z. B. ist in der diskreten Maßkette $\mathbb{Z}$ die Feinheit jeder Zerlegung eines Intervalls dieser Maßkette stets ≥ 1). Daher erscheint es sinnvoll, die Forderung der Eindeutigkeit von x explizit in die Definition aufzunehmen. Wird diese nicht gefordert, spreche ich von Prä-Riemann-Integrierbarkeit. Wie sich dann allerdings herausstellen wird (Satz 146), stimmen in dicht geordnete Maßketten beide Begriffe überein (es folgt dann also die Eindeutigkeit von x aus der Existenz), während auf Maßketten, die nicht dicht geordnet sind (abgesehen vom Trivialfall, dass $\mathcal{X}$ der Nullraum ist) überhaupt keine Riemann-integrierbaren Funktionen existiert.

Nr. 145 (Def) Prä-Riemann-Integrierbarkeit, Riemann-Integrierbarkeit, die Menge $\mathcal{I}_R(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ und das Riemann-Integral auf Maßketten

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette mit $a = \max \mathbb{T} < \min \mathbb{T} = b$, $\mathcal{X}$ Banachraum und $f \colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$.

f ist *Prä-Riemann-Integrierbar* bzw. *Riemann-integrierbar*
:$\Leftrightarrow$ es existiert ein bzw. es existiert *genau* ein $x \in X$ mit folgender Eigenschaft:
zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$,
so dass für alle Zerlegungen $Z = (a_0, \dots, a_n)$ von $\mathbb{T}$ mit $\triangle_Z < \delta$
und jede Wahl von Zwischenpunkten $\xi_j \in [a_{j-1} a_j]$ $(j \in \{1, \dots, n\})$ gilt:
$\|x - \sum_{j=1}^n f(\xi_j)\mu(a_j, a_{j-1})\| \leq \varepsilon$

Im Fall der Riemann-Integrierbarkeit heißt dieses x das
Riemann-Integral von f und wird mit $\int f$ oder $\int_{\mathbb{T}} f$ oder $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ bezeichnet.

Sei $\mathcal{I}_R(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen $f \colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$.

Nr. 146 (Satz) Kriterium für Riemann-Integrierbarkeit

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette mit $a = \max \mathbb{T} < \min \mathbb{T} = b$, $\mathcal{X}$ Banachraum und $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$.

1. *Falls $\mathbb{T}$ nicht dicht geordnet ist, so ist*
   f genau dann Riemann-integrierbar, wenn $\mathcal{X}$ der Nullraum ist.
2. *Falls $\mathbb{T}$ dicht geordnet ist, so ist*
   f genau dann Riemann-integrierbar, wenn f Prä-Riemann-integrierbar ist.
3. *Ist $\mathcal{X}$ nicht der Nullraum, so setzt die Riemann-Integrierbarkeit von f voraus,*
   dass $\mathbb{T}$ isomorph zu einem reellen Intervall ist,
   dass jeder Punkt von $]a, b]$ bzw. $[a, b[$ links-dicht bzw. rechts-dicht ist, und
   dass die Körnigkeit μ^* von $\mathbb{T}$ ist konstant $= 0$ ist.

Beweis. Zu (1). Sei $\mathbb{T}$ nicht dicht geordnet. Dann folgt aus Def 19, dass in $[a, b[$ mindestens ein rechts-zerstreuter Punkt t vorkommt. Für jede Zerlegung $Z = (a_0, \dots, a_n)$ von $\mathbb{T}$ gibt es dann ein $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $a_{j-1} \leq t$ und $a_j \geq \sigma(t)$, und daher gilt $\triangle_Z \geq \mu(a_j, a_{j-1}) \geq \mu(t, \sigma(t))$. Sei nun $x \in X$ beliebig, und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wählen wir dann ein positives $\delta \leq \mu(t, \sigma(t))$, so gibt es keine Zerlegungen $Z := (a_0, \dots, a_n)$ mit $\triangle_Z < \delta$. Darum garantiert die Leermengen-Konvention, dass für jede solche Zerlegung $Z := (a_0, \dots, a_n)$ (die es gar nicht gibt) und für jede Wahl von Zwischenpunkten $\xi_j \in [a_{j-1} a_j]$ ($j \in \{1, \dots, n\}$) gilt:

$\|x - \sum_{j=1}^n f(\xi_j)\mu(a_j, a_{j-1})\| \leq \varepsilon.$

Da dies für jedes beliebige $x \in X$ gilt, so ist f genau dann Riemann-integrierbar, wenn es genau ein $x \in X$ gibt. Das gilt genau dann, wenn $\mathcal{X}$ der Nullraum ist.

Zu (2). Sei $\mathbb{T}$ dicht geordnet. Dass Riemann-integrierbare Funktionen Prä-Riemann-integrierbar sind, ist klar. Sei umgekehrt die Prä-Riemann-Integrierbarkeit vorausgesetzt. Um die Riemann-Integrierbarkeit von f zu zeigen, müssen wir wie im Beweis von Satz 144 zeigen, dass aus der Existenz eines x seine Eindeutigkeit folgt. Dazu können wir den dortigen Beweis übernehmen mit Ausnahme der Argumentation in Teil (2), dass es zu jedem $\delta > 0$ eine Zerlegung Z von $\mathbb{T}$ gibt mit $\triangle_Z < \delta$. Diese Argumentation ersetzen wir durch die folgende:

Nach Satz 80 gibt es einen Isomorphismus g von $\mathbb{T}$ in ein reelles Intervall $\mathbb{T}'$. Zu jedem $\delta > 0$ gibt es eine Zerlegung $Z' = (b_0, \dots, b_n)$ dieses Intervalls mit $\triangle_Z < \delta$, wie im Beweis von Satz 144 gezeigt. Da f surjektiv ist, gibt es für $n \in \{0, \dots, n\}$ jeweils ein $a_n \in \mathbb{T}$ mit $f(a_n) = b_n$. Wegen der strengen Isotonie des Isomorphismus f ist $a = a_0 < \cdots < a_n = b$, das heißt $(a_0, \dots, a_n)$ ist eine Zerlegung von $\mathbb{T}$. Per Def des Maßketten-Isomorphismus ist außerdem $\mu(a_j, a_{j-1}) = \mu_{\mathbb{R}}(b_j, b_{j-1}) < \delta$ für $j \in \{1, \dots, n\}$, das heißt es ist $\triangle_Z < \delta$.

Zu (3). Ist f Riemann-integrierbar, aber $\mathcal{X}$ nicht der Nullraum, so zeigt Aussage (1), dass $\mathbb{T}$ dicht geordnet sein muss, also nach Satz 80 isomorph zu einem reellen Intervall. Aus der dichten Ordnung folgt mit Blick auf Satz 36(1) auch, dass alle $t \in]a,b]$ links-dicht und alle $t \in [a,b[$ rechts-dicht sind. Letzteres impliziert $\sigma(t) = t$ für alle $t \in [a,b[$, und da trivialerweise $\sigma(b) = b$, gilt $\forall\ t \in [a,b]\ \ \sigma(t) = t$, so dass $\mu^*(t) = \mu(\sigma(t), t) = 0$. ■

Übergang zum Cauchy-Riemann-Integral

Nach Satz 146(3) setzt die Riemann-Integrierbarkeit einer Funktion von einer Maßkette $\mathbb{T}$ in einen Banachraum $\mathcal{X}$ voraus, dass $\mathcal{X}$ der Nullraum ist oder dass es sich bei der zugrundeliegenden Maßkette $\mathbb{T}$ bis auf Isomorphie um ein reelles Intervall handelt. Es ist daher das Riemann-Integral für allgemeine Maßketten kein besonders interessanter Integralbegriff.

Für den Maßkettenkalkül besser geeignet ist das im folgenden vorgestellte *Cauchy-Riemann-Integral*. Dieses wird im Rahmen der kontinuierlichen Analysis von Amann ([Ama 99, Kap. VI.3, S. 16-24]) für banachraumwertige Funktionen eingeführt. Dabei wird zunächst in naheliegender Weise ein Integral für][-Treppenfunktionen definiert. Die dadurch festgelegte Integralfunktion $\int_{\mathbb{T}} : \mathcal{T}_{][}(\mathbb{T}, \mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{X}$, die jeder Treppenfunktion ein $x \in \mathcal{X}$ als ihr Integral zuordnet, läßt sich mittels eines Fortsetzungssatzes (Satz 160) zu einer Funktion mit Definitionsbereich $\overline{\mathcal{T}_{][}(\mathbb{T}, \mathcal{X})}$ erweitern. Da $\overline{\mathcal{T}_{][}(\mathbb{T}, \mathcal{X})}$ nach Satz 122 gleich der Menge $\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ der sprungstetigen Funktionen von $\mathbb{T}$ in $\mathcal{X}$ ist, ordnet die erweiterte Integralfunktion dann jeder sprungstetigen Funktionen $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ ein Element $x \in X$ zu, welches das Cauchy-Riemann-Integral von f genannt wird.

Die Cauchy-Riemann-integrierbaren Funktionen sind demnach genau die sprungstetigen Funktionen, und es läßt sich zeigen, dass die so definierten Cauchy-Riemann-integrierbaren Funktionen auch Riemann-integrierbar sind und ihr Cauchy-Riemann-Integral mit dem Riemann-Integral übereinstimmt (siehe Satz 173).

Die Darstellung von Amann war für mich der Ausgangspunkt für die im folgenden durchgeführte Übertragung dieses Integralbegriffs auf allgemeine Maßketten. Dabei stellt sich heraus, dass die Konstruktion des Cauchy-Riemann-Integrals mittels][-Treppenfunktionen nur in dicht geordneten Maßketten sinnvoll ist; im allgemeinen Fall müssen die][-Treppenfunktionen durch die [[-Treppenfunktionen ersetzt werden (siehe unten, Satz 156). Dementsprechend ist dann auch der Bereich der Cauchy-Riemann-integrierbaren Funktion abzuändern; dieser ist nicht mehr $\overline{\mathcal{T}_{][}(\mathbb{T}, \mathcal{X})}$ (was nach Satz 122 gleich $\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ ist), sondern $\overline{\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T}, \mathcal{X})}$ (was nach Satz 123 eine echte Teilmenge von $\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ sein kann). Es empfiehlt sich, für die Cauchy-Riemann-integrierbaren Funktionen auf Maßketten eine eigene Bezeichnung einzuführen, womit das nächste Kapitel beginnt.

8 Das Cauchy-Riemann-Integral

8.1 Konstruktion des Cauchy-Riemann-Integrals

Nr. 147 (Def) Cauchy-Riemann-integrierbare Funktion und die Menge $\mathcal{I}_{CR}$

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette mit $\max\mathbb{T} < \min\mathbb{T}$ und $\mathcal{X}$ Banachraum.

$$\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathcal{X}) := \begin{cases} \overline{\mathcal{T}_{][}(\mathbb{T},\mathcal{X})} = \mathcal{R}(\mathbb{T},\mathcal{X}) & \text{falls } \mathbb{T} \text{ dicht geordnet ist} \\ \overline{\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})} & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $\overline{\mathcal{T}_{][}(\mathbb{T},\mathcal{X})}$ bzw. $\overline{\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})}$ den Abschluss von $\mathcal{T}_{][}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ bzw. $\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ in $\mathcal{B}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ bezeichnet

Die Elemente von $\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ nennen wir *Cauchy-Riemann-integrierbaren Funktionen* oder kurz *CR-integrierbaren Funktionen* von der Maßkette $\mathbb{T}$ in $\mathcal{X}$.

Nr. 148 (Satz) Teilmengenverhältnis von $\overline{\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})}$ und $\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathcal{X})$

Ist $\mathbb{T}$ Maßkette mit $\max\mathbb{T} < \min\mathbb{T}$ und $\mathcal{X}$ Banachraum, so gilt $\overline{\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})} \subseteq \mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathcal{X})$.

Beweis. Nach Satz 119 gilt $\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{T}_{][}(\mathbb{T},\mathcal{X})$, somit folgt die Behauptung aus Def 147. ∎

Nr. 149 (Satz) Teilmengenverhältnis von $C_{rd}(\mathbb{T},\mathcal{X})$, $\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ und $\mathcal{R}(\mathbb{T},\mathcal{X})$

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette mit $\max\mathbb{T} < \min\mathbb{T}$ und $\mathcal{X}$ Banachraum. Dann gilt:

1. $C_{rd}(\mathbb{T},\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{R}(\mathbb{T},\mathcal{X})$
2. *Ist $\mathbb{T}$ dicht geordnet ist, kann das zweite $\subseteq$ sogar durch $=$ ersetzt werden.*
3. *Ist $\mathbb{T}$ nicht dicht geordnet und $\mathcal{X}$ nicht der Nullraum,*
   so ist das zweite Teilmengenverhältnis echt,
   und wenn es einen zugleich rechts- und links-dichten Punkt gibt, auch das erste.

Beweis. Zu (1) und (2). Nach Satz 123(1) gilt $\mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T},\mathcal{X}) \subseteq \overline{\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})} \subseteq \mathcal{R}(\mathbb{T},\mathcal{X})$. Ist nun $\mathbb{T}$ nicht dicht geordnet, gilt per Def $\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathcal{X}) = \mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ und wir sind fertig.

Wenn aber $\mathbb{T}$ dicht geordnet ist, ist per Def $\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathcal{X}) = \mathcal{T}_{][}(\mathbb{T},\mathcal{X})$, und die Behauptung folgt nun wegen $\mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T},\mathcal{X}) \underset{Satz\ 123}{\subseteq} \overline{\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})} \subseteq \overline{\mathcal{T}_{][}(\mathbb{T},\mathcal{X})} \underset{Satz\ 122}{=} \mathcal{R}(\mathbb{T},\mathcal{X})$

(3) folgt aus den Zusätzen zu Satz 123) wenn man beachtet, dass es in einem dicht geordnetem $\mathbb{T}$ stets einen rechts-dichten Punkt $t \in [a,b[$ gibt. ■

Nr. 150 (Satz) $\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ als Untervektorraum von $\mathcal{R}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ und $\mathcal{B}(\mathbb{T},\mathcal{X})$

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette mit $\min\mathbb{T} < \max\mathbb{T}$ und $\mathcal{X}$ Banachraum.

1. *$\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ Untervektorraum von $\mathcal{R}(\mathbb{T},\mathcal{X})$*
2. *(unmittelbares Korollar) Da $\mathcal{R}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ Untervektorraum von $\mathcal{B}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ ist (Satz 107) ist also auch $\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ Untervektorraum von $\mathcal{B}(\mathbb{T},\mathcal{X})$.*

Beweis. Nach Satz 149 ist $\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ Teilmenge von $\mathcal{R}(\mathbb{T},\mathcal{X})$. Dass dann $\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ sogar Untervektorraum von $\mathcal{R}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ ist, folgt trivial aus der Linearität der Grenzwertbildung. ■

Nr. 151 (Satz) Bewahrung der CR-Integrierbarkeit bei gleichmäßiger Konvergenz

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette mit $\max\mathbb{T} < \min\mathbb{T}$ und $\mathcal{X}$ Banachraum.

Jede gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen aus $\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ strebt gegen eine Funktion aus $\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathcal{X})$.

Beweis. Für dicht geordnetes $\mathbb{T}$ siehe Satz 112. Sei $\mathbb{T}$ nicht dicht geordnet. Wegen $\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathcal{X}) = \overline{\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ ist dann $\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ eine abgeschlossene Menge des Raumes $\mathcal{B}(\mathbb{T},\mathcal{X})$. Jede dort konvergente Folge in $\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ (d. h. jede gleichmäßig konvergente Folge CR-integrierbarer Funktionen) konvergiert also gegen ein Element von $\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathcal{X})$. ■

Nr. 152 (Satz) $\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ als abgeschlossener Untervektorraum und Banachraum

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette mit $\min\mathbb{T} < \max\mathbb{T}$ und $\mathcal{X}$ Banachraum.

$\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ ist Banachraum und ein im Raum $\mathcal{B}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ abgeschlossener Untervektorraum.

Beweis. Nach Satz 150 liegt ein Untervektorraum vor, und als Abschluss einer Teilmenge von $\mathcal{B}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ ist $\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{B}(\mathbb{T},\mathcal{X})$. Da $\mathcal{B}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ ein Banachraum ist, konvergiert jede Cauchyfolge in $\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ (weil es eine Cauchyfolge in $\mathcal{B}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ ist) gegen ein $f \in \mathcal{B}(\mathbb{T},\mathcal{X})$. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ liegt aber f wieder in $\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathcal{X})$. Somit ist $\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ selbst ein Banachraum. ■

Nr. 153 (Def) [[-Zerlegungssumme für [[-Treppenfunktionen

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette mit $\max \mathbb{T} < \min \mathbb{T}$ und $\mathcal{X}$ Banachraum.
Sei $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ eine [[-Treppenfunktion und $Z = (a_0, \dots, a_n)$ eine [[-Zerlegung für f.
Sei f_j der konstante Wert von f über $[a_{j-1}, a_j[$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.

$\int_{[Z[} f \;:=\; \sum_{i=1}^{n} f_i \mu(a_j, a_{j-1})$
Wir bezeichnen $\int_{[Z[} f$ als *die Zerlegungssumme über der* [[-*Zerlegung* Z *für* f.

Nr. 154 (Def)][-Zerlegungssumme für][-Treppenfunktionen

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette mit $\max \mathbb{T} < \min \mathbb{T}$ und $\mathcal{X}$ Banachraum.
Sei $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ eine][-Treppenfunktion und $Z = (a_0, \dots, a_n)$ eine][-Zerlegung für f, *derart dass* $]a_{j-1}, a_j[$ *für* $j \in \{1, \dots, n\}$ *nichtleer ist* (dies gilt z. B. für dicht geordnetes $\mathbb{T}$).
Sei f_j der konstante Wert von f über $]a_{j-1}, a_j[$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$

$\int_{]Z[} f \;:=\; \sum_{i=1}^{n} f_i \mu(a_j, a_{j-1})$
Wir bezeichnen $\int_{]Z[} f$ als *die Zerlegungssumme über der*][-*Zerlegung* Z *für* f.

Nr. 155 (Satz) Verhältnis von [[- und][-Zerlegungssummen

Sei $\mathbb{T}$ *Maßkette mit* $\max \mathbb{T} < \min \mathbb{T}$ *und* $\mathcal{X}$ *Banachraum.*
Sei $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ *eine*][*und damit zugleich* [[-*Treppenfunktion,*
und sei Z *eine* [[- *und somit auch eine*][-*Zerlegung für* f.

Dann stimmen entweder die Zerlegungssummen $\int_{[Z[} f$ *und* $\int_{]Z[} f$ *überein,*
oder der erste Term ist definiert und der andere undefiniert.
Letzteres kann nur vorkommen, wenn $\mathbb{T}$ *nicht dicht geordnet ist.*

Beweis. Im Fall der Definiertheit ist die Übereinstimmung aus den gleichlautenden Definitionen ersichtlich. Während $\int_{[Z[} f$ für jede [[-Zerlegung von f stets definiert ist, ebenso wie $\int_{]Z[} f$ für dicht geordnetes $\mathbb{T}$, kann für nicht dicht geordnetes $\mathbb{T}$ der Fall eintreten, dass für eine][-Zerlegung Z die Zerlegungssumme *nicht* definiert ist.
Sei etwa $\mathbb{T}$ die Submaßkette $\{0, 1, 2\}$ von $\mathbb{R}$, und $f\colon \{0, 1, 2\} \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann ist f eine][-Treppenfunktion, und $Z = (0, 1, 2)$ sowohl eine][- als auch eine [[-Zerlegung für f. Es ist aber $\int_{[Z[} f = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$, während $\int_{]Z[} f$ nicht definiert ist (da f zwar über den offenen Intervallen $]0, 1[,]1, 2[$ der Zerlegung konstant ist, aber über diesen Intervallen keinen Wert annimmt, da diese leer sind).

Nr. 156 (Satz) Unabhängigkeit der Zerlegungssumme von der Zerlegung

Sei $\mathbb{T}$ *Maßkette mit* $\max \mathbb{T} < \min \mathbb{T}$, $\mathcal{X}$ *Banachraum und* $f \colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$.

1. *Ist* f *eine* [[*-Treppenfunktion,*
   so hat die Zerlegungssumme von f *über jeder* [[*-Zerlegung* Z *denselben Wert.*
2. *Ist* f *eine*][*-Treppenfunktion, und ist* $\mathbb{T}$ dicht geordnet,
   so hat die Zerlegungssumme von f *über jeder*][*-Zerlegung* Z *denselben Wert.*
3. *Ist* $\mathbb{T}$ *nicht dicht geordnet,*
   so kann es Zerlegungen für f *geben, zu denen keine*][*Zerlegungssumme definiert ist, und selbst wenn die Zerlegungssummen zu*][*-Zerlegungen* Z, Z' *für* f *definiert sind, kann* $\int_{]Z[} f \neq \int_{]Z'[} f$ *gelten.*

Bem. (3) ist der Grund, weshalb bei der Konstruktion des Cauchy-Riemann-Integrals für allgemeine Maßketten die][*-Treppenfunktionen unbrauchbar sind.*

Beweis. Zu (3). Die erste Beh. wurde im Beweis von Satz 155 gezeigt. Zur zweiten Beh. Sei $\mathbb{T}$ die nicht dicht geordnete Submaßkette $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ von $\mathbb{R}$. Sei $f \colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(1) = f(2) = 1$ und $f(3) = f(4) = 10$. Es sind dann $Z = (0, 2, 5)$ sowie $Z' = (0, 3, 5)$ Zerlegungen für f, und es gilt $\int_{]Z[} f = 1 \cdot 2 + 10 \cdot 3 = 32$, aber $\int_{]Z'[} f = 1 \cdot 3 + 10 \cdot 2 = 23$.

Zu (1) bzw. (2). Da in der Behauptung (2) vorausgesetzt ist, dass $\mathbb{T}$ dicht geordnet ist, sind zu jeder][-Zerlegung $Z = (a_0, \ldots, a_n)$ von f die Intervalle $]a_{j-1}, a_j[$ nichtleer, so dass die][-Zerlegungssumme für der][-Zerlegung Z für f gemäß Def 154 existiert. Mit Blick auf diese Tatsache kann der Beweis von (1) und (2) simultan geführt werden.

Sei also $f \in \mathcal{T}_{][}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ bzw. $\in \mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$, und seien Z und Z' beides][- bzw. beides [[-Zerlegungen für f. Es ist zu zeigen, dass $\int_{[Z[} f = \int_{[Z'[} f$ bzw. dass $\int_{]Z[} f = \int_{]Z'[} f$. – Wir schreiben im folgenden $\int_{(Z)} f$ für $\int_{[Z[} f$ bzw. $\int_{]Z[} f$ und entsprechend mit anderen Integranden.

Fall (i): $Z' = (a_0, \ldots, a_k, x, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ ist eine Verfeinerung von Z, die genau einen Teilungspunkt x mehr besitzt als Z. Dann gilt:
$\int_{(Z)} f = \sum_{j=1}^{n} f_j \mu(a_j, a_{j-1}) = \sum_{j=1}^{k} f_j \mu(a_j, a_{j-1}) + f_{k+1} \mu(a_{k+1}, a_k) + \sum_{j=k+2}^{n} f_j \mu(a_j, a_{j-1})$, das ist per Kozyklus-Eigenschaft von μ gleich $\sum_{j=1}^{k} f_j \mu(a_j, a_{j-1}) + f_{k+1} \mu(a_{k+1}, x) + f_{k+1} \mu(x, a_k) + \sum_{j=k+2}^{n} f_j \mu(a_j, a_{j-1}) = \int_{(Z')} f$.

Fall (ii): Z' ist beliebige Verfeinerung von Z. Dann folgt $\int_{(Z')} f = \int_{(Z)} f$ mittels Teil (i) des Beweises durch triviale vollständige Induktion.

Fall (iii): Z' ist eine beliebige Zerlegung von $\mathbb{T}$. Dann sind Z und Z' Verfeinerungen von $Z \bigvee Z'$ und somit folgt nach Teil (ii) des Beweises $\int_{(Z)} f = \int_{(Z \vee Z')} f = \int_{(Z')} f$. ■

Nr. 157 (Def) Cauchy-Riemann-Integral für Treppenfunktionen

Sei $\mathbb{T}$ $\substack{\text{Maßkette}\\ \text{dicht geordnete Maßkette}}$ mit $\max \mathbb{T} < \min \mathbb{T}$, $\mathcal{X}$ Banachraum und $f \in \substack{\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})\\ \mathcal{T}_{][}(\mathbb{T},\mathcal{X})}$.

$\int_{\mathbb{T}} f$ (Integral von f über dem Intervall $\mathbb{T}$)
:= der gemäß $\substack{\text{Satz 156(1)}\\ \text{Satz 156(2)}}$ gemeinsame Wert aller $\substack{[[\\ ][}$-Zerlegungssummen von f.

Bem. Ist $\mathbb{T}$ dicht geordnet und $f \in \mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})$, so ist zugleich $f \in \mathcal{T}_{][}(\mathbb{T},\mathcal{X})$, so dass sowohl die obere wie auch die untere Lesart obiger Definition angewendet werden kann.
Es ergibt sich jedoch kein Widerspruch, da wegen Satz 155 dann der Wert der][- mit dem Wert der [[-Zerlegungssummen übereinstimmt.

Nr. 158 (Def) beschränkte lineare Operatoren und der Raum $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$

Seien $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ $\mathbb{K}$-Banachräume und $f \colon X \longrightarrow Y$.

f ist ein *beschränkter linearer Operator* von $\mathcal{X}$ in cY
:⇔ f ist linear und $\exists\, \alpha \geq 0\ \|f(x)\| \leq \alpha \|x\|$.

$\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$:= Menge der beschränkten linearen Operatoren von $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$.

Ausgestattet mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation sowie der *Operatornorm* $\| \bullet \|_{\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$
mit $\forall\, f \in \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})\ \ \|f\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})} := \inf\{\alpha \geq 0 : \|f(x)\| \leq \alpha\|x\|\}$
ist $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ ein $\mathbb{K}$-Banachraum.

Beweis. Siehe [Ama 99, Theorem 1.1, S. 120-121].

Nr. 159 (Satz) $\int_{\mathbb{T}}$ als beschränkter linearer Operator

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette mit $a = \max \mathbb{T} < \min \mathbb{T} = b$,
sei $\mathcal{X}$ vom Nullraum verschiedener Banachraum.

Ist $\mathbb{T}$ $\substack{\text{dicht geordnet}\\ \text{nicht dicht geordnet}}$, sei $\int_{\mathbb{T}}$ die Funktion von $\substack{\mathcal{T}_{][}(\mathbb{T},\mathcal{X})\\ \mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})}$ in $\mathcal{X}$ mit $\forall\, f \in \substack{\mathcal{T}_{][}(\mathbb{T},\mathcal{X})\\ \mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})}$ $\int_{\mathbb{T}}(f) := \int_{\mathbb{T}} f$.

$\int_{\mathbb{T}}$ ist Element von $\substack{\mathcal{L}(\mathcal{T}_{][}(\mathbb{T},\mathcal{X}),\mathcal{X})\\ \mathcal{L}(\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X}),\mathcal{X})}$, und für die Operatornorm von $\int_{\mathbb{T}}$ gilt $\| \int_{\mathbb{T}} \| \leq \mu(b,a)$.

Beweis (vgl. [Ama 99, Lemma 3.2., S. 18]). Trivialerweise gilt für $\substack{][\\ [[}$-Treppenfunktionen f, g und $\lambda \in \mathbb{K}$, dass $\int (f+g) = \int f + \int g$ sowie $\int \lambda f = \lambda \int f$, das heißt $\int_{\mathbb{T}}$ ist linear.

Sei nun $f \in \substack{\mathcal{T}_{][}(\mathbb{T},\mathcal{X})\\ \mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})}$, sei $Z = (a_0, \ldots, a_n)$ eine $\substack{][\\ [[}$-Zerlegung für f und für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei f_i der konstante Wert von f auf $\substack{]a_{i-1}, a_i[\\ [a_{i-1}, a_i[}$. Dann gilt:

$\| \int_{\mathbb{T}} f\| = \| \sum_{i=1}^{n} f_i \mu(a_i, a_{i-1})\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|f_i\| |\mu(a_i, a_{i-1})|$
$\leq \max\{\|f_i\| \,:\, i \in \{1, \ldots, n\}\} \sum_{i=1}^{n} |\mu(a_i, a_{i-1})| \leq \sup\{\|f(x)\| \,:\, x \in \mathbb{T}\} \sum_{i=1}^{n} \mu(a_i, a_{i-1})$
das ist per Kozyklus-Eigenschaft $= \sup\{\|f(x)\| \,:\, x \in \mathbb{T}\}\mu(b, a)$,

wobei der erste Faktor gleich der Supremumsnorm $\|f\|$ von f ist: diese ist die Norm von $\mathcal{B}(\mathbb{T}, X)$ und somit auch des Unterraums $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{T}_{][}(\mathbb{T},\mathcal{X})}{\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})}$ von $\mathcal{B}(\mathbb{T}, X)$.
Also ist $\int_{\mathbb{T}}$ beschränkter linearer Operator von $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{T}_{][}(\mathbb{T},\mathcal{X})}{\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})}$ in $\mathcal{X}$.
Aus $\| \int_{\mathbb{T}} f\| \leq \mu(b, a)\|f\|$ folgt per Def der Operatornorm sofort $\| \int_{\mathbb{T}} \| \leq \mu(b, a)$. ■

Für die Definition des CR-Integrals ist der folgende Satz aus der Funktionalanalysis wesentlich:

Nr. 160 (Satz) Fortsetzung beschränkter linearer Operatoren

$\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ seien normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume, wobei $\mathcal{Y}$ nicht der Nullraum ist.
Sei $\mathcal{D}$ vom Nullraum verschiedener normierter Untervektorraum von $\mathcal{X}$, der dicht in $\mathcal{X}$ ist.
Dann gibt es zu jedem $f \in \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{Y})$ genau eine Fortsetzung $\overline{f} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ und es gilt:

$\forall\ x_0 \in X\ \overline{f}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *sowie* $\|\overline{f}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \|f\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D},\mathcal{Y})}$.

Beweis. Siehe [Ama 99, Theorem 2.6, S. 14f]. ■

Nr. 161 (Def) Cauchy-Riemann-Integral

Sei $\mathbb{T}$ $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{dicht geordnete}}{\text{nicht dicht geordnete}}$ Maßkette mit $\max \mathbb{T} < \min \mathbb{T}$ und
sei $\mathcal{X}$ vom Nullraum verschiedener Banachraum.

Dann ist $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{T}_{][}(\mathbb{T},\mathcal{X})}{\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})}$ vom Nullraum verschiedener Unterraum von $\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$,
der nach Def 147 dicht in $\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ ist. Außerdem gilt nach Satz 159 $\int_{\mathbb{T}} \in \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{L}(\mathcal{T}_{][}(\mathbb{T},\mathcal{X}),\mathcal{X})}{\mathcal{L}(\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X}),\mathcal{X})}$.
Daher folgt aus dem Fortsetzungssatz für beschränkte lineare Operatoren,
dass es genau eine Fortsetzung $\overline{\int_{\mathbb{T}}}$ von $\int_{\mathbb{T}}$ auf die Menge $\mathcal{L}(\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T}, \mathcal{X}), \mathcal{X})$ gibt.

Für CR-integrierbares f: $\mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ heißt
$\int_{\mathbb{T}} f := \overline{\int_{\mathbb{T}}}(f)$ das *Cauchy-Riemann-Integral* (kurz *CR-Integral*) von f,

und nach dem genannten Fortsetzungssatz gilt:
$\int_{\mathbb{T}} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}} f_n$, wann immer (f_n) eine Folge von $\genfrac{}{}{0pt}{}{][}{[[}$-Treppenfunktionen ist,
die bezüglich der Norm des Unterraums $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{T}_{][}(\mathbb{T},\mathcal{X})}{\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})}$ von $\mathcal{B}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$
(das heißt bezüglich der Supremumsnorm, das heißt gleichmäßig) gegen f konvergiert.

Für $\int_{\mathbb{T}} f$ können wir auch $\int f$ schreiben, da $\mathbb{T}$ als Definitionsbereich von f
aus f zurückgewonnen werden kann. Außerdem ist die Schreibweise $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ üblich.

Nr. 162 (Def) Cauchy-Riemann-Integral über einem Teilintervall

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette und $a, b \in \mathbb{T}$ mit $a < b$ und $I := [a, b]$.
Sei $\mathcal{X}$ vom Nullraum verschiedener Banachraum.
Sei $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$, derart dass für die Einschränkung $f|I$ gilt $f|I \in \mathcal{I}_{CR}(I, \mathcal{X})$.

Dann sei $\int_I g := \int_{\mathbb{T}} (g|I)$

Nr. 163 (Satz und Def) Cauchy-Riemann-Integral zwischen beliebigen Grenzen

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, sei $r, s \in \mathbb{T}$ und $I := \substack{[r,s] \\ [s,r]}$ falls $\substack{r \leq s \\ s \leq r}$.
Sei $\mathcal{X}$ vom Nullraum verschiedener Banachraum.
Sei $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$, und im Fall $s \neq r$ sei $(f|I) \in \mathcal{I}_{CR}(I, \mathcal{X})$.

1. Im Fall $r < s$ sei $\int_r^s f := \int_r^s f(x)\,\mathrm{d}x := \int_I f$
2. Im Fall $r > s$ sei $\int_r^s f := \int_r^s f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_I f$
3. Im Fall $r = s$ sei $\int_r^s f := \int_r^s f(x)\,\mathrm{d}x := 0$

Es gilt stets $\int_r^s f = -\int_r^s f$.

Beweis. trivial. ■

8.2 Eigenschaften des Cauchy-Riemann-Integrals

Nr. 164 (Satz) Additivität bezüglich Integrationsbereich für CR-Integrale

Seien $\mathbb{T}$ Maßkette, $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\mathcal{X}$ Banachraum, $f \in \mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$.

1. *(Additionsregel)* $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.
2. *(Subtraktionsregel)* $\int_a^c f - \int_a^b f = \int_b^c f$

Beweis. Wir teilen den Beweis in vier Teile auf.

(1). Sei zunächst $a < b < c$. Da $f \in \mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$, gibt es eine Folge (f_n) eine Folge von auf $\mathbb{T}$ definierten][- bzw. [[-Treppenabbildungen, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$ mit $\alpha < \beta$ konvergieren dann die Treppenfunktionen $f_n|[\alpha, \beta]$ gleichmäßig gegen $f|[\alpha, \beta]$, insbesondere $f_n|[a, b]$ gegen $f|[a, b]$ und $f_n|[b, c]$ gegen $f|[b, c]$. Nun ergibt sich aus der Def des Integrals für Treppenfunktionen sofort $\int_a^c f_n = \int_a^b f_n + \int_b^c f_n$, und durch Grenzübergang $n \to \infty$ folgt $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.

(2). Sei nun $a \leq b \leq c$. Da die Behauptung trivialerweise in den Fällen $a = b < c$ und $a < b = c$ sowie $a = b = c$ gilt, folgt mit (1), dass sie für $a \leq b \leq c$ gilt.

(3). Es verbleiben die fünf Fälle
$a \leq c \leq b$, $b \leq a \leq c$, $b \leq c \leq a$, $c \leq a \leq b$, $c \leq b \leq a$. Aus (2) folgt nun

$$
\begin{array}{llll}
\text{Im 1. Fall} & \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f, \text{ also } \int_a^c f & = & \int_a^b f - \int_c^b f = \int_a^b f + \int_b^c f, \\
\text{Im 2. Fall} & \int_b^c f = \int_b^a f + \int_a^c f, \text{ also } \int_a^c f & = & \int_b^c f - \int_b^a f = \int_a^b f + \int_b^c f, \\
\text{Im 3. Fall} & \int_b^a f = \int_b^c f + \int_c^a f, \text{ also } \int_a^c f = -\int_c^a f & = & \int_b^c f - \int_b^a f = \int_a^b f + \int_b^c f, \\
\text{Im 4. Fall} & \int_c^b f = \int_c^a f + \int_a^b f, \text{ also } \int_a^c f = -\int_c^a f & = & \int_a^b f - \int_c^b f = \int_a^b f + \int_b^c f, \\
\text{Im 5. Fall} & \int_c^a f = \int_c^b f + \int_b^a f, \text{ also } \int_a^c f = -\int_c^a f & = - & \int_c^b f - \int_b^a f = \int_a^b f + \int_b^c f.
\end{array}
$$

(4). Die Subtraktionsregel folgt aus der Additionsregel durch Subtraktion von $\int_a^b f$. ■

Nr. 165 (Satz) Linearität des CR-Integrals

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $\max \mathbb{T} < \min \mathbb{T}$, *$\mathcal{X}$ vom Nullraum verschiedener Banachraum, $f, g \in \mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Dann ist auch $f + g, \lambda f \in \mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ und $\int_{\mathbb{T}} f + \int_{\mathbb{T}} g = \int_{\mathbb{T}} (f + g)$ sowie $\int_{\mathbb{T}} \lambda f = \lambda \int_{\mathbb{T}} f$.

Beweis. Die CR-Integrierbarkeit von $f + g$ und λf folgt daraus, dass $\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ ein Untervektorraum von $\mathcal{B}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ ist (Satz 150), und die angegebenen Formeln folgen aus der Linearität des beschränkten linearen Operators $\int_{\mathbb{T}}$. ■

Nr. 166 (Satz) CR-Integral komplexer und mehrdimensionaler Funktionen

Sei $\mathbb{T}$ nichtleere Maßkette, $r, s \in \mathbb{T}$, $n \in \mathbb{N}^{\odot}$, $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{K}^n$.
Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ bezeichne g_i die i-te Komponentenfunktion von g. Dann gilt:

1. $\int f = \int(\operatorname{Re} f) + i \int(\operatorname{Im} f)$
2. $\int g = (\int g_1, \ldots, \int g_n)$

Beweis. Wir müssen jeweils zeigen, das die linke Seite genau dann definiert ist, wenn die rechte definiert ist, und dass im Fall der Definiertheit beide Seiten gleich sind. Die linke Seite ist nun genau dann definiert, wenn f bzw. g Cauchy-Riemann-integrierbar ist; die rechte genau dann, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Re} g$ bzw. alle Komponentenfunktionen g_i vom g Cauchy-Riemann-integrierbar sind. Es ist also zunächst zu zeigen:

(A) f ist CR-integrierbar $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ sind CR-integrierbar
(B) g ist CR-integrierbar $\Leftrightarrow$ alle g_i sind CR-integrierbar

Beide Aussagen folgen im Fall, dass $\mathbb{T}$ dicht geordnet ist, also $\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T}, \mathcal{X}) = \overline{\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})}$ gilt, sofort aus Satz 121. Sei also $\mathbb{T}$ nicht dicht geordnet und somit $\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T}, \mathcal{X}) = \overline{\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T}, \mathcal{X})}$. Dann ist f [bzw. g] genau dann CR-integrierbar, wenn es eine Folge (f_i) von [[-Treppenfunktionen von $\mathbb{T}$ in $\mathbb{C}$ [bzw. in $\mathbb{K}^n$] gibt, die gleichmäßig gegen f [bzw. g] konvergiert. Das ist genau dann der Fall, wenn es Folgen von [[-Treppenfunktionen gibt, die gegen $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ [bzw. gegen g_i für $i \in \{1, \ldots, n\}$] konvergieren: dies folgt aus der triviale Tatsache, dass ein $t\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ [bzw. $\longrightarrow \mathbb{K}^n$] genau dann eine [[-Treppenfunktion ist, wenn dies auch für $\operatorname{Re} t$ und $\operatorname{Im} t$ [bzw. für jedes t_i] gilt, und weil Grenzwerte komplexer bzw. mehrdimensionaler Folgen komponentenweise gebildet werden. Somit gelten (A) und (B). Wir können also im weiteren annehmen, dass alle Terme definiert sind.

Seien nun (x_k) und (y_k) gegen f bzw. g gleichmäßig konvergente Folgen von][-Treppenabbildungen (falls $\mathbb{T}$ dicht geordnet ist) oder [[-Treppenabbildungen (sonst).
Mit Def 157 sieht man sofort, dass die behaupteten Gleichungen gelten, wenn man statt f ein x_k [bzw. statt g ein y_k] einsetzt. Infolgedessen gilt

(C) $\lim_{k\to\infty} \operatorname{Re}(\int x_k) = \lim_{k\to\infty} \int(\operatorname{Re} x_k)$ bzw.
(D) wenn y_k^1 die erste Komponente von y_k bezeichnet: $(\lim_{k\to\infty} y_k)_1 = \lim_{k\to\infty} y_k^1$.

Also folgt per Def des CR-Integrals, weil Bildung des Realteils und Limesbildung [bzw. der erste Komponente und der Limesbildung] vertauschbar sind und weil die gleichmäßige Konvergenz von (x_k) gegen f [bzw. (y_k) gegen g] trivialerweise die gleichmäßige Konvergenz von $(\operatorname{Re} x_k)$ gegen $\operatorname{Re} f$ [bzw. von (y_k^1) gegen g_1] nach sich zieht:
$\operatorname{Re}(\int f) = \operatorname{Re}(\lim_{k\to\infty} \int x_k) = \lim_{k\to\infty} \operatorname{Re}(\int x_k) \underset{(C)}{=} \lim_{k\to\infty} \int(\operatorname{Re} x_k) = \int \operatorname{Re} f$.
[bzw. $(\int g)_1 = (\lim_{k\to\infty} \int y_k)_1 = \lim_{k\to\infty} y_k^1 \underset{(D)}{=} \lim_{k\to\infty} \int y_k^1 = \int g_1$].
Genauso folgt $\operatorname{Im}(\int f) = \int(\operatorname{Im} f)$, also insgesamt $\int f = \int(\operatorname{Re} f) + i \int(\operatorname{Im} f)$
[bzw. genauso folgt $\forall\, j \in \{2, \ldots, n\}$ $(\int g)_j = \int g_j$, also insgesamt $\int g = (\int g_1, \ldots, \int g_n)$]. ■

Nr. 167 (Satz) Integration von Funktionenfolge und -Reihen

Sei $\mathbb{T}$ *Maßkette,* $\max \mathbb{T} < \min \mathbb{T}$, $\mathcal{X}$ *vom Nullraum verschiedener Banachraum.*
Sei (f_n) *eine Folge CR-integrierbarer Funktionen* $f_n\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$.

1. *Konvergiert* (f_n) *gleichmäßig gegen* f, *so ist* $\int_{\mathbb{T}} \lim f_n = \int_{\mathbb{T}} f = \lim \int_{\mathbb{T}} f_n$.
2. *Konvergiert* $\left(\sum_{i=p}^{n} f_i\right)_{n\in\mathbb{Z}^{\geq p}}$ *gleichmäßig, so ist* $\int_{\mathbb{T}} \sum_{i=p}^{\infty} f = \sum_{i=p}^{\infty} \int_{\mathbb{T}} f$

Beweis. Beschränkte lineare Operatoren sind stetig (vgl. [Ama 99, Theorem 2.5, S. 14]), also ist $\int_{\mathbb{T}}$ stetig und daraus folgt (1). Mit (1) folgt weiter $\int_{\mathbb{T}} \sum_{i=p}^{\infty} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}} \sum_{i=p}^{n} f_i$, das ist per Linearität des Operators $\int_{\mathbb{T}}$ gleich $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=p}^{n} \int_{\mathbb{T}} f_i = \sum_{i=p}^{\infty} \int_{\mathbb{T}} f_i$. Somit gilt (2). ∎

Nr. 168 (Satz) Integralungleichung für Cauchy-Riemann-Integrale

Sei $\mathbb{T}$ *Maßkette,* $\max \mathbb{T} < \min \mathbb{T}$, *sei* $\mathcal{X}$ *vom Nullraum verschiedener Banachraum.*
Sei $f \in \mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ *und stehe* $\|f\|$ *für die Supremumsnorm von* f.

Dann ist $\|f\| \in \mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ *und für* $a, b \in \mathbb{T}$ *mit* $a < b$ *gilt* $\| \int_a^b f\| \leq \int_a^b \|f\| \leq \mu(b,a)\|f\|$.
Korollar: Für beliebige $a, b \in \mathbb{T}$ *gilt* $\| \int_a^b f\| \leq |\mu(b,a)|\|f\|$.

Beweis des Satzes nach [Ama 99, Satz 4.3., S. 26]. Sei $\mathbb{T}$ dicht geordnet bzw. nicht dicht geordnet. Es gibt dann eine Folge (f_n) von (][bzw. [[)-Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Für $t \in \mathbb{T}$ folgt aus der allgemeinen Dreiecksungleichung:
$|\|f_n(t)\| - \|f(t)\|| \leq \|f_n(t) - f(t)\| \leq \sup_{t\in\mathbb{T}} \|f_n(t) - f(t)\| = \|f_n - f\|$, und da die rechte Seite für $n \to \infty$ gegen 0 geht, ist $(\|f_n\|)$ Folge von (][bzw. [[)-Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen $\|f\|$ konvergiert. Also ist $\|f\| \in \mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$.

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ sei nun $Z_n = (x_{n_0}, \ldots, x_{n_{m(n)}})$ eine (][bzw. [[)-Zerlegung für f_n, so dass f_n auf den offenen bzw. rechtshalboffenen Teilintervallen der Zerlegung konstant ist, und für $j \in \{1, \ldots, m(n)\}$ sei ξ_{n_j} der konstante Wert von f über $]x_{n_j}, x_{n_{j-1}}[$ bzw. $[x_{n_j}, x_{n_{j-1}}[$.
Dann gilt $\| \int_a^b f_n\| = \| \sum_{j=1}^{m(n)} \xi_{n_j} \mu(x_{n_{j-1}}, x_{n_j})\| \leq \sum_{j=1}^{m(n)} \|\xi_{n_j}\| \mu(x_{n_{j-1}}, x_{n_j}) = \int_a^b \|f_n\|$. Nun gilt für Banachräume $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ und $A \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ stets $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$ [Ama 99, Folgerung 2.4, S. 12], in unserem Fall also $\int_a^b \|f_n\| \leq \| \int_a^b \| \| \|f_n\|$, und nach Satz 159 ist letzteres $\leq \mu(b,a)\|f_n\|$.
Insgesamt gilt $\| \int_a^b f_n\| \leq \int_a^b \|f_n\| \leq \mu(b,a)\|f_n\|$, und durch Grenzübergang $n \to \infty$ folgt unter Beachtung von Satz 167(1) und der Stetigkeit der Normen: $\| \int_a^b f\| \leq \int_a^b \|f\| \leq \mu(b,a)\|f\|$.

Beweis des Korollars. Dieses folgt im Fall $b > a$ aus dem Satz, weil per Isotonie von μ gilt $\mu(b,a) > 0$, also $|\mu(b,a)| = \mu(b,a)$.
Im Fall $a > b$ folgt also $\| \int_a^b f\| = \| \int_b^a f\| \leq |\mu(a,b)|\|f\|_\infty = |\mu(b,a)|\|f\|$.
Im Fall $b = a$ sind schließlich unter Beachtung von $\mu(a,a) = 0$ beide Seiten $= 0$. ∎

Nr. 169 (Def) Cauchy-Riemann-Integralfunktion mit variabler oberer Grenze

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $\max\mathbb{T} < \min\mathbb{T}$, sei $\mathcal{X}$ vom Nullraum verschiedener Banachraum, und sei $f \in \mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$.

Dann sei F_α die Funktion $F_\alpha\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ mit $\forall\, x \in \mathbb{T}\ F(x) := \int_\alpha^x f$, genannt „zu f gehörige CR-Integralfunktion mit unterer Grenze α und variabler oberer Grenze“

Diese Funktion bezeichnen wir also mit dem f entsprechenden Großbuchstaben F, versehen mit dem Index α (der wkM wegfällt).

Nr. 170 (Satz) Lipschitz-Stetigkeit der vorgenannten Integralfunktion

Sind die Voraussetzungen wie in Def 169, so ist F_α Lipschitz-stetig mit L-Konstante $\|f\|$.

Beweis. Für $x, y \in \mathbb{T}$ ist $F(x) - F(y) = \int_\alpha^x f - \int_\alpha^y f$, das ist nach Satz 164(2) gleich $\int_y^x f$. Es folgt also per Integralungleichung (Satz 168), dass $\|F(x) - F(y)\| = \|\int_y^x f\| \le |\mu(x,y)|\|f\|$, wobei $\mu(x,y)$ der Abstand von x und y im metrischen Raum der Maßkette ist (Satz 73). ■

Nr. 171 (Satz) F_α als Stammfunktion von $f \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$

Sind die Voraussetzungen wie in Def 169, und gilt zusätzlich $f \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$, so ist F_α eine Stammfunktion von f.

Beweis. Zu zeigen ist, dass F in jedem Punkt $t \in \mathbb{T}$ die Ableitung $f(t)$ besitzt. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da die identische Funktion $\mathrm{id}_\mathbb{T}$ eine Treppenfunktion ist, folgt für $c, d \in \mathbb{T}$ mit $c < d$ aus der Definition des Integrals für Treppenfunktionen, dass $\int_c^d \mathrm{id}_\mathbb{T}(x)\,\mathrm{d}x = \mu(d,c)$. Wegen Satz 66(2)-(3) und Def 163 gilt das auch für $c = d$ und $c > d$, also allgemein für $c, d \in \mathbb{T}$. Insbesondere gilt also für beliebiges $s \in \mathbb{T}$, dass $\int_s^{\sigma(t)} \mathrm{id}_\mathbb{T}(x)\,\mathrm{d}x = \mu(\sigma(t), s)$, also per Linearität (Satz 165):
(A) $\int_s^{\sigma(t)} f(t)\,\mathrm{d}x = \int_s^{\sigma(t)} f(t)\mathrm{id}_\mathbb{T}(x)\,\mathrm{d}x = f(t)\int_s^{\sigma(t)} \mathrm{id}_\mathbb{T}(x)\,\mathrm{d}x = f(t)\mu(\sigma(t), s)$.

Per Def von F_α (Def 169) und der Subtraktionsregel (Satz 164) gilt außerdem:
(B) $F(\sigma(t)) - F(s) = \int_\alpha^{\sigma(t)} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_\alpha^s f(x)\,\mathrm{d}x = \int_s^{\sigma(t)} f(x)\,\mathrm{d}x$

Aus (A) und (B) folgt per Linearität:
(C) $F(\sigma(t)) - F(s) - f(t)\mu(\sigma(t), s) = \int_s^{\sigma(t)} (f(x) - f(t))\,\mathrm{d}x$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

$\boxed{t \text{ ist rechts-dicht oder maximal}}$ Dann ist $\sigma(t) = t$. Da f rd-stetig ist, ist f im Punkt t stetig (vgl. Def 108), also gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $U \in \mathfrak{U}(t)$ mit $\forall\ s \in U \quad \|f(s) - f(t)\| < \varepsilon$.
Für alle diese Punkte s gilt dann, wenn f^* die Einschränkung von f auf die Menge der zwischen s und t liegenden Punkte einschließlich dieser Punkte bezeichnet:
$\|F(\sigma(t)) - F(s) - f(t)\mu(\sigma(t), s)\| \underset{(C)}{=} \| \int_s^{\sigma(t)} f(x) - f(t)\,\mathrm{d}x\| \underset{\sigma(t)=t}{=} \| \int_s^t f(x) - f(t)\,\mathrm{d}x\|$
$= \| \int_s^t f^*(x) - f(t)\,\mathrm{d}x\| \underset{Satz\ 168}{\leq} |\mu(\sigma(t), s)| \|f^* - f(t)\| \underset{Wahl\ von\ U}{\leq} |\mu(\sigma(t), s)|\varepsilon.$
Damit ist nachgewiesen, dass $f(t)$ eine Ableitung von F im Punkt t ist.

$\boxed{t \text{ ist rechts-zerstreut}}$ In diesem Fall ist folgt wegen der (aus Satz 170 folgenden) Stetigkeit von F im Punkt t mittels Satz 89, dass F im Punkt t die Ableitung $F^\Delta(t) = \frac{F(\sigma(t)) - F(t)}{\mu^*(t)}$ besitzt,
wobei $\frac{F(\sigma(t))-F(t)}{\mu^*(t)} \underset{Def\ 169}{=} \frac{\int_\alpha^{\sigma(t)} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_\alpha^t f(x)\,\mathrm{d}x}{\mu^*(t)} \underset{Satz\ 164}{=} \frac{\int_t^{\sigma(t)} f(x)\,\mathrm{d}x}{\mu^*(t)}$ gilt, und mit Blick auf Def 147 ist $\int_t^{\sigma(t)} f(t)\,\mathrm{d}x$ = Zerlegungssumme der [[-Zerlegung $(t, \sigma(t))$ für $f|[t, \sigma(t)]$
$= f(t)\mu(\sigma(t), t) = f(t)\mu * (t)$. Insgesamt ist daher
$F^\Delta(t) = \frac{\int_t^{\sigma(t)} f(x)\,\mathrm{d}x}{\mu^*(t)} = \frac{\mu^*(t) f(t)}{\mu^*(t)} = f(t)$. ■

Nr. 172 (Satz) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für Cauchy-Riemann-Integrale

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette, $\max \mathbb{T} < \min \mathbb{T}$ und $\mathcal{X}$ vom Nullraum verschiedener Banachraum.

1. *Jedes $f \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ besitzt eine Stammfunktion (was zwar schon aus Satz 143 bekannt ist, ab dieser Stelle aber unabhängig davon bewiesen werden kann)*
2. *Ist F irgendeine Stammfunktion von $f \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$, so ist* $\{S\ :\ S\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}\ \wedge \exists\ c \in X\ S = F + c\}$ *die Menge M aller Stammfunktionen von f.*
3. *Für Stammfunktionen F von $f \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ und $s, t \in \mathbb{T}$ gilt* $\int_s^t f(x)\,dx = F(t) - F(s)$

Beweis. Zu (1). Nach Satz 171 ist die Funktion $F\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ mit $F(x) := \int_\alpha^x f$ (wobei α ein fest gewähltes Element von $\mathbb{T}$ ist) eine Stammfunktion von f.

Zu (2). Sei F eine Stammfunktion von f. Sei nun G eine weitere oder dieselbe Stammfunktion. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{T}^\kappa$, dass $G^\Delta(x) = F^\Delta(x)$, und daher $(G - F)^\Delta(x) = 0$. Nach Satz 104 folgt, das $G - F$ konstant ist, also $\forall\ x \in \mathbb{T}\ G(x) - F(x) = c$ mit einem $c \in X$ gilt, somit ist $G(x) = c + F(x)$, kurz $G = F + c$, also $G \in M$. — Ist umgekehrt $G \in M$ vorausgesetzt, so $G(x) = F(x) + c$ für alle $x \in \mathbb{T}$. Daher die konstant auf c abbildende Funktion überall die Ableitung 0 hat, folgt per Linearität der Ableitung für alle $x \in \mathbb{T}^\kappa$: $G^\Delta(x) = F^\Delta(x) = f(x)$.

Zu (3). Da die Funktion, die t auf $\int_s^t f$ abbildet, Stammfunktion von F ist (Satz 171), folgt aus (2), dass $\forall\ c \in X\ F(x) = c + \int_s^x f$. Weiter folgt $c = c + \int_s^s f = F(s)$, also geht $F(x) = c + \int_s^x f$ über in $F(x) = F(s) + \int_s^x f$, und die Behauptung folgt per Subtraktion von $F(s)$. ■

8.3 Vergleich des Cauchy-Riemann– mit dem Riemann– und dem Cauchy-Integral

Nr. 173 (Satz) Vergleich des Cauchy-Riemann-Integrals mit dem Riemann-Integral

Sei $\mathbb{T}$ dicht geordnete Maßkette mit $a = \min \mathbb{T} < \max \mathbb{T} = b$.
Sei $\mathcal{X}$ vom Nullraum verschiedener Banachraum.

Wegen der dichten Ordnung ist dann nach Satz 149(2) der Bereich $\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ der Cauchy-Riemann-integrierbaren Funktionen von $\mathbb{T}$ in $\mathcal{X}$ gleich $\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$.

Wir behaupten nun: dieser Bereich ist Teilmenge des Bereichs $\mathcal{I}_R(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ der Riemann-integrierbaren Funktionen von $\mathbb{T}$ in $\mathcal{X}$, und für jedes $f \in \mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ stimmt das Cauchy-Riemann-Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ von f in den Grenzen von a bis b mit dem (genauso bezeichneten) Riemann-Integral von f in den Grenzen von a bis b überein.

Beweis (vgl. [Ama 99, Theorem 3.4, S. 19-21].

Sei $f \in \mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ $(= \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X}))$. Nach dem Kriterium für Riemann-Integrierbarkeit (Satz 146) sind wir fertig, wenn wir die Prä-Riemann-Integrierbarkeit von f zeigen, wobei wir für das Element $x \in X$ das Cauchy-Riemann-Integral $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ einsetzen. Zu zeigen ist demnach, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für jede][-Zerlegung $Z := (a_0, \ldots, a_n)$ der Feinheit $\triangle_Z < \delta$ und jede Wahl von Zwischenpunkten $\xi_i \in [a_{j-1}, a-j[$ $(j \in \{1, \ldots, n\})$ gilt:

$\| \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x - \sum_{j=1}^n f(\xi_j)\, \mu(a_j, a_{j-1}) \| < \varepsilon.$

$\boxed{\text{Spezialfall}}$ f sei eine][-Treppenfunktion von $\mathbb{T}$ in $\mathcal{X}$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.
Zu f gibt es eine][-Zerlegung $\hat{Z} = (\hat{a_0}, \ldots, \hat{an})$ für f. Wir setzen:

e_i := der konstante Wert von $f|]\hat{a_{j-1}}, \hat{a_j}[$, außerdem:
$\delta := \frac{\varepsilon}{2\hat{n}} \|f\|$.

Sei nun $Z = (a_0, \ldots, a_n)$ eine beliebige Zerlegung von $\mathbb{T}$ mit $\triangle_Z < \delta$
und zu jedem $j \in \{1, \ldots, n\}$ sei ξ_j ein Zwischenpunkt mit $a_{j-1} \le \xi_j \le a_j$.
Sei $(b_0, \ldots b_m)$ die gröbste gemeinsame Verfeinerung $Z \bigvee Z'$ von Z und Z' (vgl. Def 117).
Für jedes $k \in \{1, \ldots, m\}$ gibt es genau einen Index $j \in \{1, \ldots n\}$ mit $[b_{k-1}, b_k] \subseteq [a_{j-1}, a_j]$.
Genauso gibt es genau einen Index i mit $[b_{k-1}, b_k] \subseteq [\hat{a_{i-1}}, \hat{a_i}]$. Wir definieren nun:

e_k^* := der konstante Wert von $f|]b_{k-1}, b_k[$, das ist der konstante Wert von $f|]\hat{a_{i-1}}, \hat{a_i}[$, wobei i derjenige Index ist mit $[b_{k-1}, b_k] \subseteq [\hat{a_{i-1}}, \hat{a_i}]$

$e_k^{**} := f(\xi_j)$, wobei j derjenige Index ist mit $[b_{k-1}, b_k] \subseteq [a_{j-1}, a_j]$.

Es gilt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{j=1}^n f(\xi_j)\,\mu(a_j, a_{j-1})$

$= \sum_{j=1}^{\hat{n}} f(\xi_j)\,\mu(\hat{a_j}, \hat{a_{j-1}}) - \sum_{j=1}^n f(\xi_j)\,\mu(a_j, a_{j-1})$

$= \sum_{j=1}^m e_k^*\,\mu(b_k - b_{k-1}) - \sum_{j=1}^m e_k^{**}\,\mu(b_k - b_{k-1}) = \sum_{j=1}^m (e_k^* - e_k^{**})\mu(b_k - b_{k-1})$

Nun kann e_k^* nur dann von e_k^{**} verschieden sein kann, wenn k die folgende Eigenschaft hat:
ist j der Index mit $[b_{k-1}, b_k] \subseteq [a_{j-1}, a_j]$
und i der Index mit $[b_{k-1}, b_k] \subseteq [\hat{a_{i-1}}, \hat{a_i}]$, so liegt ξ_j außerhalb von $]\hat{a_{i-1}}, \hat{a_i}[$.

Für jedes $i \in \{1, \ldots, \hat{n}\}$ liegen nun innerhalb des Intervalls $[\hat{a_{i-1}}, \hat{a_i}]$ höchstens zwei der Intervalle $[b_{k-1}, b_k]$ von $Z \bigvee Z'$, für welche k diese Eigenschaft hat: nämlich das Intervall von $Z \bigvee Z'$ mit unterer Grenze $\hat{a_{i-1}}$, und dasjenige mit oberer Grenze $\hat{a_i}$. — Daher haben höchstens $2\hat{n}$ Indizes k diese Eigenschaft, und daher sind höchstens $2\hat{n}$ Summanden der Summe $\sum_{j=1}^m (e_k^* - e_k^{**})\mu(b_k - b_{k-1})$ von Null verschieden.

Für jeden dieser nicht verschwindenden Summanden gilt:

$\|(e_k^* - e_k^{**})\mu(b_k, b_{k-1})\| \leq \|e_k^* - e_k^{**}\||\mu(b_k, b_{k-1})| \leq (\|e_k^*\| + \|e_k^{**}\|)\Delta_Z \leq 2\|f\|\delta$

so dass die gesamte Summe $\leq 2\hat{n}2\|f\|\delta = \varepsilon$ ist.

$\boxed{\text{allgemeiner Fall}}$ Sei nun $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$. Wegen Satz 122 gibt es eine Folge von][-Treppenabbildungen von $\mathbb{T}$ in $\mathcal{X}$, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es wegen der erwähnten Konvergenz eine zu der Folge gehörige][-Treppenfunktion g mit

(A) $\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$. Daraus folgt mit der Integralungleichung (Satz 168):

(B) $\| \int_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x\| \leq \mu(b, a)\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{3}$

Nach dem schon behandelten Spezialfall gibt es nun ein $\delta > 0$, so dass für jede Zerlegung $Z = (a_0, \ldots, a_n)$ von $\mathbb{T}$ und jede Wahl von Zwischenpunkten ξ_j mit $a_{j-1} \leq \xi_j \leq a_j$ $(j \in \{1, \ldots, n\})$ gilt:

(C) $\| \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{j=1}^n g(\xi_j)\ \mu(a_j, a_{j-1})\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Trivialerweise gilt außerdem:

$\| \sum_{j=1}^n (g(\xi_j) - f(\xi_j))\,\mu(a_j, a_{j-1})\| \leq \sum_{j=1}^n \|(g(\xi_j) - f(\xi_j))\mu(a_j, a_{j-1})\|$

$= \sum_{j=1}^n (\|g(\xi_j) - f(\xi_j)\|\mu(a_j, a_{j-1})) \leq \sum_{j=1}^n (\|f - g\|\mu(a_j, a_{j-1}))$

$= \|f - g\| \sum_{j=1}^n \mu(a_j, a_{j-1}) = \|f - g\|\mu(b, a)$, und wegen (A) ist dies $< \frac{\varepsilon}{3}$.

Zusammenfassend gilt also

(D) $\|\sum_{j=1}^{n}(g(\xi_j)-f(\xi_j))\,\mu(a_j,a_{j-1})\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Mit (B), (C), und (D) und Satz 165 folgt schließlich: $\|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\,\mu(a_j,a_{j-1})\|$

$= \|\int_a^b f(x)-g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{j=1}^{n} g(\xi_j)\,\mu(a_j,a_{j-1}) + \sum_{j=1}^{n}(g(\xi_j)-f(\xi_j))\,\mu(a_j,a_{j-1})\|$

$\leq \|\int_a^b f(x)-g(x)\,\mathrm{d}x\| + \|\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{j=1}^{n} g(\xi_j)\,\mu(a_j,a_{j-1})\|$
$+ \|\sum_{j=1}^{n}(g(\xi_j)-f(\xi_j))\,\mu(a_j,a_{j-1})\| < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$ ∎

Nr. 174 (Satz) Vergleich des Cauchy-Riemann-Integrals mit dem Cauchy-Integral

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette mit $a = \min\mathbb{T} < \max\mathbb{T} = b$,
sei $\mathcal{X}$ vom Nullraum verschiedener Banachraum und $f \in \mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathcal{X})$.
(so dass nach Satz 149(1) auch $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T},\mathcal{X})$, also das Cauchy-Integral von f existiert).

Dann stimmt das Cauchy-Riemann-Integral von f mit dem Cauchy-Integral von f überein, das heißt es gilt $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\Delta x$.

Bem. Im Fall, dass $\mathcal{R}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ echte Obermenge von $\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ ist (vgl. Satz 149(3)), verbleibt dennoch ein Unterschied zwischen dem Cauchy-Riemann-Integral und des Cauchy-Integral: es gibt Funktionen, die ein Cauchy-Integral, aber kein Cauchy-Riemann-Integral besitzen.

Beweis. Sei $f \in \mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathcal{X})$ und sei $f\,\frac{\text{dicht geordnet}}{\text{nicht dicht geordnet}}$. Dann ist $f \in \frac{\overline{\mathcal{T}_{][}(\mathbb{T},\mathcal{X})}}{\overline{\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T},\mathcal{X})}}$. Per Definition der letztgenannten Menge gibt es dann einen Folge (f_i) von $\frac{][}{[[}$-Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Wegen Satz $\frac{137}{136}$ folgt die Behauptung für alle f_i, d. h. es gilt

(A) $\int_a^b f_i(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_i(x)\Delta x$.

Dann folgt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \underset{Def\ 161}{=} \lim_{i\to\infty}\int_a^b f_i(x)\,\mathrm{d}x \underset{(A)}{=} \lim_{i\to\infty}\int_a^b f_i(x)\Delta x \underset{Satz\ 142}{=} \int_a^b f(x)\Delta x.$ ∎

Schlussbemerkung zum Cauchy- und Cauchy-Riemann-Integral

Nach dem letzten Satz stimmt das Cauchy-Riemann-Integral, wann immer es existiert, mit dem Cauchy-Integral überein, und im Beweis dieses Satzes wurden die vorhergehenden Sätze nicht benötigt. Man könnte deshalb diesen Satz vor Satz 165 einfügen und dann die Sätze 165 bis 168 sowie den Hauptsatz (Satz 172) sofort aus den entsprechenden Eigenschaften des Cauchy-Integrals ablesen.

Im Gegensatz zu dieser Vorgehensweise wurde hier aber Wert darauf gelegt, die Theorie des Cauchy-Riemann-Integrals ganz unabhängig von der des Cauchy-Integrals darzulegen. So eröffnet sich die Möglichkeit, das Cauchy-Integral, dessen Einführung ja relativ kompliziert ist, ganz durch das Cauchy-Riemann-Integral zu ersetzen.

9 Maßtheoretische Integration

Das letzte Ziel dieser Arbeit ist es, für Maßketten ein spezielles maßtheoretisches Integral („Lebesgue-Integral“) einzuführen. Dies geschieht im nächsten Kapitel. Im vorliegenden Kapitel werden einige allgemeinen Grundlagen maßtheoretischer Integration rekapituliert.

9.1 σ-Algebren, Messräume, Ringe und Halbringe

Nr. 175 (Def) σ-Algebra und Messraum

Sei X eine Menge und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$.

$(X, \mathfrak{A})$ ist ein *Messraum* $:\Leftrightarrow$ $\mathfrak{A}$ ist eine *σ-Algebra* über der Grundmenge X $:\Leftrightarrow$

1. (Komplement-Stabilität) Für $A \in \mathfrak{A}$ ist auch $\complement A \in \mathfrak{A}$
2. (Vereinigungsaxiom) Für jede abzählbare Familie $(A_i)_{i \in I}$ in $\mathfrak{A}$ ist $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathfrak{A}$

Nr. 176 (Satz) Leermengen–, Grundmengen– und Schnittaxiom für σ-Algebren

Die folgenden Sätze werden manchmal ebenfalls zu den Axiomen gezählt.
Da für I im Vereinigungsaxiom auch $\emptyset$ zugelassen ist und $\bigcup \emptyset = \emptyset$ gilt, folgt zunächst

3. *(Leermengenaxiom)* $\emptyset \in \mathfrak{A}$

Wegen $\complement\emptyset = X$ folgt dann per Komplement-Stabilität

4. *(Grundmengenaxiom)* $X \in \mathfrak{A}$

Wegen $\bigcap_{i \in I} = \complement \bigcup_{i \in I} \complement A_i$ folgt mit Blick auf die Komplement-Stabilität:

5. *(Schnittmengenaxiom)* *Für jede abzählbare Familie $(A_i)_{i \in I}$ in $\mathfrak{A}$ ist $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathfrak{A}$*

Nr. 177 (Satz) Charakterisierung für σ-Algebren

$\mathfrak{A}$ ist σ-Algebra über $X \Leftrightarrow$ es gilt das Grundmengenaxiom, die Komplement-Stabilität sowie das wie folgt modifizierte Vereinigungsaxiom:
für jede Familie $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Elementen von $\mathfrak{A}$ ist $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}$.

Beweis. $\Rightarrow$ ist klar. Zu $\Leftarrow$ ist das Vereinigungsaxiom zu verifizieren, wonach $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathfrak{A}$ ist, wann $\forall\ i \in I\ A_i \in \mathfrak{A}$ und I abzählbar (also *abzählbar unendlich* oder *endlich*) ist. Nach dem modifizierten Vereinigungsaxiom gilt dies für *abzählbares* I, zu zeigen bleibt es nur für *endliches* I, wobei wir per Umindizierung annahmen können, dass $I = \{1, \dots n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Per Grundmengenaxiom und Komplement-Stabilität ist $\emptyset \in \mathfrak{A}$. Wenn wir also für $i \in \mathbb{N}\setminus\{1, \dots, n\}$ festlegen: $A_i := \emptyset$, liefert das modifizierte Vereinigungsaxiom die Behauptung. ■

Nr. 178 (Satz) Weitere Eigenschaften von σ-Algebren

1. *Für σ-Algebren $\mathfrak{A}$ über X gilt $\forall\ A, B \in \mathfrak{A}\ \ A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathfrak{A}$.*
2. *Sei A Aussage, also Formel ohne freie Variable. Dann ist stets $\{x \in X\ :\ A\} \in \mathfrak{A}$*
3. *Seien $A(x), B(x)$ Formeln, die als freie Variable höchstens x enthalten, so dass $\{x \in X\ :\ A(x)\}$ und $\{x \in X\ :\ B(x)\} \in \mathfrak{A}$. Sei $c \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$. Dann sind auch $\{x \in X\ :\ \neg A(x)\}$ sowie $\{x \in X\ :\ A(x)\ c\ B(x)\}$ Elemente von $\mathfrak{A}$.*

Beweis. Zu (1). Die Aussage über Vereinigung und Schnitt folgt trivial aus dem Schnittmengen- und Vereinigungsaxiom. Weiter folgt $A \setminus B \in \mathfrak{A}$ wegen $A \setminus B = A \cap \complement B$.

Zu (2). Wenn A wahr ist, ist $\{x \in X\ :\ A\} = X$, sonst ist $\{x \in X\ :\ A\} = \emptyset$, nach dem Leermengen- und Grundmengenaxiom (Satz 176) ist also in jedem Fall $\in \mathfrak{A}$.

Zu (3). Es ist $\{x \in X\ :\ \neg A(x)\} = X \setminus \{x\ :\ A(x)\}$, außerdem $\{x \in X\ :\ A(x)\ \vee\ B(x)\} = \{x \in X\ :\ A(x)\}\ \cup\ \{x \in X\ :\ B(x)\}$ sowie $\{x \in X\ :\ A(x)\ \wedge\ B(x)\} = \{x \in X\ :\ A(x)\}\ \cap\ \{x \in X\ :\ B(x)\}$. Diese drei Mengen sind also nach (1) Elemente von $\mathfrak{A}$. Dann folgen auch die Behauptungen für den Fall, dass c einer der Junktoren $\Rightarrow$ oder $\Leftrightarrow$ ist, denn $A(x) \Rightarrow B(x)$ ist äquivalent zu $\neg A(x)\ \vee\ B(x)$, und $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ zu $A(x) \Rightarrow B(x)\ \wedge\ B(x) \Rightarrow A(x)$. ■

Nr. 179 (Satz und Def) Spuren von σ-Algebren; Unter- und Ober-Messraum

Ist $\mathcal{X} = (X, \mathfrak{A})$ Messraum und $T \subseteq X$,
so ist auch $\mathcal{T} := (T, \mathfrak{A}_T)$ mit $\mathfrak{A}_T := \mathfrak{A} \Cap T = \{A \cap T\ :\ A \in \mathfrak{A}\}$ Messraum.

Es heißt $\mathfrak{A}_T$ die *Spur-σ-Algebra* von $\mathcal{A}$ über T,
$\mathcal{T}$ heißt der *Untermessraum* von $\mathcal{X}$ mit Träger T, und $\mathcal{X}$ ein *Obermessraum* von $\mathcal{T}$.

Beweis gemäß Satz 177. Zum Grundmengenaxiom. $T = X \cap T \in \mathfrak{A} \Cap T$.
Zur Komplement-Stabilität. Sei $A \cap T$ mit $A \in \mathfrak{A}$ ein Element von $\mathfrak{A} \Cap T$. Zu zeigen ist $\complement_T(A \cap T) \in \mathfrak{A} \Cap T$. Nun ist $\complement_T(A \cap T) = T \setminus (A \cap T) = T \setminus A = T \cap (X \setminus A) = T \cap \complement_X A$. Letzteres ist wegen $\complement_X A \in \mathfrak{A}$ Element von $\mathfrak{A} \Cap T$.

Zum Vereinigungsaxiom. Sei $(A_n \cap T)_{n\in\mathbb{N}}$ Familie von Elementen von $\mathfrak{A} \Cap T$, wobei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Familie von Elementen von $\mathfrak{A}$ ist. Dann ist $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap T) = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap T \in \mathfrak{A} \Cap T$. ■

Nr. 180 (Satz) Übertragung einer σ-Algebra durch eine Funktion

Ist $\mathfrak{A}$ σ-Algebra über X und $f\colon X \longrightarrow Y$,
so $\mathfrak{B} := \{B \subseteq Y \;:\; f^{-1}[B] \in \mathfrak{A}\}$ σ-Algebra über Y.

Beweis. Zum Grundmengenaxiom. Es ist $Y \in \mathfrak{B}$, denn $f^{-1}[Y] = X \in \mathfrak{A}$.
Zur Komplement-Stabilität. Sei $A \in \mathfrak{B}$, also $f^{-1}[A] \in \mathfrak{A}$. Dann ist $f^{-1}[\complement_Y A] = f^{-1}[Y \setminus A] = f^{-1}[Y] \setminus f^{-1}[A] = X \setminus f^{-1}[A] \in \mathfrak{A}$. Also ist $\complement A \in \mathfrak{B}$.
Zum modifizierten Vereinigungsaxiom. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Familie in $\mathfrak{B}$, also $(f^{-1}[A_n])_{n\in\mathbb{N}}$ Familie in $\mathfrak{A}$. Es folgt $f^{-1}[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n] = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}[A_n] \in \mathfrak{A}$, das heißt $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{B}$. ■

Nr. 181 (Satz und Def) Ring

$\mathfrak{R}$ ist *(Mengen-)Ring* über X $:\Leftrightarrow$ $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ und es gilt eine (und darum jede) der folgenden äquivalenten Aussagen ($A \triangle B$ steht für die symmetrische Mengendifferenz $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$):

1. $\emptyset \in \mathfrak{R}$ und $\forall\, A, B \in \mathfrak{R}$ $A \triangle B,\ A \cap B \in \mathfrak{R}$
2. $\emptyset \in \mathfrak{R}$ und $\forall\, A, B \in \mathfrak{R}$ $A \triangle B,\ A \cup B \in \mathfrak{R}$
3. $\emptyset \in \mathfrak{R}$ und $\forall\, A, B \in \mathfrak{R}$ $A \cup B,\ A \setminus B \in \mathfrak{R}$

Jede σ-Algebra ist ein Ring.

Beweis. Dass σ-Algebren Ringe sind, folgt aus Formulierung (3).
Aus (1) folgt (3) wegen $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$.
Aus (3) folgt (2) wegen $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
Aus (2) folgt (1) wegen $A \cap B = (A \cup B) \triangle (A \triangle B)$. ■

Nr. 182 (Satz und Def) Halbring

$\mathfrak{H}$ ist Halbring über X $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ und es gilt

1. (Leermengenaxiom) $\emptyset \in \mathfrak{H}$
2. (Durchschnitts-Stabilität) Für $A, B \in \mathfrak{H}$ ist auch $A \cap B \in \mathfrak{H}$
3. (Differenzaxiom) Für $A, B \in \mathfrak{H}$ gibt es eine disjunkte endliche Folge $(C_i)_{i\in[1,n]}$ von Elementen von $\mathfrak{H}$ mit $A \setminus B = \bigcup_{k=1}^{n} C_k$

Jeder Ring ist ein Halbring.

Beweis. Für Ringe gilt per Def (1) und (2), außerdem gilt (3) mit $n = 1$ und $C_1 = A \setminus B$. ■

Nr. 183 (Satz) erweiterte Differenzeigenschaft der Halbringe

Ist $\mathfrak{H}$ Halbring über X. Dann gilt:

Für $A, B_1 \dots B_n \in \mathfrak{H}$ gibt es eine disjunkte endliche Folge $(C_i)_{i\in[1,m]}$ von Elementen von $\mathfrak{H}$, so dass $A \setminus \bigcup_{i=1}^m B_i = \bigcup_{i=1}^m C_i$.

Beweis. Siehe [Els 99, Lemma 5.5, S. 21]. ■

Nr. 184 (Satz und Def) $\mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$ als Halbring

Wir definieren: $\mathfrak{I}_{\mathbb{R}} := \{[a, b[\ :\ a, b \in \mathbb{R} \wedge a \leq b\}$. Es ist $\mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$ ist ein Halbring über $\mathbb{R}$.

Beweis. Zum Leermengenaxiom: $\emptyset = [0, 0[\ \in \mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$.

Zur Durchschnitts-Stabilität. Für $a \leq b, c \leq d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist
$[a, b[\ \cap [c, d] = [\max\{a, c\}, \min\{b, d\}[$,
das ist trivialerweise $\in \mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$, wenn $\max\{a, c\} \leq \min\{b, d\}$, und ansonsten ist es $= \emptyset \in \mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$.

Zum Differenzaxiom. Sei wieder $a \leq b, c \leq d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gegeben. Sei zunächst $a \leq c$. Wir betrachten dann je nach Lage von b drei Fälle: $b \leq c$, $c \leq b \leq d$ und $d \leq b$. Im ersten Fall ist $a \leq b \leq c \leq d$ und darum $[a, b[\ \setminus [c, d[\ = [a, b[$, was ein Element von $\mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$ (und darum Vereinigung von disjunkten Elementen von $\mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$) ist. Im zweiten Fall ist $a \leq c \leq b \leq d$ und darum $[a, b[\setminus[c, d[\ = [a, c[$, was wieder ein Element von $\mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$ ist. Im dritten Fall ist $a \leq c \leq d \leq b$ und darum $[a, b[\ \setminus [c, d[\ = [a, c[\ \cup [d, b[$, was Vereinigung zweier disjunkter Elemente von $\mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$ ist.

Sei nun $c \leq a$. Nun betrachten wir je nach Lage von d drei Fälle: $d \leq a$, $a \leq d \leq b$ und $b \leq d$. Im ersten Fall ist $c \leq d \leq a \leq b$ und darum $[a, b[\setminus[c, d[\ = [a, b[\ \in \mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$. Im zweiten ist $c \leq a \leq d \leq b$ und darum $[a, b[\ \setminus [c, d[\ = [d, b[\ \in \mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$. Im dritten ist $c \leq a \leq b \leq d$ und darum $[a, b[\ \setminus [c, d[\ = \emptyset$, was Vereinigung von null disjunkten Elementen von $\mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$ ist (Vereinigung über die leere Menge).

In jedem Fall ist also $[a, b] \setminus [c, d]$ disjunkte Vereinigung von Elementen von $\mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$. ■

9.2 Borelmengen und Erzeugung von σ-Algebren und Ringen

Nr. 185 (Def) Erzeugung von σ-Algebren und Ringen; die Bezeichnungen σ_X, ρ_X

Sei X Menge und $T \subseteq \mathfrak{P}(X)$.

$\sigma_X(T) \ := \ \bigcap\{O \, : \, T \subseteq O \subseteq \mathfrak{P}(X) \ \wedge \ O$ ist σ-Algebra über $X\}$

$\rho_X(T) \ := \ \bigcap\{O \, : \, T \subseteq O \subseteq \mathfrak{P}(X) \ \wedge \ O$ ist Ring über $X\}$

Die Menge T heißt ein *Erzeuger* von $\sigma_X(T)$ bzw. von $\rho_X(T)$
und $\sigma_X(T)$ bzw. $\rho_X(T)$ die [bzw. der] von T (über X) *erzeugte* σ-Algebra [bzw. Ring].

Nr. 186 (Satz) Die von T erzeugten Mengen als kleinste T umfassende Mengen ihrer Art

Es ist $\sigma_X(T)$ die „kleinste T umfassende σ-Algebra über X“ in folgendem Sinn:

1. *$\sigma_X(T)$ ist eine σ-Algebra über X, die Obermenge von T ist*
2. *Für jede σ-Algebra $\mathfrak{A}$ über X, die Obermenge von T ist, gilt $\sigma_X(T) \subseteq \mathfrak{A}$*
3. *Ist $\mathfrak{M}$ eine Menge, die wie $\sigma_X(T)$ die Eigenschaften (1) und (2) hat, folgt $\mathfrak{M} = \sigma_X(T)$*

Zusatz: Analog ist $\rho_X(T)$ der kleinste T umfassende Ring.

Beweis. Zu (1). $\sigma_X(T)$ ist Obermenge von T. Denn jedes Element t von T ist Element aller Obermengen von T, erst recht ist t Element aller Obermengen von T, die σ-Algebren über X sind. Also ist t auch Element des Schnitts der vorgenannten Obermengen, d.h. $t \in \sigma_X(T)$.

$\sigma_X(T)$ ist eine σ-Algebra. Denn wenn $A \in \sigma_X(T)$ [bzw. $(A_i)_{i \in I}$ abzählbare Folge in $\sigma_X(T)$] ist, so ist A Element von [bzw. (A_n) Folge in] jeder Menge O des Mengensystems, als dessen Schnitt $\sigma_X(T)$ definiert ist. Da O eine σ-Algebra ist, folgt $\complement A \in O$ [bzw. $\bigcup_{i \in I} A_i \in O$].

Zu (2). Es gilt $\sigma_X(T) \subseteq \mathfrak{A}$, weil $\mathfrak{A}$ zu den Mengen des Mengensystems gehört, dessen Schnitt per Def $\sigma_X(T)$ ist.

Zu (3). Es gilt $\sigma_X(T) \subseteq \mathfrak{M}$, weil $\sigma_X(T)$ die Eigenschaft (1) und $\mathfrak{M}$ die Eigenschaft (2) hat. Es gilt auch $\mathfrak{M} \subseteq \sigma_X(T)$, weil $\mathfrak{M}$ die Eigenschaft (1) und $\sigma_X(T)$ die Eigenschaft (2) hat.

Zum Zusatz: Analog zum Beweis für σ-Algebren. ■

Nr. 187 (Satz) Schlussweisen bei der Erzeugung

Seien S, T Teilmengen einer Grundmenge X,
über welcher wir die Erzeugung von σ-Algebren betrachten.

1. $S \subseteq \sigma(S)$
2. *Ist S bereits eine σ-Algebra, so $\sigma(S) = S$.*
3. $\sigma(\sigma(S)) = \sigma(S)$
4. $S \subseteq T \;\Rightarrow \sigma(S) \subseteq \sigma(T)$
5. $S \subseteq \sigma(T) \;\Rightarrow\; \sigma(S) \subseteq \sigma(T)$

Zusatz 1. Analoge Schlussweisen gelten für die Erzeugung von Ringen.
Zusatz 2. Ferner gilt $\rho(T) \subseteq \sigma(T)$ und $\sigma(T) = \sigma(\rho(T))$.

Beweis. Zu (1). Folgt aus Satz 186(1).
Zu (2). Wegen (1) braucht nur $\sigma(S) \subseteq S$ gezeigt zu werden. Das folgt aber aus Satz 186(1).
Zu (3). Folgt aus (2), da $\sigma(S)$ eine σ-Algebra ist.

Zu (4). $S \subseteq T$
$\Rightarrow \quad \{O : S \subseteq O \subseteq \mathfrak{P}(X) \;\wedge\; O \text{ ist } \sigma\text{-Algebra}\} \;\supseteq\; \{O : T \subseteq O \subseteq \mathfrak{P}(X) \;\wedge\; O \text{ ist } \sigma\text{-Algebra}\}$
$\Rightarrow \bigcap\{O : S \subseteq O \subseteq \mathfrak{P}(X) \;\wedge\; O \text{ ist } \sigma\text{-Algebra}\} \;\subseteq\; \bigcap\{O : T \subseteq O \subseteq \mathfrak{P}(X) \;\wedge\; O \text{ ist } \sigma\text{-Algebra}\}$
$\Rightarrow \sigma(S) \subseteq \sigma(T)$.

Zu (5). Aus (4) folgt $\sigma(S) \subseteq \sigma(\sigma(T))$, wegen (4) folgt dann $\sigma(S) \subseteq \sigma(T)$.

Zum Zusatz 1. Der Beweis ist analog zum Beweis für σ-Algebren.
Zum Zusatz 2. Da jede T umfassende σ-Algebra auch ein T umfassender Ring ist, ist auch $\sigma(T)$ ein solcher, und da $\rho(T)$ der kleinste σ umfassende Ring ist, folgt $\rho(T) \subseteq \sigma(T)$. Daraus folgt $\sigma(\rho(T)) \underset{(4)}{\subseteq} \sigma(\sigma(T)) \underset{(2)}{=} \sigma(T)$. Andererseits gilt $T \underset{(1)\ fuer\ \rho}{\subseteq} \rho(T)$ und daher $\sigma(T) \underset{(4)}{\subseteq} \sigma(\rho(T))$. ■

Nr. 188 (Satz) Der von einem Halbring erzeugte Ring

Ist $\mathfrak{H}$ Halbring über X, so gilt $\rho(\mathfrak{H}) = \{\bigcup_{k=1}^{n} A_k : n \in \mathbb{N} \;\wedge A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{H} \text{ disjunkt}\}$.

Beweis. Siehe [Els 99, 5.6, S. 22]. ■

Nr. 189 (Def) Borelmenge; die Bezeichnungen $\mathfrak{B}_\mathcal{X}$, $\mathfrak{B}^p$, $\overline{\mathfrak{B}}$ und $\hat{\mathfrak{B}}$

Ist $\mathcal{X} = (X, \mathfrak{O})$ topologischer Raum, so heißt die von der Menge $\mathfrak{O}$ über X erzeugte σ-Algebra die σ-Algebra der *borelschen Teilmengen* oder *Borelmengen* von $\mathcal{X}$.
Man bezeichnet diese außer mit $\sigma_X(\mathfrak{O})$ auch mit $\mathfrak{B}_X(\mathfrak{O})$ oder wkM $\mathfrak{B}_\mathcal{X}$ oder $\mathfrak{B}$.

$\mathfrak{B}^p$ ($p \in \mathbb{N}^\odot$) steht wkM für die Menge $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^p}$ der borelschen Mengen von $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{O}^p)$.
$\mathfrak{B}$ steht wkM für $\mathfrak{B}^1$, also für die Menge der $\mathfrak{B}_\mathbb{R}$ der borelschen Mengen von $(\mathbb{R}, \mathfrak{O})$.
$\overline{\mathfrak{B}}$ steht wkM für die Menge $\mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{R}}}(\overline{\mathfrak{O}})$ der borelschen Mengen von $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{O}})$.
$\hat{\mathfrak{B}}$ schließlich steht wkM im Zusammenhang mit der Bezeichnung $\hat{\mathbb{R}}$ bzw. $\hat{\mathbb{K}}$ für die Menge der Borelmengen von $(\hat{\mathbb{R}}, \hat{\mathfrak{O}})$ (zu $\hat{\mathfrak{O}}$ vgl. Def 26), das heißt

$$\hat{\mathfrak{B}} := \begin{cases} \mathfrak{B} & \text{falls } \hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \text{ bzw. } \hat{\mathbb{K}} = \mathbb{R} \\ \overline{\mathfrak{B}} & \text{falls } \hat{\mathbb{R}} = \overline{\mathbb{R}} \text{ bzw. } \hat{\mathbb{K}} = \overline{\mathbb{R}} \\ \mathfrak{B}_\mathbb{C} & \text{falls } \hat{\mathbb{K}} = \mathbb{C} \end{cases}$$

Nr. 190 (Def) Borelscher Messraum $\mathcal{B}_\mathcal{X}$ eines topologischen Raumes $\mathcal{X}$; Identifikation eines topologischen Raumes mit seinem borelschen Raum

Ist $\mathcal{X} = (X, \mathfrak{O})$ topologischer Raum, so heißt der Messraum $(X, \mathfrak{B}_X(\mathfrak{O}))$, dessen σ-Algebra die σ-Algebra der Borelschen Teilmengen von $\mathcal{X}$ ist,
der *borelsche Messraum* von $\mathcal{X}$. Wir bezeichnen ihn mit $\mathcal{B}_\mathcal{X}$.

WkM identifizieren wir den topologischen Raum $\mathcal{X} = (X, \mathfrak{O})$
und seinen borelschen Messraum $\mathcal{B}_\mathcal{X} = (X, \mathfrak{B}_X(\mathfrak{O}))$ miteinander.

Nr. 191 (Satz) Verschiedene Erzeuger der borelschen Mengen eines topologischen Raumes

Sei $\mathcal{X} = (X, \mathfrak{O})$ topologischer Raum, $\mathfrak{C}$ die Menge seiner abgeschlossenen Mengen, $\mathfrak{K}$ die seiner kompakten Mengen. Dann gilt

1. $\mathfrak{B}_\mathcal{X} = \sigma_X(\mathfrak{C})$
2. $\mathfrak{B}_\mathcal{X} = \sigma(\mathfrak{K})$, *wenn $\mathcal{X}$ ein Hausdorffraum und ein K_σ-Raum*[1] *ist*
3. $\mathfrak{B}_\mathcal{X} = \sigma(\mathfrak{S})$ *für jede abzählbare Basis $\mathfrak{S}$.*

Beweis. Siehe [Els 99, Folgerungen 4.2, S. 18].

[1] Ein K_σ-Raum ist ein topol. Raum, der eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen ist (vgl. Satz 74).

Nr. 192 (Satz) Endliche Mengen von Hausdorffräumen als Borelmengen

Ist $\mathcal{X} := (X, \mathfrak{O}_{\mathcal{X}})$ Hausdorffraum, so sind alle endlichen Teilmengen von X Borelmengen von $\mathcal{X}$.

Beweis. Endliche Punktmengen eines Hausdorffraums sind abgeschlossen. Nach Satz 191(1) gehören sie daher zu den Borelmengen. ■

Nr. 193 (Satz) Verschiedene Erzeuger der borelschen Mengen auf $\mathbb{R}$

Die folgenden Mengensysteme sind Erzeuger von $\mathfrak{B}$:

$$
\begin{array}{ll}
\mathfrak{O}_{\mathbb{R}} & := \{U \subseteq \mathbb{R} : U \text{ ist offen}\} \\
\mathfrak{C}_{\mathbb{R}} & := \{U \subseteq \mathbb{R} : U \text{ ist abgeschlossen}\} \\
\mathfrak{K}_{\mathbb{R}} & := \{U \subseteq \mathbb{R} : U \text{ ist kompakt}\} \\
\mathfrak{I}_{\mathbb{R}} := \mathfrak{I}_{[\mathbb{R}[} & := \{[a,b[\, : a,b \in \mathbb{R} \;\wedge\; a \leq b\} \\
\mathfrak{I}_{]\mathbb{R}]} & := \{]a,b] \, : a,b \in \mathbb{R} \;\wedge\; a \leq b\} \\
\mathfrak{I}_{]\mathbb{R}[} & := \{]a,b[\, : a,b \in \mathbb{R} \;\wedge\; a \leq b\} \\
\mathfrak{I}_{[\mathbb{R}]} & := \{[a,b] \, : a,b \in \mathbb{R} \;\wedge\; a \leq b\} \cap \{\emptyset\} \\
\mathfrak{I}_{]\mathbb{R}[} & := \{]a,b[\, : a,b \in \mathbb{R} \;\wedge\; a \leq b\} \\
\mathfrak{I}_{]\mathbb{Q}[} & := \{]a,b[\, : a,b \in \mathbb{Q} \;\wedge\; a \leq b\} \\
\mathfrak{F}_{\mathbb{R}} & := \{\bigcup_{k=1}^{n} A_k \, : n \in \mathbb{N} \;\wedge A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{I}_{\mathbb{R}} \text{ disjunkt}\}
\end{array}
$$

Beweis. Siehe [Els 99, Satz 4.3, S. 19]. ■

Nr. 194 (Satz) Bewahrung der Erzeugung bei Übergang zu Urbildern

Sei $f\colon X \longrightarrow Y$ Funktion und $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{P}(Y)$ Erzeuger der σ-Algebra $\mathfrak{B}$ über Y.
Dann ist $f^{-1}[\![\mathfrak{B}]\!]$ eine σ-Algebra über X und es gilt:

$f^{-1}[\![\mathfrak{E}]\!]$ $(:= \{f^{-1}[E] : E \in \mathfrak{E}\})$ erzeugt die σ-Algebra $f^{-1}[\![\mathfrak{B}]\!]$ $(:= \{f^{-1}[B] : B \in \mathfrak{B}\})$.
Genauer: $\sigma_X(f^{-1}[\![\mathfrak{E}]\!]) = f^{-1}[\![\sigma_Y(\mathfrak{E})]\!]$

Beweis. Siehe [Els 99, Satz 4.4, S. 19]. ■

Nr. 195 (Satz) Bewahrung der Erzeugung beim Übergang zu Teilmengen

Sei $\mathfrak{E}$ Erzeuger der σ-Algebra $\mathfrak{B}$ über Y, und sei $X \subseteq Y$. Dann gilt:

$\mathfrak{E} \Cap X := \{E \cap X : E \in \mathfrak{E}\}$ erzeugt die σ-Algebra $\mathfrak{B} \Cap X := \{B \cap X : B \in \mathfrak{B}\}$,
Genauer: $\sigma_X(\mathfrak{E} \Cap X) = \mathfrak{B} \Cap X = \sigma_Y(\mathfrak{E}) \Cap X$.

Beweis. Die zeigt Satz 194 mit der Identität $\mathrm{id}_X\colon X \longrightarrow Y$ in der Rolle von f. ■

Nr. 196 (Satz) Borelscher Messraum des topologischen Unterraums

Ist $\mathcal{X}$ topologischer Raum, $T \subseteq X$ und $\mathcal{T}$ der Unterraum von $\mathcal{X}$ mit Träger T, so ist der borelsche Messraum $\mathcal{B}_{\mathbb{T}} := \mathcal{B} \Cap cT$ von $\mathcal{T}$ der Untermessraum von $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ mit Träger T.

Beweis. $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}$ und der Untermessraum von $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ mit Träger T haben trivialerweise beide den Träger T. Zu zeigen ist als nur noch, dass ihre σ-Algebren übereinstimmen.

Sei $\mathcal{X} = (X, \mathfrak{O})$. Per Def des topologischen Unterraums ist dann $\mathcal{T} = (T, \mathfrak{O} \Cap T)$.
Die σ-Algebra $\mathfrak{B}_{\mathcal{X}}$ des Messraums $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ ist dann die von $\mathfrak{O}$ über X erzeugte σ-Algebra $\sigma_X(\mathfrak{O})$, und die σ-Algebra $\mathfrak{B}_{\mathcal{T}}$ des Messraums $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}$ ist per Def 190 des borelschen Messraums gleich $\sigma_T(\mathfrak{O} \Cap T)$, was nach Satz 195 gleich $\mathfrak{B}_{\mathcal{X}} \Cap T$ ist. Letzteres ist per Def 179 des Untermessraums in der Tat die σ-Algebra des Untermessraums von $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ mit Träger T. ■

9.3 Inhalte, Prämaße, Maße und Maßräume

Nr. 197 (Def) Additivität und σ-Additivität von Funktionen

Eine Funktion $\nu\colon \mathfrak{H} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^{\geq 0}$ ($\mathfrak{H}$ über X) heißt *additiv* bzw. σ-additiv
:⇔ für jede *endliche* bzw. *abzählbare* Folge $(A_i)_{i\in I}$ in $\mathfrak{H}$ mit $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathfrak{H}$ gilt
$\nu(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} \nu(A_i)$.

Bem. Mit der leeren Folge $(A_i)_{i\in\emptyset}$ ergibt sich $\nu(\emptyset) = \nu \bigcup_{i\in\emptyset} A_i = \sum_{i\in\emptyset} A_i = 0$.
Ist I abzählbar unendlich, so ist $\sum_{i\in I} \nu(A_i)$ der Grenzwert der Reihe $(\nu(A_k))$ in $\overline{\mathbb{R}}$, der von der Summationsreihenfolge unabhängig ist (unbedingte Konvergenz)

Nr. 198 (Def) Inhalt, Prämaß, Maß, Maßraum

Sei $\mathfrak{H}$ Halbring über X und $\nu\colon \mathfrak{H} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^{\geq 0}$ eine Funktion.

ν ist ein *Inhalt* auf $\mathfrak{H}$ über X	:⇔ ν ist additiv.
ν ist ein *Prämaß* auf $\mathfrak{H}$ über X	:⇔ ν ist σ-additiv.
ν ist ein *Maß* auf $\mathfrak{H}$ über X	:⇔ $\mathfrak{H}$ ist eine σ-Algebra und ν ist σ-additiv.

Für: ν ist ein *Maß* auf $\mathfrak{H}$
sagt man auch: ν ist ein *Maß* auf dem Messraum $(X, \mathfrak{H})$ oder $(X, \mathfrak{H}, \nu)$ ist ein *Maßraum*.

Sei ν ein Inhalt bzw. Maß und $A \in \mathrm{Db}(\nu)$.
Dann wird $\nu(A)$ als *Inhalt* bzw. als *Maß* der Menge A (bezüglich ν) bezeichnet.

Nr. 199 (Def) ν-Messbarkeit für Maße ν und ν-Nullmenge für Inhalte ν

Sei ν ein Maß. Dann verstehen wir unter den *ν-messbaren Mengen* die Elemente des Definitionsbereichs von ν.
Sei ν ein Inhalt. Dann verstehen wir unter den *ν-Nullmengen*
die Elemente von $\nu^{-1}[\{0\}]$, also die Mengen, denen ν den Wert 0 zuordnet.

Nr. 200 (Def) Unter- und Ober-Maßraum

Sei $(X, \mathfrak{A}, \nu)$ Maßraum und $\mathfrak{A}^*$ σ-Algebra über X mit $\mathfrak{A}^* \subseteq \mathfrak{A}$. Dann gilt mit $\nu^* := \nu|\mathfrak{A}^*$, dass auch $(X, \mathfrak{A}^*, \nu^*)$ ein Maßraum ist, denn die σ-Additivität einer Funktion bleibt bei Einschränkungen der Funktion trivialerweise erhalten.

Dieser Maßraum heißt der (durch $\mathfrak{A}^*$ bestimmte) *Unter-Maßraum* von $(X, \mathfrak{A}, \nu)$.
Außerdem heißt $\mathcal{N}$ *Ober-Maßraum* von $\mathcal{M}$ genau dann, wenn $\mathcal{M}$ Unter-Maßraum von $\mathcal{N}$ ist.

Nr. 201 (Satz) Die Spur eines Maßes ist ein Maß

Ist ν Maß auf Messraum $(X, \mathfrak{A})$ und $T \in \mathfrak{A}$, so ist $\nu|\mathfrak{A}_T$ Maß auf Messraum $(T, \mathfrak{A}_T)$.

Beweis. Wegen Satz 179 ist $\mathfrak{A}_T$ eine σ-Algebra. Wegen $T \in \mathfrak{A}$ gehören alle Elemente $A \cap T$ von $\mathfrak{A}_T = \mathfrak{A} \Cap T = \{A \cap T : A \in \mathfrak{A}\}$ zu $\mathfrak{A}$, also ist $\mathfrak{A}_T \subseteq \mathfrak{A}$ und $\nu|\mathfrak{A}_T$ wohldefiniert. Da jede Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{A}_T$ wegen $\mathfrak{A}_T \subseteq \mathfrak{A}$ auch eine solche in $\mathfrak{A}$ ist, ist die σ-Additivität trivial. ■

Nr. 202 (Satz) Isotonie von Inhalten

Jeder Inhalt ν: $\mathfrak{H} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist isoton, das heißt für $A, B \in \mathfrak{H}$ mit $A \subseteq B$ gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$

Beweis. Siehe [Els 99, Folgerung 1.4, S. 28]. ■

Nr. 203 (Satz) Additionsformel, σ-Additionsformel und Subtraktionsformel

1. *(Additionsformel) Sei μ Inhalt auf einem Ring $\mathfrak{R}$. Dann gilt:*
   $\forall\ A, B \in \mathfrak{R}\ \mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$
   mit Korollar: $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für disjunkte $A, B \in \mathfrak{R}$
2. *(σ-Additionsformel) Sei μ Inhalt auf einem Ring $\mathfrak{R}$. Dann gilt für abzählbare disjunkte Folgen $(A_k)_{k\in I}$ in $\mathfrak{R}$ mit $\bigcup_{k\in I}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}$:*
   $\sum_{k\in I} \mu(A_k) \leq \mu(\bigcup_{k\in I} A_k)$.
3. *(Subtraktionsformel) Sei μ Inhalt auf einem Ring $\mathfrak{R}$. Dann gilt:*
   $\forall\ A, B \in \mathfrak{R}\ (B \subseteq A\ \wedge\ \mu(B) < \infty\ \Rightarrow\ \mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B))$

Beweis. Siehe [Els 99, Satz 1.7(a),(b), (e)].

Nr. 204 (Satz) Subadditivität von Inhalten, Prämaßen und Maßen

1. *Sei μ Inhalt auf Ring $\mathfrak{R}$ und $(A_k)_{k\in I}$ endliche Folge in $\mathfrak{R}$.*
   Dann gilt $\mu(\bigcup_{k\in I} A_k) \leq \sum_{k\in I} \mu(A_k)$
2. *Sei μ Prämaß auf Ring $\mathfrak{R}$, $A \in \mathfrak{R}$ und $(A_k)_{k\in I}$ abzählbare Folge in $\mathfrak{R}$ mit $A \subseteq \bigcup_{k\in I} A_k$.*
   Dann gilt $\mu(A) \leq \sum_{i\in I} \mu(A_k)$
3. *Sei μ Maß auf σ-Algebra $\mathfrak{R}$ und $(A_i)_{i\in I}$ abzählbare Folge in $\mathfrak{R}$ mit $A \subseteq \bigcup_{k\in I} A_k$.*
   Dann gilt $\mu(\bigcup_{k\in I} A_k) \leq \sum_{k\in I} \mu(A_k)$

Beweis. Zu (1) und (2) siehe [Els 99, Satz 1.7(c),(f), S. 31-32]. (3) folgt aus (2), wenn man als A hier die Menge $\bigcup_{k\in I} A_k$ nimmt. ■

9.4 Fortsetzungssätze

Nr. 205 (Satz) Fortsetzung eines Inhalts bzw. Prämaßes auf einem Halbring zu einem Inhalt bzw. Prämaß auf einem Ring

Sei ν Inhalt auf dem Halbring $\mathfrak{H}$ über X, und $\mathfrak{R} = \rho(\mathfrak{H})$.

1. *Dann gibt es genau einen Inhalt ν^* auf $\mathfrak{R}$ über X mit $\nu = \nu^*|\mathfrak{H}$*
2. *Ist $A \in \mathfrak{R}$ disjunkte Vereinigung von $A_1, \ldots, A_m \in \mathfrak{H}$, gilt $\nu^*(A) = \sum_{i=1}^m \nu(A_i)$*
3. *ν^* ist genau dann ein Prämaß, wenn ν eines ist.*

Beweis. Siehe [Els 99, 1.6, S. 30-31]. ■

Nr. 206 (Satz und Def) endlicher und σ-endlicher Inhalt

Sei ν ein Inhalt auf einem Halbring $\mathfrak{H}$ über X.

ν ist *endlich* $:\Leftrightarrow$ $\infty \notin \mathrm{Wb}(\nu)$.
ν ist *σ-endlich* über X $:\Leftrightarrow$ es gibt eine Familie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen von $\mathfrak{H} = \mathrm{Db}(\nu)$ mit $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = X$ und $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \nu(A_n) < \infty$

Jeder endliche Inhalt ν auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ über X ist σ-endlich über X.

Beweis. Es sind X und $\emptyset$ Elemente von $\mathfrak{A}$. Setzen wir nun $A_0 := X$ und für alle $n \in \mathbb{N}^{\odot}$: $A_n = \emptyset$, so gilt $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = X$ und $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \nu(A_n) < \infty$. ■

Nr. 207 (Satz) Überdeckungskriterium für Nullmengen

Sei ν Inhalt auf einem Halbring $\mathfrak{H}$ über X und $A \in \mathfrak{H}$.

1. *Ist $(A_k)_{k\in I}$ endliche Folge von ν-Nullmengen und $A \subseteq \bigcup_{k\in I}^{n} A_k$, so ist A ν-Nullmenge.*
2. *Ist ν Prämaß, $(A_k)_{k\in I}$ abzählbare Folge von ν-Nullmengen und $A \subseteq \bigcup_{k\in I} A_k$, so ist A ν-Nullmenge.*
3. *Ist ν Maß, so ist jede Vereinigung abzählbar vieler ν-Nullmengen wieder eine ν-Nullmenge.*

Beweis. Zu (1) bzw. (2). Sei $\mathfrak{R}$ der von $\mathfrak{H}$ erzeugte Ring und μ der gemäß Satz 205 von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{R}$ fortgesetzte Inhalt. Mit Isotonie (Satz 202) und Subadditivität (Satz 204) folgt $\nu(A) = \mu(A) \leq \mu(\bigcup_{k\in I} A_k) \leq \sum_{k\in I} A_k = 0$ und daher $\nu(A) = 0$.
(3) folgt sofort aus (2) mit $\bigcup_{k\in I} A_k$ in der Rolle von A. ■

Nr. 208 (Satz und Def) äußeres Maß über X

Ist X eine Menge, so ist ein *äußeres Maß* über X eine Funktion η: $\mathfrak{P}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit

1. (Leermengenaxiom) $\eta(\emptyset) = 0$
2. (Isotonie) $A \subseteq B \subseteq X \;\Rightarrow\; \eta(A) \leq \eta(B)$
3. (σ-Subadditivität) $(A_n)_{i\in I}$ abzählbare Folge in $\mathfrak{P}(X) \;\Rightarrow\; \eta(\bigcup_{i\in I} A_n) \leq \sum_{i\in I} \eta(A_n)$
   Bem: Für endliches I heißt diese Eigenschaft Subadditivität.

Nr. 209 (Def) η-Messbarkeit und η-Nullmenge für äußere Maße η

Sei η äußeres Maß über X und $A \subseteq X$.

A ist *η-messbar* $:\Leftrightarrow$ für alle $Q \subseteq X$ gilt: $\eta(Q) \geq \eta(Q \cap A) + \eta(Q \cap \complement A)$
A ist *η-Nullmenge* $:\Leftrightarrow$ $\eta(A) = 0$

Hinweis: Der hier definierte Begriff der η-Messbarkeit für ein *äußeres* Maß η ist zu unterscheiden vom Begriff der ν-Messbarkeit für ein Maß ν (zu diesem siehe Def 199).

Nr. 210 (Satz und Def) von einem äußeren Maß induzierte Größen:
σ-Algebra $\mathfrak{A}_\eta$, Maß $\eta|\mathfrak{A}_\eta$, Maßraum $(X, \mathfrak{A}_\eta, \eta|\mathfrak{A}_\eta)$

Sei η äußeres Maß, und X sei die Menge, über welcher η äußeres Maß ist
(X ist offenbar eindeutig bestimmt als Vereinigung der einelementigen Elemente von $\mathrm{Db}(\eta)$).

Dann ist die Menge $\mathfrak{A}_\eta := \{A \in \mathfrak{P}(X) \,:\, A \text{ ist } \eta\text{-messbar}\}$ der η-messbaren Mengen über X eine σ-Algebra über X und $\eta|\mathfrak{A}_n$ ist ein Maß auf $\mathfrak{A}_n$ über X, also $(X, \mathfrak{A}_\eta, \eta|\mathfrak{A}_n)$ ein Maßraum.

Diese σ-Algebra, dieses Maß und dieser Maßraum heißen *vom äußeren Maß η induziert.*

Beweis. Siehe [Els 99, Satz 4.4, S. 52-53]. ■

Nr. 211 (Satz und Def) von einem Inhalt ν induzierte Größen:
äußeres Maß $\eta_X(\nu)$, σ-Algebra $\mathfrak{A}_\eta$, Maß $\eta|\mathfrak{A}_\eta$, Maßraum $(X, \mathfrak{A}_\eta, \eta|\mathfrak{A}_\eta)$

Sei ν ein Inhalt auf dem Halbring $\mathfrak{H}$ über X ($\mathfrak{H}$ ist als $\mathrm{Db}(\nu)$ eindeutig bestimmt)

Sei dann $\eta_X(\nu)$, oder wkM $\eta(\nu)$ oder η die Funktion η: $\mathfrak{P}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit für $A \subseteq X$:
$\eta(A) := \inf\{\sum_{n=0}^{\infty} \nu(A_n) \,:\, \forall\, n \in \mathbb{N}\; A_n \in \mathfrak{H} \;\wedge\; A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\}$.

$\eta_X(\nu)$ ist ein äußeres Maß über X und heißt das von ν *induzierte äußere Maß*. Die von diesem äußeren Maß induzierten Größen gemäß Def 210 heißen auch von *von ν induziert.*

Beweis. Siehe [Els 99, Fortsetzungssatz 4.5 (a), S. 53-54]. ■

Nr. 212 (Satz) Teilmengenbeziehung von $\sigma(\mathfrak{H})$ und $\mathfrak{A}_\eta$

Sei ν ein Inhalt auf dem Halbring $\mathfrak{H}$ über X.
Sei $\eta := \eta_X(\nu)$ das von ν über X induzierte äußere Maß (siehe Def 211).

Alle Mengen aus $\sigma(\mathfrak{H})$ (erst recht also aus $\mathfrak{H}$) sind η-messbar, das heißt $\sigma(\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{A}_\eta$

Beweis. Siehe [Els 99, Fortsetzungssatz 4.5(a), S. 53-54]. ■

Nr. 213 (Satz und Def) von einem Inhalt ν induzierte reduzierte Größen: σ-Algebra $\sigma(\mathfrak{H})$, Maß $\eta|\sigma(\mathfrak{H})$ und Maßraum $(X, \sigma(\mathfrak{H}), \eta|\sigma(\mathfrak{H}))$

Sei ν ein Inhalt auf $\mathfrak{H}$ über X ($\mathfrak{H}$ ist eindeutig bestimmt als $\mathrm{Db}(\nu)$).

Dann nennen wir die von $\mathfrak{H}$ über X erzeugte σ-Algebra $\sigma_X(\mathfrak{H})$ (wkM $\sigma(\mathfrak{H})$), die nach Satz 212 Teilmenge der von ν über X induzierten σ-Algebra $\mathfrak{A}_\eta := \mathfrak{A}_{\eta_X(\nu)}$ ist, auch die *von ν über X induzierte reduzierte σ-Algebra.*

Mit dem von ν induzierten äußeren Maß $\eta := \eta_X(\nu)$ ist $\eta|\sigma(\mathfrak{H})$ ist Maß über X, also $(X, \sigma(\mathfrak{H}), \eta|\sigma(\mathfrak{H}))$ Maßraum, und zwar Untermaßraum des von ν induzierten Maßraums.

Wir nennen darum dieses Maß und diesen Maßraum *das von ν induzierte reduzierte Maß* bzw. den *von ν induzierten reduzierten Maßraum.*

Beweis. Wegen $\sigma(\mathfrak{H}) \underset{Satz\ 212}{\subseteq} \mathfrak{A}_\eta \subseteq X$ ist $\eta|\sigma(\mathfrak{H}) = (\eta|\mathfrak{A}_\eta)|\sigma(\mathfrak{H})$, und die σ-Additivität des Maßes $\eta|\mathfrak{A}_\eta$ bleibt bei Einschränkung auf $\sigma(\mathfrak{H})$ erhalten. Es ist daher $\eta|\sigma(\mathfrak{H})$ ein Maß auf $\sigma(\mathfrak{H})$. Die Beziehung $\eta|\sigma(\mathfrak{H}) = (\eta|\mathfrak{A}_\eta)|\sigma(\mathfrak{H})$ zeigt auch, dass der Maßraum $(X, \sigma(\mathfrak{H}), \eta|\sigma(\mathfrak{H}))$ ein Unter-Maßraum des von ν induzierten Maßraums $(X, \mathfrak{A}_\eta, \eta|\mathfrak{A}_\eta)$ ist. ■

Nr. 214 (Satz) Fortsetzungssatz für Prämaße

Sei ν ein Inhalt auf dem Halbring $\mathfrak{H}$ über X und sei

- η *das von ν induzierte äußere Maß $\eta_X(\nu)$ (siehe Def 211)*
- ν^* *die Fortsetzung von ν zu einem Inhalt dem Ring $\mathfrak{R} := \rho(\mathfrak{H})$ (siehe Satz 205)*
- ν^{**} *das von ν induzierte reduzierte Maß $\eta|\sigma(\mathfrak{H})$ (siehe Def 213)*
- ν^{***} *das von ν induzierte Maß $\eta|\mathfrak{A}_\eta$ (siehe Def 211)*

Dann gilt: $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{R} \subseteq \sigma(\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{A}_\eta \subseteq X$, und wenn ν Prämaß auf $\mathfrak{H}$ ist, gilt außerdem:

0. $\nu = \eta|\mathfrak{H} = \nu^{***}|\mathfrak{H} = \nu^{**}|\mathfrak{H} = \nu^*|\mathfrak{H}$ *und es ist*
1. ν^* *Fortsetzung von ν auf den Ring* $\mathfrak{R}$,
2. ν^{**} *Fortsetzung von ν^* auf die σ-Algebra* $\sigma(\mathfrak{H})$,
3. ν^{***} *Fortsetzung von ν^{**} auf die σ-Algebra* $\mathfrak{A}_\eta$,
4. η *Fortsetzung von ν^{***} auf die Grundmenge* X.

Zusatz. Ist der Inhalt ν kein *Prämaß, so ist die für den Satz grundlegende Aussage (0) falsch, denn es gibt dann ein $A \in \mathfrak{H}$ mit $\eta(A) < \nu(A)$ (so dass $\nu \neq \eta|\mathfrak{H}$).*

Beweis. Siehe [Els 99, Fortsetzungssatz 4.5(b)-(c), S. 53-54]. ■

Nr. 215 (Satz) Bedingte Eindeutigkeit der Fortsetzung

Seien μ, ν Maße auf einer von $\mathfrak{E}$ erzeugten σ-Algebra $\mathfrak{A}$ über X, und es gelte:

1. *$\mathfrak{E}$ ist durchschnitts-stabil, das heißt mit zwei Mengen ist auch ihr Durchschnitt in $\mathfrak{E}$*
2. $\mu|\mathfrak{E} = \nu|\mathfrak{E}$
3. *Es gibt eine Folge (E_n) in $\mathfrak{E}$ mit $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n = X$ und $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \mu(E_n) < \infty$*

Dann folgt $\mu = \nu$.

Beweis. Siehe [Els 99, Satz 5.6, S. 60]. ■

Nr. 216 (Def) vollständiges Maß und vollständiger Maßraum

Ein Maß ν auf $\mathfrak{A}$ über X bzw. ein Maßraum $(X, \mathfrak{A}, \nu)$ ist *vollständig*
:⇔ jede Teilmenge einer ν-Nullmenge ist ν-messbar (nach Satz 202 also Nullmenge).

Nr. 217 (Satz) Vollständigkeit der von äußeren Maßen induzierten Maßräume

Ist η äußeres Maß über X, so ist $(X, \mathfrak{A}_\eta, \eta|\mathfrak{A}_\eta)$ vollständig.

Beweis. Siehe [Els 99, Beispiel 6.2, S. 63]. ■

Nr. 218 (Satz und Def) maßtheoretische Vervollständigung

Sei $\mathcal{M} := (X, \mathfrak{A}, \nu)$ Maßraum, und $\mathfrak{N}$ die Menge aller Teilmengen von ν-Nullmengen.

$\widetilde{\mathfrak{A}_{(X,\nu)}} := \{A \cup T \,:\, A \in \mathfrak{A} \;\wedge\; T \in \mathfrak{N}\}$ heißt *ν-Vervollständigung* der σ-Algebra $\mathfrak{A}$ über X und wird wkM mit $\widetilde{\mathfrak{A}}$ bezeichnet.

1. $\widetilde{\mathfrak{A}}$ ist eine σ-Algebra über X, wobei $\mathfrak{A} \subseteq \widetilde{\mathfrak{A}}$.
2. Es gibt es genau eine Funktion $f\colon \widetilde{\mathfrak{A}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit $\forall\, A \in \mathfrak{A},\; T \in \mathfrak{N} \;:\; f(A \cup T) = \nu(A)$.
3. f ist Fortsetzung von ν und $(X, \widetilde{\mathfrak{A}}, f)$ ein vollständiger Maßraum.
4. f ist die einzige Fortsetzung von ν zu einem Inhalt (sogar Maß) auf $\widetilde{\mathfrak{A}}$

f heißt die *Vervollständigung* des Maßes ν über X und wird mit $\widetilde{\nu_X}$ (wkM mit $\widetilde{\nu}$) bezeichnet (f hängt von $\mathfrak{A}, X$ und ν ab, aber $\mathfrak{A} = \mathrm{Db}(\nu)$ ist bereits durch ν bestimmt)

$(X, \widetilde{\mathfrak{A}}, \widetilde{\nu})$ heißt *Vervollständigung* von $\mathcal{M} := (X, \mathfrak{A}, \nu)$ und wird wkM mit $\widetilde{\mathcal{M}}$ bezeichnet.

Beweis. Siehe [Els 99, Satz 6.3, S. 64]. ■

Nr. 219 (Satz) Die Vervollständigung eines Maßraums M als kleinster vollständiger M enthaltender Ober-Maßraum

Sei $(X, \mathfrak{A}, \nu)$ ein Maßraum. Dann ist dessen Vervollständigung $(X, \widetilde{\mathfrak{A}}, \widetilde{\nu})$ der „kleinste vollständige M enthaltende Obermaßraum“ in folgendem Sinne:

1. *$(X, \widetilde{\mathfrak{A}}, \widetilde{\nu})$ ist vollständiger Obermaßraum von $(X, \mathfrak{A}, \nu)$ (d. h. $\mathfrak{A} \subseteq \widetilde{\mathfrak{A}} \;\wedge\; \nu = \widetilde{\nu}|\mathfrak{A}$)*
2. *Ist $(X, \mathfrak{A}^*, \nu^*)$ vollständiger Obermaßraum von $(X, \mathfrak{A}, \nu)$ (d. h. $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}^* \;\wedge\; \nu = \nu^*|\mathfrak{A}$) so ist $(X, \widetilde{\mathfrak{A}}, \widetilde{\nu})$ Untermaßraum von $(X, \mathfrak{A}^*, \nu^*)$ (d. h. $\widetilde{\mathfrak{A}} \subseteq \mathfrak{A}^* \;\wedge\; \widetilde{\nu} = \nu^*|\widetilde{\mathfrak{A}}$)*
3. *$(X, \widetilde{\mathfrak{A}}, \widetilde{\nu})$ ist der einzige Maßraum über X mit den Eigenschaften (1) und (2)*

Beweis. (1) folgt aus Satz 218(3). Zu (2). Wegen $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}^*$ enthält $\mathfrak{A}^*$ alle Elemente A von $\mathfrak{A}$. Wegen der Vollständigkeit enthält $\mathfrak{A}^*$ alle Teilmengen von ν^*-Nullmengen, darunter sind wegen $\nu = \nu^*|\mathfrak{A}$ auch alle Teilmengen T von ν-Nullmengen. Damit enthält $\mathfrak{A}$ auch alle Mengen

$A \cup T$, worin $A \in \mathfrak{A}$ und T Teilmenge einer ν-Nullmenge ist. Das heißt: $\mathfrak{A}^*$ enthält alle Mengen von $\widetilde{\mathfrak{A}}$. Somit gilt $\widetilde{\mathfrak{A}} \subseteq \mathfrak{A}^*$.

Ist nun $A \cup T \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ gegeben, mit $A \in \mathfrak{A}$ und T Teilmenge einer ν-Nullmenge N, so ist N (wegen $\nu = \nu^*|\mathfrak{A}$) auch eine ν^*-Nullmenge, und es folgt per Isotonie und Subadditivität von ν^*, dass $\nu^*(A) \leq \nu^*(A \cup T) \leq \nu^*(A) + \nu^*(T) \leq \nu^*(A) + \nu^*(N) = \nu^*(A)$, also $\nu^*(A \cup T) = \nu^*(A)$. Daher folgt (wieder mit Blick auf $\nu = \nu^*|\mathfrak{A}$), dass $\widetilde{\nu}(A \cup T) = \nu(A) = \nu^*(A) = \nu^*(A \cup T)$. Somit gilt $\widetilde{\nu} = \nu^*|\widetilde{\mathfrak{A}}$.

Zu (3). Habe $(X, \widehat{\mathfrak{A}}, \widehat{\nu})$ ebenfalls die Eigenschaften (1) und (2). Dann ist $\widetilde{\mathfrak{A}} \subseteq \widehat{\mathfrak{A}}$, weil $(X, \widehat{\mathfrak{A}}, \widehat{\nu})$ die Eigenschaft (1) und $(X, \widetilde{\mathfrak{A}}, \widetilde{\nu})$ die Eigenschaft (2) hat. Auch ist $\widehat{\mathfrak{A}} \subseteq \widetilde{\mathfrak{A}}$, weil $(X, \widetilde{\mathfrak{A}}, \widetilde{\nu})$ die Eigenschaft (1) und $(X, \widehat{\mathfrak{A}}, \widehat{\nu})$ die Eigenschaft (2) hat. Insgesamt also $\widehat{\mathfrak{A}} = \widetilde{\mathfrak{A}}$.

Außerdem ist $\widetilde{\nu} = \widehat{\nu}|\widetilde{\mathfrak{A}}$, weil $(X, \widehat{\mathfrak{A}}, \widehat{\nu})$ die Eigenschaft (1) und $(X, \widetilde{\mathfrak{A}}, \widetilde{\nu})$ die Eigenschaft (2) hat. Da aber, wie soeben gezeigt, $\widetilde{\mathfrak{A}}$ gleich dem Definitionsbereich $\widehat{\mathfrak{A}}$ von $\widehat{\nu}$ ist, folgt dann $\widetilde{\nu} = \widehat{\nu}|\widetilde{\mathfrak{A}} = \widehat{\nu}$. Insgesamt ist also $(X, \widehat{\mathfrak{A}}, \widehat{\nu}) = (X, \widetilde{\mathfrak{A}}, \widetilde{\nu})$. ■

Nr. 220 (Satz) Der von einem Prämaß ν induzierte Maßraum als Vervollständigung des induzierten reduzierten Maßraums

Sei $\nu \colon \mathfrak{H} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein σ-endliches Prämaß auf dem Halbring über $\mathfrak{H}$ über X.
Dann ist der von ν induzierten Maßraum $(X, \mathfrak{A}_\eta, \eta|\mathfrak{A}_\eta)$ die Vervollständigung des von ν induzierten reduzierten *Maßraums $(X, \sigma(\mathfrak{H}), \eta|\sigma(\mathfrak{H}))$*

Beweis. Siehe [Els 99, Satz 6.4, S. 64]. ■

Nr. 221 (Satz) Fortsetzungssatz für σ-endliche Prämaße

Sei ν ein σ-endliches Prämaß auf dem Halbring $\mathfrak{H}$ über X. Sei $\mathfrak{R}$ der von $\mathfrak{H}$ über X erzeugte Ring $\rho_X(\mathfrak{H})$ und η das von ν über X induzierte äußere Maß $\eta_X(\nu)$.

0. *$\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{R} \subseteq \sigma(\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{A}_\eta \subseteq X$ und*
1. *Es gibt genau eine Fortsetzung ν^* von ν zu einem Prämaß auf $\mathfrak{R}$ über X*
2. *Es gibt genau eine Fortsetzung ν^{**} von ν zu einem Maß auf $\sigma(\mathfrak{H})$ über X, und ν^{**} ist eine Fortsetzung von ν^**
3. *Es gibt genau eine Fortsetzung ν^{***} von ν zu einem Maß auf $\mathfrak{A}_\eta$ über X; und ν^{***} ist eine Fortsetzung von ν^{**} sowie die Vervollständigung von ν^{**} über X*
4. *Der Maßraum $(X, \mathfrak{A}_\eta, \nu^{***})$ ist die Vervollständigung von $(X, \sigma(\mathfrak{H}), \nu^{**})$*

Beweis. Die Teilmengenbeziehung $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{R} \subseteq \sigma(\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{A}_\eta \subseteq X$ wurde bereits in Satz 214 bewiesen, und (1) wurde in Satz 205 bewiesen. Setzen wir nun $\nu^{**} := \eta|\sigma(\mathfrak{H})$ und $\nu^{***} := \mathfrak{A}_\eta$, so wissen wir aus Satz 214, dass ν^{**} eine Fortsetzung von ν und auch von ν^{*} zu einem Maß auf $\sigma(\mathfrak{H})$ ist, und dass ν^{***} eine Fortsetzung von ν, von ν^{*} und von ν^{**} zu einem Maß auf $\mathfrak{A}_\eta$ ist.

Wir zeigen nun die Eindeutigkeitsaussagen von (2) und (3) zu beweisen. Für (2) aber folgt die Eindeutigkeit sofort aus Satz 215 (die Voraussetzungen dieses Satzes sind mit Blick auf die σ-Endlichkeit erfüllt).
Zum Beweis der Eindeutigkeit für (3) schließlich sei angenommen, dass μ eine weitere Fortsetzung von ν zu einem Maß auf $\mathfrak{A}_\eta$ ist. Dann ist trivialerweise $\mu|\sigma(\mathfrak{H})$ ebenso wie $\mu^{***}|\sigma(\mathfrak{H})$ eine Fortsetzung von ν zu einem Maß auf $\sigma(\mathfrak{H})$. Wegen der Eindeutigkeitsaussage von (2) ist also $\mu|\sigma(\mathfrak{H}) = \nu^{***}|\sigma(\mathfrak{H}) := \beta$. Es sind dann μ und ν^{***} Fortsetzungen von β zu einem Inhalt von $\mathfrak{A}_\eta$, das heißt nach Satz 220 zu einem Inhalt von $\widetilde{\sigma(\mathfrak{H})}$. Nun gibt es aber nach Satz 218(4) genau eine solche Fortsetzung. Mithin folgt $\mu = \nu^{***}$.

Wegen Satz 220 schließlich ist ν^{***} die Vervollständigung von ν^{**}, und daraus folgt (4).■

9.5 Messbare Funktionen

Nr. 222 (Def) maßtheoretische Funktion und ihre linke und rechte σ-Algebra

Eine Funktion $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ heißt *maßtheoretische Funktion*
:⇔ $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ ist jeweils ein Messraum oder ein mit diesem identifizierter Raum.
Hierbei wird ein topologischer Raum stets mit seinem borelschen Messraum identifiziert.

Sei $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ maßtheoretische Funktion. Dann sei

die *linke σ-Algebra* von f die σ-Algebra des Messraums $\mathcal{X}$ (falls $\mathcal{X}$ topologischer Raum ist, also die σ-Algebra des borelschen Messraums $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ von $\mathcal{X}$).

und die *rechte σ-Algebra* von f
die σ-Algebra des Messraums $\mathcal{Y}$ (falls $\mathcal{Y}$ topologischer Raum ist, also die σ-Algebra des borelschen Messraums $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ von $\mathcal{Y}$).

Nr. 223 (Def) Arten maßtheoretischer Funktionen

Sei $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ maßtheoretische Funktion.

f ist *numerisch*	:⇔	$\mathcal{Y}$ ist der topologische Raum $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{O}})$
f ist *reell*	:⇔	$\mathcal{Y}$ ist der topologische Raum $(\mathbb{R}, \mathfrak{O})$
f ist *komplex*	:⇔	$\mathcal{Y}$ ist der topologische Raum $(\mathbb{C}, \mathfrak{O}_{\mathbb{C}})$
f ist $\mathbb{K}$-*Funktion*	:⇔	$\mathcal{Y}$ ist der topologische Raum $(\mathbb{K}, \mathfrak{O}_{\mathbb{K}})$
f ist $\hat{\mathbb{R}}$-*Funktion*	:⇔	$\mathcal{Y}$ ist der topologische Raum $(\hat{\mathbb{R}}, \hat{\mathfrak{O}})$
f ist $\hat{\mathbb{K}}$-*Funktion*	:⇔	$\mathcal{Y}$ ist der topologische Raum $(\hat{\mathbb{K}}, \hat{\mathfrak{O}})$
f ist *mehrdimensional reell*	:⇔	$\mathcal{Y}$ ist der topologische Raum $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{O}^n)$ $(n \in \mathbb{N}^{\odot})$
f ist *mehrdimensional komplex*	:⇔	$\mathcal{Y}$ ist der topologische Raum $(\mathbb{C}^n, \mathfrak{O}_{\mathbb{C}^n})$ $(n \in \mathbb{N}^{\odot})$
f ist *mehrdimensional*	:⇔	$\mathcal{Y}$ ist der topologische Raum $(\mathbb{K}^n, \mathfrak{O}_{\mathbb{K}^n})$ $(n \in \mathbb{N}^{\odot})$
f ist *Banachraum-Funktion*	:⇔	$\mathcal{Y}$ ist Banachraum oder ein topologischer Raum, der von einem Banachraum induziert ist
f ist *nichtnegativ*	:⇔	f ist reell oder numerisch und $\forall\ y \in y\ f(y) \geq 0$

Nr. 224 (Satz und Def) messbare Funktionen

Sei f maßtheoretische Funktion mit linker bzw. rechter σ-Algebra $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$.

f ist $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-*messbar* (wkM messbar) :⇔ $\forall\ B \in \mathfrak{B}\ f^{-1}[B] \in \mathfrak{A}$.

Nr. 225 (Satz) Beziehung zwischen den Messbarkeitsbegriffen

Neben der ν-Messbarkeit für Maße ν (Def 199) und der η-Messbarkeit für äußere Maße (Def 209) ist die Messbarkeit für Funktionen gemäß Def 224 ein weiterer Messbarkeitsbegriff. Zwischen diesem und dem ersten Messbarkeitsbegriff besteht folgender Zusammenhang:

Ist μ bzw. ν Maß auf der linken bzw. rechten σ-Algebra von f, so gilt:
f ist messbar $:\Leftrightarrow$ das Urbild jeder ν-messbaren Menge A unter f ist μ-messbare Menge.

Beweis. trivial. ■

Nr. 226 (Def) streng messbare Funktion

Sei f: $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ maßtheoretische Funktion, wobei $\mathcal{Y}$ topologischer Raum ist.
f ist streng messbar $:\Leftrightarrow$ f ist messbar und $\mathrm{Wb}(F)$ im Raum $\mathcal{Y}$ separabel (siehe Anhang, Def 351)

Nr. 227 (Satz) Äquivalenz von Messbarkeit und strenger Messbarkeit für numerische, reelle, komplexe, $\mathbb{K}$-, $\hat{\mathbb{K}}$-, mehrdimensionale, und nichtnegative Funktionen

Für diese Funktionen f gilt stets: f ist messbar $\Leftrightarrow$ f ist streng messbar

Beweis. $\Leftarrow$ ist trivial. Zu $\Rightarrow$. $\overline{\mathbb{R}}$ und $\mathbb{K}^n$ sind separable Räume. $\mathrm{Wb}(f)$ ist also Teilmenge eines separablen metrisierbaren Raums, also ebenfalls separabel (vgl. Anhang, Satz 352(4)). ■

Nr. 228 (Satz) Messbarkeit von konstanten Funktionen

Jede konstante maßtheoretische Funktion f ist messbar,
und wenn $\mathrm{Wb}f$ Teilmenge eines topologischen Raums ist, sogar streng messbar.

Beweis. Sei X der Definitionsbereich, $\mathfrak{A}$ die linke und $\mathfrak{B}$ die rechte σ-Algebra von f. Falls der konstante Wert von f ein Element von $B \in \mathfrak{B}$ ist, ist $f^{-1}[B] = X \in \mathfrak{A}$, ansonsten ist $f^{-1}[B] = \emptyset \in \mathfrak{A}$. Damit ist f messbar. Ist schließlich der Wertebereich Teilmenge eines topologischen Raumes, so ist $\mathrm{Wb}(f)$ als abzählbare Menge in diesem Raum separabel (vgl. Anhang, Satz 352(1)). Also ist f streng messbar. ■

Nr. 229 (Satz) Messbarkeit von Inklusionsfunktionen

Sei i maßtheoretische Inklusionsfunktion von $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ mit linker σ-Algebra $\mathfrak{A}$
und rechter σ-Algebra $\mathfrak{B}$, und sei $\{B \cap X \;:\; B \in \mathfrak{B}\} \subseteq \mathfrak{A}$. Dann ist i messbar.

Beweis. Wegen $X \subseteq Y$ und $\forall\, x \in X\ i(x) = x$ gilt für $B \in \mathfrak{B}$: $i^{-1}[B] = B \cap X \in \mathfrak{A}$. ■

Nr. 230 (Satz) Messbarkeit von identischen Funktionen

Identische Funktionen $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}$ *($\mathcal{X}$ Messraum oder topologischen Raum) sind messbar.*

Beweis. $\mathrm{id}(\mathcal{X})$ ist maßtheoretische Inklusionsfunktion von $\mathcal{X}$ in $\mathcal{X}$; ist $\mathcal{A}$ die linke und daher auch die rechte σ-Algebra von $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}$ so gilt $\{B \cap X\ :\ B \in \mathfrak{A}\} \subseteq \mathfrak{A}$, da mit B auch $B \cap X$ Element von $\mathfrak{A}$ ist. Daher folgt die Behauptung aus Satz 229. ■

Nr. 231 (Satz) Einschränkungssatz für Messbarkeit

Sei $f\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ maßtheoretische Funktion mit linker σ-Algebra $\mathfrak{A}$ und rechter σ-Algebra $\mathfrak{B}$, sei $T \subseteq X$ mit $T \in \mathfrak{A}$.
Sei $\mathcal{T}$ der Untermessraum bzw. topologische Unterraum von $\mathcal{X}$ mit Träger T.

Dann ist die Einschränkung $f|\mathcal{T}\colon \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{Y}$ eine maßtheoretische Funktion mit linker σ-Algebra $\mathfrak{A}_T := \mathfrak{A} \Cap T$ und rechter σ-Algebra $\mathfrak{B}$, und es gilt:

f ist messbar [bzw. streng messbar] $\Rightarrow$ $f|\mathcal{T}$ ist messbar [bzw. streng messbar],
und wenn $\mathcal{Y}$ metrisierbar ist, gilt auch: f ist streng messbar $\Rightarrow$ $f|\mathcal{T}$ ist streng messbar.

Beweis. Dass die linke σ-Algebra von $f|\mathcal{T}$ gleich $\mathfrak{A} \Cap T$ ist, folgt im Fall, dass $\mathcal{X}$ ein Messraum ist, direkt per Def 179 des Untermessraums von $\mathcal{X}$ mit Träger T. Falls aber $\mathcal{X}$ ein topologischer Raum ist, also $\mathfrak{A}$ die σ-Algebra des borelschen Messraums $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ von $\mathcal{X}$, so ist die linke σ-Algebra von $f|\mathcal{T}$ die σ-Algebra des borelschen Messraums $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}$ von $\mathcal{T}$, das heißt nach Satz 196 die σ-Algebra des Untermessraums von $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ mit Träger T. Das ist per Def 179 wieder $\mathfrak{A} \Cap T$.
Dass die rechte σ-Algebra von $f|\mathcal{T}$ gleich $\mathfrak{B}$ ist, ist trivial.
Für $B \in \mathfrak{B}$ gilt nun $(f|T)^{-1}[B] = \{x \in T\ :\ f(x) \in B\} = T \cap \{x \in X\ :\ f(x) \in B\} = f^{-1}[B] \cap T \in \mathfrak{A} \Cap T = \mathfrak{A}_T$. Somit ist $f|T$ messbar.
Ist f zusätzlich streng messbar, so ist $\mathrm{Wb}(f)$ im Raum $\mathcal{Y}$ separabel, was wegen $\mathrm{Wb}(f|\mathcal{T}) \subseteq \mathrm{Wb}(f)$ auch für $\mathrm{Wb}(f|\mathcal{T})$ gilt (vgl. Anhang, Satz 352(4)). Also ist $f|\mathcal{T}$ streng messbar. ■

Nr. 232 (Satz) Zusammensetzung messbarer Funktionen

Sei $\mathcal{X}$ bzw. $\mathcal{Y}$ Messraum oder topologischer Raum und $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ je nachdem die σ-Algebra oder die Menge der borelschen Mengen von $\mathcal{X}$ bzw. $\mathcal{Y}$.

Sei $X_1, X_2 \in \mathfrak{A}$ und seien $\mathcal{X}_1$ und $\mathcal{X}_2$ die Untermessräume bzw. topologischen Unterräume von $\mathcal{X}$ mit Träger X_1 bzw. X_2.

Seien $f_1\colon \mathcal{X}_1 \longrightarrow \mathcal{Y}$ und $f_2\colon \mathcal{X}_2 \longrightarrow \mathcal{Y}$ Funktionen mit $f_1|(X_1 \cap X_2) = g|(X_1 \cap X_2)$, und sei $f := f_1 \cup f_2$. Dann gilt:

f_1 und f_2 messbar [bzw. streng messbar] $:\Leftrightarrow$ f ist messbar [bzw. streng messbar].

Beweis. Da f_1 und f_2 die Einschränkungen von f auf $\mathcal{X}_1$ bzw. $\mathcal{X}_2$ sind, folgt $\Leftarrow$ aus Satz 231, der auch zeigt, dass die linke σ-Algebra von f_1 bzw. f_2 gleich $\mathfrak{A} \Cap X_1$ bzw. $\mathfrak{A} \Cap X_2$ ist.

Zu $\Rightarrow$. Für $B \in \mathfrak{B}$ gilt $f^{-1}[B] = f_1^{-1}[B] \cup f_2^{-1}[B]$, wobei $f_1^{-1}[B]$ Element der linken σ-Algebra $\mathfrak{A} \Cap X_1$ von f_1 und entsprechend $f_2^{-1}[B] \in \mathfrak{A} \Cap X_2$ ist. Es gibt also Mengen $V, W \in \mathfrak{A}$, so dass $f^{-1}[B] = (V \cap X_1) \cup (W \cap X_2)$. Da V, W, X_1, X_2 Elemente von $\mathfrak{A}$ sind, so auch $(V \cap X_1) \cup (W \cap X_2)$. Also ist die zusammengesetzte Funktion f messbar.

Unter Voraussetzung der strengen Messbarkeit sind $f_1[X_1]$ und $f_2[X_2]$ in $\mathcal{Y}$ separabel, also ist auch die Vereinigung $f_1[X_1] \cup f_2[X_2]$ dort separabel (vgl. Anhang, Satz 352(2)), das heißt $f[X] = \mathrm{Wb}(f)$ ist separabel in $\mathcal{Y}$. Also ist f streng messbar. ■

Nr. 233 (Satz) Kriterium für Messbarkeit von Funktionen mit abzählbar vielen Werten

Sei $\mathcal{X}$ Messraum bzw. topologischer Raum, $\mathcal{Y}$ Hausdorffraum und $f\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ Funktion mit abzählbarem Wertebereich. Dann ist äquivalent:

1. *f ist messbar*
2. *f ist streng messbar*
3. *Für jedes $y \in \mathrm{Wb}(f)$ ist $f^{-1}[\{y\}]$ messbar, d. h. gehört zur linken σ-Algebra von f*

Beweis. Aus (1) folgt (2), weil $\mathrm{Wb}(f)$ abzählbar und daher separabel ist (vgl. Anhang, Satz 352(1)).
Aus (2) folgt (3), weil nach Satz 192 die einelementigen Mengen $\{y\}$ als endliche Mengen zu den Borelmengen von $\mathcal{Y}$, also zur rechten σ-Algebra von f gehören.
Aus (3) folgt (1), denn für jede Teilmenge B von Y, insbesondere für jede zur linken σ-Algebra von f gehörige Menge, ist $f^{-1}[B]$ die abzählbare Vereinigung $\bigcup_{y \in B} f^{-1}[\{y\}]$ von Fasern $f^{-1}[\{y\}]$, so dass $f^{-1}[B]$ als abzählbare Vereinigung messbarer Mengen per Vereinigungsaxiom messbar ist. ■

Nr. 234 (Satz) Erzeugerkriterium für Messbarkeit von Funktionen

Sei $f\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ maßtheoretische Funktion vom Messraum mit linker σ-Algebra $\mathfrak{A}$ und rechter σ-Algebra $\mathfrak{B}$. Sei $\mathfrak{E}$ Erzeuger von $\mathfrak{B}$ über Y. Dann gilt:

f ist messbar $\Leftrightarrow$ $f^{-1}[\![\mathfrak{E}]\!] \subseteq \mathfrak{A}$, das heißt $f^{-1}[E] \in \mathfrak{A}$ für alle $E \in \mathfrak{E}$.

Beweis (vgl. [Els 99, Satz 1.3, S. 86]). $\Rightarrow$ ist trivial. Zu $\Leftarrow$. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra, die Obermenge von $f^{-1}[\![E]\!]$ ist, also die von letzterer Menge erzeugte σ-Algebra (diese ist nach Satz 194 gleich der Menge $f^{-1}[\![\mathfrak{B}]\!]$) Teilmenge von $\mathfrak{A}$. Das aber bedeutet: für jedes $B \in \mathfrak{B}$ ist $f^{-1}[B] \in \mathfrak{A}$, so dass f messbar ist. ■

Nr. 235 (Satz) Messbarkeit stetiger Funktionen und Funktionen

Jede stetige Funktion $f\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ ist messbar.

Beweis. Siehe [Els 99, Korollar 1.4, S. 86]. ■

Nr. 236 (Satz) Messbarkeit konvexer Funktionen

Sei I reelles Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ konvexe Funktion. Dann ist f messbar.

Beweis (vgl. [Els 99, Bem. nach Satz 1.2., S. 220]). Nach [Els 99, Satz 1.2, S. 220] ist f auf $\mathring{I}$ stetig, also $f|\mathring{I}$ schlechthin stetig und darum messbar (Satz 235). f ist also an höchstens an den Randpunkten r von I unstetig. Doch ist die Einschränkung $f|\{r\}$ konstant, also gemäß Satz 228 messbar, und es folgt mit Satz 232 die Messbarkeit von f ($\mathring{I}$ und $\{r\}$ gehören zur linken σ-Algebra von f: für $\{r\}$ folgt dies aus Satz 192, und für $\mathring{I}$ folgt dies aus der Tatsache, dass es sich um ein offenes Intervall handelt). ■

Nr. 237 (Satz) Bewahrung der Messbarkeit unter Komposition

Seien $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ und $g : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z}$ maßtheoretische Funktionen,
Sei $\mathfrak{A}$ die linke σ-Algebra von f, $\mathfrak{B}$ die rechte σ-Algebra von f (und daher die linke von g), und sei $\mathfrak{C}$ die rechte σ-Algebra von g. Dann gilt:

f und g sind messbar [bzw. f messbar und g streng messbar] $\Rightarrow$
$g \circ f$ ist messbar [bzw. streng messbar].

Beweis (vgl. [Els 99, Satz 1.5, S. 87]). Für jedes $C \in \mathfrak{C}$ ist $g^{-1}[C] \in \mathfrak{B}$, also $f^{-1}[g^{-1}[C]] \in \mathfrak{A}$, und dann ist $f^{-1}[g^{-1}[C]] = (f^{-1} \circ g^{-1})[C] = (g \circ f)^{-1}[C] \in \mathfrak{A}$. Also ist $g \circ f$ messbar. Ist g

sogar streng messbar, so ist $\mathrm{Wb}(g \circ f) = \mathrm{Wb}(g)$ separabel, also $g \circ f$ streng messbar. ■

Nr. 238 (Satz) $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-Messbarkeit und $\mathfrak{A}$-$\overline{\mathfrak{B}}$-Messbarkeit

Für σ-Algebren $\mathfrak{A}$ und reellwertiges f gilt: f ist $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-messbar $\Leftrightarrow$ f ist $\mathfrak{A}$-$\overline{\mathfrak{B}}$-messbar.

Beweis. $\Rightarrow$. Die Elemente M von $\overline{\mathfrak{B}}$ haben eine Darstellung $E \cup B$ mit $E \subseteq \{-\infty, \infty\}$ und $B \in \mathfrak{B}$ (siehe [Els 99, Satz vor Nr. 2, S. 105]). Da f reellwertig ist, gilt aber $f^{-1}[M] = f^{-1}[B \cup E] = \{x : f(x) \in B \cup E\} = \{x : f(x) \in B\} = f^{-1}[B] \in \mathfrak{A}$.

$\Leftarrow$. Die Elemente M von $\mathfrak{B}$ sind trivialerweise auch solche von $\overline{\mathfrak{B}}$, so dass $f^{-1}[M] \in \mathfrak{A}$. ■

Nr. 239 (Def) besondere Mengenbeschreibungen mit numerischen Funktionen

Seien $f, g, \ldots$ numerische Funktionen mit demselben Definitionsbereich X und sei $A(f, g, \ldots)$ eine Aussage über $f, g \ldots$.

Dann steht $\{A(f, g, \ldots)\}$ für die Menge $\{x \in X : A(f(x), g(x), \ldots)\}$.

Beispiel. Ist $a \in \overline{\mathbb{R}}$, so steht $\{f < a\}$ für $\{x : f(x) < a\} = f^{-1}[[-\infty, a[]$.

Nr. 240 (Satz) Kriterium für Messbarkeit von $\hat{\mathbb{R}}$-Funktionen

Sei f $\hat{\mathbb{R}}$-Funktion, also reelle oder numerische Funktion mit linker σ-Algebra $\mathfrak{A}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *f ist streng messbar*
2. *f ist messbar*
3. *Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $\{f > a\} \in \mathfrak{A}$*
4. *Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $\{f \geq a\} \in \mathfrak{A}$*
5. *Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $\{f < a\} \in \mathfrak{A}$*
6. *Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $\{f \leq a\} \in \mathfrak{A}$*

Beweis. Zu (1) $\Leftrightarrow$ (2) siehe Satz 227 und zur Äquivalenz von (2) bis (6) [Els 99, Satz 4.2, S. 105]. ■

Nr. 241 (Satz) Schluss auf messbare Mengen mittels messbarer $\hat{\mathbb{R}}$-Funktionen

Sei f messbare reelle oder messbare numerische Funktion, und sei g ebenfalls messbare reelle oder numerische Funktion, wobei beide Funktionen dieselbe linke σ-Algebra $\mathfrak{A}$ haben. Dann gilt:

$\{f < g\}$, $\{f \leq g\}$, $\{f = g\}$ und $\{f \neq g\}$ von X sind Elemente von $\mathfrak{A}$.

Beweis. Siehe [Coh 80, Proposition 2.1.2., S. 49-50]. ■

Nr. 242 (Satz) Kompositionskriterium für Messbarkeit von Funktionen

Sei $\mathcal{X}$ Messraum oder topologischer Raum und $\mathcal{Y} = (Y, \mathfrak{O}_{\mathcal{Y}})$ metrisierbarer topologischer Raum. Dann gilt für maßtheoretische Funktionen $f\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$:

f ist messbar $\Leftrightarrow$ für jede stetige Funktion $g : \mathcal{Y} \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{O})$ ist $g \circ f$ messbar.

Beweis. Siehe [Coh 80, Lemma 8.1.7, S. 257].

Nr. 243 (Satz) Strenge Messbarkeit von Funktionen, die aus Funktionenfolgen messbarer $\hat{\mathbb{R}}$-Funktionen gebildet werden

Sei $(f_n)_{n \in mN}$ Folge von messbaren $\hat{\mathbb{R}}$-Funktionen mit gleichem Definitionsbereich $\mathcal{X}$.

$$\text{Sei für } x \in X \text{ stets } \begin{cases} \sup_{n\geq 0} f_n(x) \\ \inf_{n\geq 0} f_n(x) \\ \limsup f_n(x) \\ \liminf f_n(x) \\ \lim f_n(x) \end{cases} \in \hat{\mathbb{R}}. \quad \text{Dann ist} \begin{cases} \sup_{n\geq 0} f_n(x) \\ \inf_{n\geq 0} f_n(x) \\ \limsup f_n(x) \\ \liminf f_n \\ \lim f_n \end{cases} \text{streng messbar.}$$

(falls $\hat{\mathbb{R}} = \overline{\mathbb{R}}$, trifft die Voraussetzung außer für $\lim f_n(x)$ trivialerweise immer zu).

Sei $(f_n)_{n \in \{1,\ldots,n\}}$ endliche Folge von messbaren $\hat{\mathbb{R}}$-Funktionen.
Dann sind $\max\{f_1, \ldots, f_n\}$ und $\min\{f_1, \ldots, f_n\}$ streng messbar.

Beweis. Wegen Satz 227 ist nur die Messbarkeit zu zeigen. Hierzu siehe [Els 99, Satz 4.3 und 4.4, S. 105-106]. ■

Nr. 244 (Satz) $\genfrac{}{}{0pt}{}{\textbf{Messbarkeit}}{\textbf{strenge Messbarkeit}}$ **der Grenzfunktion** $\genfrac{}{}{0pt}{}{\textbf{messbarer}}{\textbf{streng messbarer}}$ **Funktionen**

Sei $\mathcal{X} = (X, \mathfrak{A})$ Messraum oder topologischer Raum und $\mathcal{Y} = (Y, \mathfrak{O}_{\mathcal{Y}})$ metrisierbarer topologischer Raum.
Sei (f_n) Folge $\genfrac{}{}{0pt}{}{\textit{messbarer}}{\textit{streng messbarer}}$ Funktionen von $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$, die punktweise konvergiert.

Dann ist die Grenzfunktion $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ ebenfalls $\genfrac{}{}{0pt}{}{\textit{messbar}}{\textit{streng messbar}}$.

Beweis. Für die obere Lesart siehe [Coh 80, Proposition 8.1.8., S. 257], für die untere [Coh 80, Proposition E.1., S. 350]. ■

Nr. 245 (Satz) Messbarkeitskriterium für mehrdimensionale Funktionen

Sei $\mathcal{X}$ Messraum oder topologischer Raum und $n \in \mathbb{N}^{\odot}$.

$f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{K}^n$ ist $\genfrac{}{}{0pt}{}{\textit{messbar}}{\textit{streng messbar}}$
$\Leftrightarrow$ für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist $f_i : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\genfrac{}{}{0pt}{}{\textit{messbar}}{\textit{streng messbar}}$.

Beweis. Wegen Satz 227 ist auf beiden Seiten die Messbarkeit zur strengen Messbarkeit äquivalent, und wir brauchen nur die obere Lesart des Satzes zu beweisen. Zum Beweis dieser Lesart siehe [Els 99, Sätze 4.5 und 4.6, S. 106]. ■

Nr. 246 (Satz und Def) Die kanonische Bijektion zwischen $\mathbb{R}^{2n}$ und $\mathbb{C}^n$ und ihre strenge Messbarkeit

Als *kanonische Bijektion von $\mathbb{R}^{2n}$ in $\mathbb{C}^n$* bezeichnen wir die Funktion $F \colon \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ mit $\forall\ (x_1, \ldots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}\ F((x_1, \ldots, x_{2n}) := (x_1 + ix_2, \ldots, x_{2n-1} + ix_{2n})$.
Sei G die Umkehrfunktion der trivialerweise bijektiven Funktion F.

F und G sind streng messbar.

Beweis. Zur Messbarkeit. F und G sind stetig, also nach Satz 235 messbar. Die strenge Messbarkeit folgt nun sofort aus Satz 227. ■

Nr. 247 (Satz) Messbarkeitskriterium für komplexe Funktionen

Sei $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{C}$ komplexe Funktion. Dann ist äquivalent:

1. *f ist messbar*
2. *$\operatorname{Re} f\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\operatorname{Im} f\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ sind messbar.*

Zusatz. In (1), (2) oder beiden Sätzen darf man „messbar“ durch „streng messbar“ ersetzen.

Beweis. Bezeichne g die maßtheoretische kanonischen Bijektion von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{C}$ (gemäß Def 246).
Aus (1) folgt (2). Wegen Satz 246 und 237 ist dann $g^{-1} \circ f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^2$ messbar.
Wegen Satz 245 ist dann auch die Komponentenfunktion $(\mathrm{pr}_1 \circ g^{-1} \circ f)\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ messbar, und diese ist $= \operatorname{Re} f$. Analog ist $\operatorname{Im} f$ messbar.

Aus (2) folgt (1). Sind $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ messbar, so nach Satz 245 auch $F := (\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f)$, also auch nach Satz 237 auch $g \circ F$ messbar. Es ist aber $g \circ F = f$.

Der Zusatz folgt aus Satz 227. ■

Nr. 248 (Satz) Messbarkeitskriterium für $\hat{\mathbb{K}}$-Funktionen

Sei $f : \mathcal{X} \longrightarrow (\hat{\mathbb{K}}, \mathfrak{O}_{\hat{\mathbb{K}}})$ eine $\hat{\mathbb{K}}$-Funktion. Dann ist äquivalent:

1. *f ist messbar*
2. *$\operatorname{Re} f\colon \mathcal{X} \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{O})$ und $\operatorname{Im} f\colon \mathcal{X} \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{O})$ sind messbar*

Zusatz. In (1), (2) oder beiden Sätzen darf man „messbar“ durch „streng messbar“ ersetzen.

Beweis. Der Fall $\hat{\mathbb{K}} = \mathbb{C}$ ist durch den letzten Satz erledigt. Im Fall $\hat{\mathbb{K}} = \mathbb{R}$ oder $= \overline{\mathbb{R}}$ aber ist $\operatorname{Re} f = f$ und $\operatorname{Im} f$ eine konstant auf 0 abbildende und somit streng messbare Funktion. Daher ist die Behauptung dann trivial. ■

Nr. 249 (Satz) Bewahrung der Messbarkeit bei Übergang zur Norm

1. *Sei $\mathcal{Y}$ von einem normierten Vektorraum induzierter topologische Raum und $f\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ messbar. Dann ist auch $\|f\|\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ messbar.*
2. *Sei $g\colon \mathcal{X} \longrightarrow \hat{\mathbb{K}}$ messbar. Dann ist auch $\|g\|\colon \mathcal{X} \longrightarrow \hat{\mathbb{R}}$ messbar.*

Beweis. Die Normfunktion $n\colon \mathcal{Y} \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{O})$ bzw. $n\colon (\hat{\mathbb{K}}, \mathfrak{O}_{\hat{\mathbb{K}}}) \longrightarrow (\hat{\mathbb{R}}, \mathfrak{O}_{\hat{\mathbb{R}}})$ ist stetig, daher nach Satz 235 messbar. Wegen $\|f\| = n \circ f$ bzw. $\|g\| = n \circ g$ folgt die Behauptung aus Satz 237. ■

Nr. 250 (Satz) strenge Messbarkeit von Summe, Produkt, Konjugation, Real-Imaginärteil und Betrag von $\hat{\mathbb{K}}$-Funktionen

Seien f, g messbare $\hat{\mathbb{K}}$-Funktionen mit Definitionsbereich $\mathcal{X}$, und $\lambda, \mu \in \hat{\mathbb{K}}$.

$f \pm g$, αf, $-f$, fg, $\overline{f}$, $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ und $|f|$ sind streng messbar

Beweis. Wegen Satz 227 genügt es, die Messbarkeit zu beweisen. Hierbei genügt es, die Messbarkeit von $f+g$ und fg zu beweisen. Aus der Messbarkeit f, g sowie fg und $f+g$ folgt nämlich sofort auch die von αf, insbesondere die von $(-1)f = -f$ und dann die von $f - g$. Dass $|f|, \operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ messbar sind, folgt aus Satz 249 bzw. Messbarkeitskriterium fuer hat mK-Funktionen, und schließlich ist dann auch $\operatorname{Re} f - \operatorname{Im} f = \overline{f}$ messbar. Somit bleibt nur die Messbarkeit von $f+g$ und fg zu zeigen.

Im Fall $\hat{\mathbb{K}} = \mathbb{K}$ folgt zunächst nach dem Messbarkeitskriterium Satz 245, dass (f, g) messbar ist, also ist die Komposition dieser Funktion mit der stetigen (und darum nach Satz 235 messbaren) Addition bzw. Multiplikation nach Satz 237 messbar, das heißt $f+g$ und fg ist messbar.

Zum Fall $\hat{\mathbb{K}} = \overline{\mathbb{R}}$ siehe [Els 99, Satz 4.7 und 4.8, S. 106-107]. ■

Nr. 251 (Satz und Def) Positiv- und Negativteil f^+ und f^-

Für numerische oder reelle Funktionen f definieren wir:

$f^+ := \max\{f, 0\} \geq 0$ bzw. $f^- := (-f)^+ = \max\{-f, 0\}$ heißt *Positivteil* bzw. *Negativteil* von f.

Trivialerweise gilt stets $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$.

Nr. 252 (Satz) Positiv/Negativteil-Kriterium für Messbarkeit

1. *Eine $\hat{\mathbb{R}}$-Funktion f ist genau dann messbar,*
   wenn ihr Positivteil f^+ und ihr Negativteil f^- messbar ist.
2. *Eine komplexe Funktion f ist genau dann messbar,*
   wenn $(\operatorname{Re} f)^+, (\operatorname{Re} f)^-, (\operatorname{Im} f)^+, (\operatorname{Im} f)^-$ messbar sind.
3. *Eine $\hat{\mathbb{K}}$-Funktion f ist genau dann messbar,*
   wenn die vier Funktionen $(\operatorname{Re} f)^\pm$ und $(\operatorname{Im} f)^\pm$ messbar sind.

Beweis (vgl. [Els 99, Korollar 4.10 und 4.11, S. 107]). Zu (1) $\Rightarrow$. Ist f messbar, so nach Satz

250 auch $-f$, also nach Satz 243 auch $\max\{f,0\} = f^+$ und $\max\{-f,0\} = f^-$. $\Leftarrow$. Sind f^+ und f^- messbar, so nach Satz 250 auch $f^+ + f^- = f$.

Zu (2). Dies folgt aus (1) und Satz 247.

Zu (3). Dies folgt aus Satz (1) und (2). ■

Nr. 253 (Def) $\mathcal{M}$, $\mathfrak{M}$ und $\mathcal{M}^+$

Sei $\mathcal{X}$ Messraum oder topologischer Raum, ebenso $\mathcal{Y}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) &:= \{f : f \text{ ist messbare Funktion von } \mathcal{X} \text{ in } \mathcal{Y}\}\\
\mathfrak{M}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) &:= \{f : f \text{ ist streng messbare Funktion von } \mathcal{X} \text{ in } \mathcal{Y}\}\\
\mathcal{M}^+(\mathcal{X},\hat{\mathbb{R}}) &:= \{f \in \mathcal{M}(\mathcal{X},\hat{\mathbb{R}}) : f \text{ ist nichtnegativ}\}
\end{aligned}$$

Bem. Ist $\mathcal{Y}$ separabler halbmetrischer Raum, so ist $\mathcal{M}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \mathfrak{M}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ (vgl. Anhang, Satz 352(4)) und somit $\mathcal{M}^+(\mathcal{X},\hat{\mathbb{R}})$ auch $= \{f \in \mathfrak{M}(\mathcal{X},\hat{\mathbb{R}}) : f \text{ ist nichtnegativ}\}$. Insbesondere ist also

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(\mathcal{X},\hat{\mathbb{K}}) &= \mathfrak{M}(\mathcal{X},\hat{\mathbb{K}}) \text{ und}\\
\mathcal{M}^+(\mathcal{X},\hat{\mathbb{R}}) &= \{f \in \mathfrak{M}(\mathcal{X},\hat{\mathbb{R}}) : f \text{ ist nichtnegativ}\}.
\end{aligned}$$

9.6 Maßtheoretische Treppenfunktionen

Nr. 254 (Def) Einfache Funktionen

Eine maßtheoretische Funktion mit Werten in einem Hausdorffraum heißt *einfach* genau wenn sie nur endlich viele Werte annimmt.

Nr. 255 (Satz und Def) maßtheoretische Treppenfunktion; $\mathcal{T}_m$ und $\mathcal{T}_m^+$

Seien $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ Messräume (oder damit identifizierte Räume) und $f\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$.

f ist *maßtheoretische Treppenfunktion* $:\Leftrightarrow$ f ist einfach und messbar.

$\mathcal{T}_m(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \;:=\; \{f \,:\, f$ ist maßtheoretische Treppenfunktion von $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}\}$

$\mathcal{T}_m^+(\mathcal{X}, \hat{\mathbb{R}}) \;:= \{f \in \mathcal{T}_m(\mathcal{X}, \hat{\mathbb{R}}) \,:\, f$ ist nichtnegativ$\}$

Bem. Die maßtheoretischen Treppenfunktionen sind von den in Def 118 definierten][- und [[-Treppenfunktionen zu unterscheiden.
Ein Zusammenhang zwischen diesen Objekten wird in Satz 342 beschrieben.

Nr. 256 (Satz) Äquivalenz von Messbarkeit und strenger Messbarkeit bei einfachen Funktionen

Für einfache Funktionen f gilt: f ist messbar $\Leftrightarrow$ f ist streng messbar

Beweis. Spezialfall von Satz 233. ■

Nr. 257 (Satz) strenge Messbarkeit maßtheoretischer Treppenfunktionen

Jede maßtheoretische Treppenfunktion ist streng messbar.

Beweis. Sie ist messbar per Def, und dann wegen Satz 256 streng messbar. ■

Nr. 258 (Def) verallgemeinerte charakteristische Funktion

Seien X Menge, sei $A \subseteq X$ und seien y_1, y_0 seien beliebige Elemente einer Menge Y.

Dann heißt die Funktion $\chi_{A,X,y_1,y_0}\colon X \longrightarrow Y$ mit $\forall\, x \in X$ $\chi_{A,X,y_1,y_0}(x) := \begin{cases} y_1 & \text{falls } x \in A \\ y_0 & \text{sonst} \end{cases}$
charakteristische Funktion von A bezüglich Grundmenge X und Indikatoren y_1, y_2.
Im Fall $y_0 \neq y_1$ sprechen wir von einer *eigentlichen charakteristischen Funktion.*

Im Fall $y_1 = 1$ und $y_0 = 0$ ist χ_{A,X,y_1,y_0} offenbar die gewöhnliche charakteristische Funktion von A bezüglich Grundmenge X.

Nr. 259 (Satz) Charakteristische Funktionen als Treppenfunktionen

Seien $\mathcal{X}$ Messraum oder topologischer Raum.
Sei $\mathcal{Y}$ topologischer Raum und $y_1, y_2 \in Y$.
Falls $\mathcal{X}$ $\frac{\text{Messraum}}{\text{topologischer Raum}}$, sei $\mathfrak{A}$ $\frac{\text{seine } \sigma\text{-Algebra}}{\text{die Menge seiner Borelmengen}}$ und $A \in \mathfrak{A}$.

Dann ist die charakteristische Funktion $\chi := \chi_{A,X,y_1,y_2}$ Treppenfunktion (die gewöhnliche charakteristische Funktion mit $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$, $y_1 = 1$, $y_0 = 0$ also nichtnegative Treppenfunktion) und als solche streng messbar.

Beweis. Als erstes nehmen wir an, dass eine eigentliche charakteristische Funktion vorliegt, also $y_1 \neq y_2$ ist. Dann gilt für alle $B \subseteq Y$: wenn $\begin{cases} y_1 \in B \ \wedge \ y_0 \notin B \\ y_1 \notin B \ \wedge \ y_0 \in B \\ y_0 \in B \ \wedge \ y_1 \in B \\ y_0 \notin B \ \wedge \ y_1 \notin B \end{cases}$ so $\chi^{-1}[B] = \begin{cases} A \in \mathfrak{A} \\ \complement A \in \mathfrak{A} \\ X \in \mathfrak{A} \\ \emptyset \in \mathfrak{A} \end{cases}$.
Somit ist χ messbar. Als zweites sei $y_1 = y_0$. Dann ist χ konstant und daher nach Satz 228 ebenfalls messbar.
Da χ außer y_1 und y_0 keine weiteren Werte annimmt, liegt eine Treppenfunktion (und damit nach Satz 257 eine streng messbare Funktion) vor, die im Fall $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$, $y_1 = 1, y_0 = 0$ trivialerweise nichtnegativ ist. ■

Nr. 260 (Satz) Eigenschaften reellwertiger Treppenfunktionen

Sei $\mathcal{X}$ $\underset{\text{topologischer Raum}}{\text{Messraum}}$ *und* $\mathfrak{A}$ $\underset{\text{die Menge der Borelmengen}}{\text{die } \sigma\text{-Algebra}}$ *von* $\mathcal{X}$.
Stehe $\mathcal{T}_m$ *für* $\mathcal{T}_m(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ *und* $\mathcal{T}_m^+$ *für* $\mathcal{T}_m(\mathcal{X}, \mathbb{R})$.

1. $\mathcal{T}_m$ *ist ein* $\mathbb{R}$*-Vektorraum,*
   mit $f, g \in \mathcal{T}_m$ *und* $\alpha \in \mathbb{R}$ *ist auch* $f + g, fg, \alpha f, \max\{f, g\}, \min\{f, g\}, |f| \in \mathcal{T}_m$,
   und mit $f, g \in \mathcal{T}_m^+$ *und* $\alpha \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ *ist auch* $f + g, fg, \alpha f \in \mathcal{T}_m^+$.
2. *Sei* $f \in \mathcal{T}_m$ *und* $f[X] = \{a_1, \ldots, a_m\}$ *mit paarweise verschiedenen* $a_1, \ldots, a_m$.
   Dann sind die Mengen $A_j := f^{-1}[\{a_j\}]$ *für* $j \in \{1, \ldots m\}$ *Elemente von* $\mathfrak{A}$
   und bilden eine Partition von X.
3. *Jedes* $f \in \mathcal{T}_m$ *hat eine Darstellung* $f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i}$, *wobei die* $\alpha_j \in \mathbb{R}$ *sind*
   und die A_j *Elemente von* $\mathfrak{A}$ *sind, die eine Partition von* X *bilden.*
   Für jedes $f \in \mathcal{T}_m^+$ *kann dabei noch* $\alpha_j \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ *gefordert werden.*
4. *Sind* $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$ *und* $B_1, \ldots, B_m \in \mathfrak{A}$, *so ist* $g := \sum_{i=1}^{m} \beta_i \chi_{B_i} \in \mathcal{T}_m$,
   und wenn die $\beta_i \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ *sind, ist* g *sogar ein Element von* $\mathcal{T}_m^+$.

Beweis. Zu (1). Trivialerweise ist $\mathrm{Abb}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, und $\mathcal{T}_m$ ist ein Untervektorraum hiervon.

Zu (2). Es gibt zu a_j mindestens ein $x \in X$ mit $f(x) = a_j$ (sonst wäre $a_j \notin f[X]$), also ist $x \in f^{-1}[\{a_j\}] = A_j$ und A_j nichtleer. Die A_i sind disjunkt, da es wegen der Verschiedenheit der a_i zu jedem $x \in X$ *genau* ein i gibt mit $f(x) = a_i$, das heißt mit $x \in A_i$. Schließlich ist die Vereinigung der A_i gleich X, denn zu jedem $x \in X$ gibt es ein i mit $f(x) = a_i$, also mit $x \in A_i$. Bleibt zu zeigen, dass jedes A_i zu $\mathfrak{A}$ gehört. Das gilt, weil f messbar ist und
$\{a_j\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} [a_j + \frac{1}{n}, a_j[= \bigcap_{i=1}^{\infty} \{a_j\} \cup]a_j + \frac{1}{n}, a_j[\in \mathfrak{B}$ ist (vgl. Sätze 192, 178 und 176).

Zu (3). Dies gilt wegen (2), wenn man als A_i die Mengen $f^{-1}[\{a_i\}]$ nimmt, wobei die a_i die endliche vielen von F angenommenen Werte sind.

Zu (4). $\mathrm{Wb}(f)$ ist endlich; für $B \in \mathfrak{A}$ ist χ_B nach Satz 259 ebenfalls messbar. Wegen Satz 250 ist dann auch f messbar. ■

Nr. 261 (Satz) Charakterisierung der Messbarkeit von $\hat{\mathbb{R}}$-Funktionen mittels $\mathbb{R}$-Treppenfunktionen

Sei f eine $\hat{\mathbb{R}}$-Funktion mit Definitionsbereich $\mathcal{X}$, sei $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{X}, \hat{\mathbb{R}})$, $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M}^+(\mathcal{X}, \hat{\mathbb{R}})$, $\mathcal{T}_m = \mathcal{T}_m(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ und $\mathcal{T}_m^+ = \mathcal{T}_m^+(\mathcal{X}, \mathbb{R})$. Dann gilt:

1. *Ist f nichtnegativ, so gilt*
   $f \in \mathcal{M}^+ \Leftrightarrow$ *es gibt eine Folge (u_n) in $\mathcal{T}_m^+$ mit $u_n \uparrow f$*
2. *Ist f messbar und hat f eine reelle untere Schranke,*
   so gibt es eine Folge (u_n) in $\mathcal{T}_m$ mit $u_n \uparrow f$
3. *Ist f messbar und beschränkt,*
   so gibt es eine gleichmäßig konvergente Folge (u_n) in $\mathcal{T}_m$ mit $u_n \uparrow f$
4. *Ist $f \in \mathcal{M}$, so gibt es eine Folge (u_n) in $\mathcal{T}_m$, die gegen f konvergiert.*

Beweis. Siehe [Els 99, Satz 4.13 und Korollar 4.14, S. 108]. ■

Nr. 262 (Satz) Charakterisierung der strengen Messbarkeit mittels maßtheoretischer Treppenfunktionen

Sei $\mathcal{X}$ Messraum oder topologischer Raum und
sei $\mathcal{Y}$ von einem Banachraum induzierter topologischer Raum und $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$.

f ist streng messbar
:$\Leftrightarrow$ Es gibt eine Folge (f_n) maßtheoretischer Treppenfunktionen f_i: $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$,
die punktweise gegen f konvergiert,
so dass für alle Indizes n und alle $x \in X$ gilt $\|f_n(x)\| \leq \|f(x)\|$.

Beweis. Siehe [Coh 80, Proposition E.2., S. 351]. ■

Als Korollar folgt aus dem letzten Satz, dass $\mathfrak{M}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ($\mathcal{X}$ Messraum und $\mathcal{Y}$ Banachraum) eine lineare Teilmenge des Vektorraums $\mathrm{Abb}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ bilden:

Nr. 263 (Satz) Linearität der strengen Messbarkeit

Sei $\mathcal{X} = (X, \mathfrak{A})$ Messraum, $\mathcal{Y}$ $\mathbb{K}$-Banachraum, und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt:

Sind $f, g : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ streng messbar, so sind auch λf und $f + g$ streng messbar.

Beweis. Siehe [Coh 80, Corollary E.3.]. ■

9.7 Das ν-Integral nichtnegativer reellwertiger Treppenfunktionen

Vereinbarung: $\mathcal{X}$, $\mathfrak{A}$, ν, $\mathcal{T}_m$, $\mathcal{T}_m^+$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^+$ in den folgenden Abschnitten

Von jetzt an bezeichne $\mathcal{X}$ einen Messraum oder einen topologischen Raum.
Im ersten Fall sei $\mathfrak{A}$ die σ-Algebra von $\mathcal{X}$ und im zweiten die Menge der Borelmengen von $\mathcal{X}$.
Weiter bezeichne ν ein Maß auf $\mathcal{X}$, so dass $(X, \mathfrak{A}, \nu)$ ein Maßraum ist.

Schließlich bezeichne $\begin{cases} \mathcal{T}_m \\ \mathcal{T}_m^+ \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{M}^+ \end{cases}$ die Menge $\begin{cases} \mathcal{T}_m(\mathcal{X}, \mathbb{R}) \\ \mathcal{T}_m^+(\mathcal{X}, \mathbb{R}) \\ \mathcal{M}(\mathcal{X}, \hat{\mathbb{R}}) \\ \mathcal{M}^+(\mathcal{X}, \hat{\mathbb{R}}) \end{cases}$.

Nr. 264 (Satz und Def) ν-Integral von Funktionen aus $\mathcal{T}_m^+$

Jedes $f \in \mathcal{T}_m^+$ hat gemäß Satz 260(3) eine Darstellung
$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ mit $\forall\ i\ \alpha_i \in \mathbb{R}^{\geq 0} \ \wedge\ A_i \in \mathfrak{A} \wedge \{A_i : i \in \{1, \ldots, n\}\}$ Partition von X.

Hat f zwei solche Darstellungen, also
$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{B_j}$ mit $\forall\ i, j\ \ \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}^{\geq 0} \ \wedge\ A_j, B_j \in \mathfrak{A}$,
wobei $\{A_i : i \in \{1, \ldots, n\}\}$ und $\{B_i : j \in \{1, \ldots, m\}\}$ Partitionen von X sind, so gilt
$\sum_{j=1}^m \alpha_j \nu(A_j) = \sum_{j=1}^m \beta_j \nu(B_j)$,

so dass wir definieren können:

$\int f\, d\nu$ (lies: ν-Integral von f) $:= \sum_{i=1}^n \alpha_i \nu(A_i)$. Es ist $\int f\, d\nu$ stets $\in [0, \infty]$.

Beweis. Zur Gleichheit der Summen bei verschiedenen Darstellungen von f siehe [Bau 89, Lemma 10.2, S. 62-63]. Da jeder Summand $\in [0, \infty]$ ist, gilt dies schließlich auch für die Summe. ■

Nr. 265 (Satz) Das ν-Integral charakteristischer $\hat{\mathbb{R}}$-Funktionen

Für $A \in \mathfrak{A}$ gilt $\int \chi_A\, d\nu = \nu(A)$. *Hinweis. Vgl. hierzu Satz 303.*

Beweis. Wegen $\chi_A = 1\chi_A + 0\chi_{\complement A}$, folgt $\int \chi_A\, d\nu = 1\nu(A) + 0\nu(\complement A) = \nu(A)$. ■

Nr. 266 (Satz) Eigenschaften des ν-Integrals nichtnegativer reellwertiger Treppenfunktionen

Für $f, g \in \mathcal{T}_m^+$ und $\lambda \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ ist trivialerweise auch $f + g$ und $\lambda f \in \mathcal{T}_m^+$ und es gilt:

1. *(nichtnegative Homogenität)* $\int \lambda f \, d\nu = \lambda \int f \, d\nu$
2. *(Additivität bezüglich Integrand)* $\int \lambda(f+g) \, d\nu = \int f \, d\nu + \int g \, d\nu$
3. *(Isotonie)* $f \leq g \;\Rightarrow\; \int f \, d\nu \leq \int g d\nu$

Beweis. Siehe [Bau 89, Aussagen (10.5) bis (10.7), S. 64-65]. ■

Nr. 267 (Satz) Allgemeine Formel für das ν-Integral nichtnegativer Treppenfunktionen

Sei $f \colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ die nichtnegative Treppenfunktion $\sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$, wobei $\forall\, i \in \{1, \dots, n\}\; A_i \in \mathfrak{A} \wedge \alpha_i \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ (aber die A_i nicht notwendigerweise eine Partition von X bilden).

$\int f \, d\nu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \nu(A_i)$

Beweis. $\int f \, \mathrm{d}\nu \underset{Satz\ 266(1)\ und\ (2)}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i \int \chi_{A_i} \underset{Satz 265}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i \nu(A_i)$. ■

Nr. 268 (Lemma) Isotonie-Lemma

Sei (u_n) isotone Folge von Funktionen $u_n \in \mathcal{T}_m^+$ und sei $v \in \mathcal{T}_m^+$.

$v \leq \lim_{n\to\infty} u_n \;\Rightarrow\; \int v \, d\nu \leq \lim_{n\to\infty} \int u_n \, d\nu$

Beweis. Siehe [Els 99, Satz 2.1, S. 121]. ■

9.8 Das ν-Integral nichtnegativer messbarer Funktionen

Nr. 269 (Satz und Def) ν-Integral von Funktionen aus $\mathcal{M}^+$

Für $f \in \mathcal{M}^+$ gibt es gemäß Satz 261(1)
eine Folge (u_n) von Treppenfunktionen aus $\mathcal{T}^+_{m,\mathbb{R}}$ mit $u_n \uparrow f$.
Dann strebt $(\int u_n \, \mathrm{d}\nu)$ gegen eine Zahl aus $[0, \infty]$,
und wenn es zwei solche Folgen (u_n) und (v_n) gibt, so ist $\lim_{n\to\infty} \int u_n \, \mathrm{d}\nu = \lim_{n\to\infty} \int v_n \, \mathrm{d}\nu$,

so dass wir definieren können:

$\int f \, \mathrm{d}\nu$ (lies. ν-Integral von f) $:= \lim_{n\to\infty} \int v_n \, \mathrm{d}\nu \in [0, \infty]$. Es ist $\int f \, \mathrm{d}\nu$ stets $\in [0, \infty]$.

Bem. Da die nichtnegativen numerischen Treppenfunktionen f messbar sind, haben wir für diese nun zwei Definitionen ihres ν-Integrals, aber die neue Definition weist ihnen als ν-Integral wieder ihr bereits zuvor definiertes Integral zu: denn für die konstante Folge $(f)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $f_n \uparrow f$.

Beweis. Zur Gleichheit der Grenzwerte siehe [Els 99, Korollar 2.2, S. 122]. Der Grenzwert ist nichtnegativ, weil jedes Glied $\int u_n \, \mathrm{d}\nu$ der Folge nach Satz 264 nichtnegativ ist. ■

Nr. 270 (Satz) Eigenschaften des ν-Integrals nichtnegativer numerischer Funktionen

Für $f, g \in \mathcal{M}^+$ und $\lambda \in \hat{\mathbb{R}}^{\geq 0}$ ist $g + g$ sowie λf Element von $\mathcal{M}^+$, und es gilt:

1. *(nichtnegative Homogenität)* $\int \lambda f \, d\nu = \lambda \int f \, d\nu$
2. *(Additivität bezüglich Integrand)* $\int (f + g) \, d\nu = \int f \, d\nu + \int g \, d\nu$
3. *(Isotonie)* $f \leq g \;\Rightarrow\; \int f \, d\nu \leq \int g d\nu$

Beweis. Siehe [Els 99, Folgerungen 2.4, S. 122-123]. ■

Nr. 271 (Satz) Integral konstanter nichtnegativer Funktionen

Sei $f : \mathcal{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine konstant auf $a\overline{\mathbb{R}}^{\geq 0}$ abbildende Funktion.
Dann ist $f \in \mathcal{M}^+$ und $\int f \, d\nu = a\nu(X)$.

Ist insbesondere f die Funktion mit konstantem Wert 0, so gilt $\int f \, d\nu = 0$.

Beweis. Wegen $f = a\chi_X$ folgt mit Sätzen 265 und 270, dass $\int f \, \mathrm{d}\nu = a \int \chi_X \, \mathrm{d}\nu = a\nu(X)$. ■

Nr. 272 (Satz) Charakterisierung von ν-Nullmengen mit ν-Integralen nichtnegativer numerischer Funktionen

Für $f \in \mathcal{M}^+$ gilt: $\{f > 0\}$ ist ν-Nullmenge $\Leftrightarrow$ $\int f \, d\nu = 0$

Beweis. Siehe [Els 99, Satz 2.6, S. 123]. ∎

Nr. 273 (Satz) Satz von der monotonen Konvergenz

Sei (f_n) isotone Folge von Funktionen $f_n \in \mathcal{M}^+$.

$\lim_{n\to\infty} f_n$ *ist Funktion von* $\mathcal{X}$ *in* $\overline{\mathbb{R}}$ *mit* $\int (\lim_{n\to\infty} f_n) \, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\nu$.

Beweis. Siehe [Els 99, Satz 2.7, S. 124]. ∎

Nr. 274 (Satz) Vertauschung von Integral und Summenzeichen für ν-Integrale nichtnegativer numerischer Funktionen

Sei (f_n) Folge von Funktionen $f_n \in \mathcal{M}^+$. Dann gilt: $\int (\sum_{n=0}^{\infty} f_n) \, d\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n \, d\nu$

Beweis. Siehe [Els 99, Korollar 2.8., S. 124]. ∎

Nr. 275 (Satz) Lemma von Fatou

Sei (f_n) eine Folge von Funktionen aus $\mathcal{M}^+$.
Dann ist $\liminf_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{M}^+$ *und* $\int (\liminf_{n\to\infty} f_n) \, d\nu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\nu$.

Beweis. Siehe [Els 99, Lemma 5.1, S. 143]. ∎

9.9 ν-Integrierbarkeit und das ν-Integral ν-integrierbarer $\hat{\mathbb{K}}$-Funktionen

Nr. 276 (Def) ν-Integrierbarkeit von $\mathbb{K}$-Funktionen

Eine Funktion $f\colon \mathcal{X} \longrightarrow \hat{\mathbb{K}}$ ist *ν-integrierbar*
$:\Leftrightarrow$ f ist messbar und die ν-Integrale der vier Funktionen $(\operatorname{Re} f)^{\pm}, (\operatorname{Im} f)^{\pm}$ sind alle $< \infty$

Bem. Ist f messbar, so ist die vier genannten Funktionen nach Satz 248 Elemente von $\mathcal{M}$, wegen der Nichtnegativität also $\in \mathcal{M}^+$, so dass die Integrale nach Satz 269 Elemente von $[0, \infty]$ sind. Die Forderung, dass sie $< \infty$ sind, ist also äquivalent zu der Forderung, dass sie zu $\mathbb{R}^{\geq 0}$ gehören.

$\mathcal{I}(\nu, \mathcal{X}, \hat{\mathbb{K}}) \ := \ \{f \ : \ f\colon \mathcal{X} \longrightarrow (\hat{\mathbb{K}}, \hat{\mathfrak{O}}) \text{ ist } \nu\text{-integrierbar}\}$, wkM sei das $\mathcal{I}(\nu)$ oder $\mathcal{I}$.

Nr. 277 (Satz) Kriterium für ν-Integrierbarkeit von Funktionen aus $\mathcal{M}^+$

Sei $f \in \mathcal{M}^+$.

1. $(\operatorname{Re} f)^+ = f$ *und* $(\operatorname{Re} f)^- = (\operatorname{Im} f)^+ = (\operatorname{Im} f)^-$ *hat den konstanten Wert* 0
2. $\int (\operatorname{Re} f)^- \, d\nu = \int (\operatorname{Im} f)^+ \, d\nu = \int (\operatorname{Im} f)^- \, d\nu = 0 < \infty$
3. f *ist ν-integrierbar* $\Leftrightarrow$ $\int f \, d\nu < \infty$.

Beweis. (1) ist trivial. (2) folgt aus (1) unter Beachtung von Satz 271.
Zu (3). $\Rightarrow$ folgt wegen $f = (\operatorname{Re} f)^+$ aus Def 276. $\Leftarrow$ folgt wegen (2) und $f = (\operatorname{Re} f)^+$. ■

Nr. 278 (Def) ν-Integral ν-integrierbarer $\hat{\mathbb{K}}$-Funktionen

Sei $f \in \mathcal{I}_\nu(\mathcal{X}, \hat{\mathbb{K}})$.

$\int f \, \mathrm{d}\nu$ (lies: ν-Integral von f)
$:= \ \int (\operatorname{Re} f)^+ \, \mathrm{d}\nu - \int (\operatorname{Re} f)^- \, \mathrm{d}\nu + i(\int (\operatorname{Im} f)^+ \, \mathrm{d}\nu - \int (\operatorname{Im} f)^- \, \mathrm{d}\nu) \in \mathbb{K}$

Bem. Auf der rechten Seiten dieser Definition stehen die schon zuvor definierten ν-Integrale nichtnegativer messbarer Funktionen.

Für die ν-integrierbaren Funktionen f aus $\mathcal{M}^+$ (das sind nach Satz 277(3) genau die Elemente von $\mathcal{M}^+$, deren schon zuvor definiertes ν-Integral $< \infty$ ist), haben wir nun zwei Definitionen ihres ν-Integrals, aber die neue Definition weist wegen Satz 277(2) diesen Funktionen als ν-Integral wieder ihr bereits zuvor definiertes Integral zu.

Nr. 279 (Satz) ν-Integrierbarkeit und ν-Integral konstanter $\mathbb{K}$-Funktionen im Fall $\nu(X) < \infty$

Ist $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{K}$ konstant auf $a \in \mathbb{K}$ abbildende Funktion mit $\nu(X) < \infty$, so ist f ν-integrierbar und $\int f \, d\nu = a\nu(X)$. Bem. Dieser Satz wird durch Satz 304 verallgemeinert.

Beweis. f ist messbar (Satz 228), und die Funktionen $(\operatorname{Re} f)^{\pm}$ sowie $(\operatorname{Im} f)^{\pm}$ sind konstante Funktionen aus $\mathcal{M}^{+}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, wobei gilt:

$$\begin{aligned}
0 \leq \operatorname{Re} a &\Rightarrow \forall\, x \in X \ (\operatorname{Re} f)^{+}(x) = \operatorname{Re} a \text{ und } (\operatorname{Re} f)^{-} = 0,\\
\operatorname{Re} a \leq 0 &\Rightarrow \forall\, x \in X \ (\operatorname{Re} f)^{+}(x) = 0 \quad \text{ und } (\operatorname{Re} f)^{-}(x) = -\operatorname{Re} a,\\
0 \leq \operatorname{Im} a &\Rightarrow \forall\, x \in X \ (\operatorname{Im} f)^{+}(x) = \operatorname{Im} a \text{ und } (\operatorname{Im} f)^{-} = 0,\\
\operatorname{Im} a \leq 0 &\Rightarrow \forall\, x \in X \ (\operatorname{Im} f)^{+}(x) = 0 \quad \text{ und } (\operatorname{Im} f)^{-}(x) = -\operatorname{Im} a.
\end{aligned}$$

Wegen der Formel in Satz 271 und weil $\nu(X) < \infty$ ist, sind die ν-Integrale der genannten Funktionen $< \infty$. Also ist f ν-integrierbar, und es folgt mit Satz 271 gemäß Def 278:

$$\begin{aligned}
0 \leq \operatorname{Re} a \ \wedge \ 0 \leq \operatorname{Im} a &\Rightarrow \int f \, \mathrm{d}\nu = \nu(X) \operatorname{Re} a - 0 + i(\nu(X) \operatorname{Im} a - 0) &&= a\nu(X),\\
\operatorname{Re} a \leq 0 \ \wedge \ 0 \leq \operatorname{Im} a &\Rightarrow \int f \, \mathrm{d}\nu = 0 - -\nu(X) \operatorname{Re} a + i(\nu(X) \operatorname{Im} a - 0) &&= a\nu(X),\\
0 \leq \operatorname{Re} a \ \wedge \ \operatorname{Im} a \leq 0 &\Rightarrow \int f \, \mathrm{d}\nu = \nu(X) \operatorname{Re} a - 0 + i(0 - -\nu(X) \operatorname{Im} a) &&= a\nu(X),\\
\operatorname{Re} a \leq 0 \ \wedge \ \operatorname{Im} a \leq 0 &\Rightarrow \int f \, \mathrm{d}\nu = 0 - -\nu(X) \operatorname{Re} a + i(0 - -\nu(X) \operatorname{Im} a) &&= a\nu(X). \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Nr. 280 (Satz) ν-Integrierbarkeit und Positiv– sowie Negativteil

Sei $f \colon \mathcal{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *f ist ν-integrierbar*
2. *f ist messbar und $\int f^{+}, \int f^{-}$ sind $< \infty$*
3. *f^{+} und f^{-} sind ν-integrierbar*

und Fall der ν-Integrierbarkeit gilt: $\int f \, d\nu = \int f^{+} \, d\nu - \int f^{-} \, d\nu \in \mathbb{R}$.

Beweis. (1) ist äquivalent zu (2). Dies folgt aus Def 276, da $\operatorname{Re} f = f$ und $(\operatorname{Im} f)^{\pm}$ konstant auf 0 abbildet, so dass $\int \operatorname{Im} f)^{\pm} \, \mathrm{d}\nu = 0 < \infty$.

(2) ist äquivalent zu (3). Denn f^{+} und f^{-} sind $\hat{\mathbb{R}}$-Funktionen, wobei $(f^{+})^{+} = f^{+}$, $(f^{-})^{+} = f^{-}$ und $(f^{+})^{-}$ sowie $(f^{-})^{-}$ konstant auf 0 abbilden, also $\int (f^{+})^{-} \, \mathrm{d}\nu = \int (f^{-})^{-} \, \mathrm{d}\nu = 0 < \infty$. Somit ist wegen der Äquivalenz von (1) und (2) die Funktion f^{+} bzw. f^{-} genau dann ν-integrierbar, sie messbar ist und $\inf f^{+} \, \mathrm{d}\nu < \infty$ bzw. $\int f^{-} \, \mathrm{d}\nu < \infty$ gilt. Da die Messbarkeit von f^{+} und f^{-} zugleich nach Satz 252 äquivalent zur Messbarkeit von f ist, sind daher f^{+} und f^{-} genau dann zugleich ν-integrierbar, wenn f messbar und $\int f^{+} \, \mathrm{d}\nu$ sowie $\int f^{-} \, \mathrm{d}\nu$ kleiner ∞ ist.

Im Fall der ν-Integrierbarkeit folgt nun die Formel $\int f \, \mathrm{d}\nu = \int f^{+} \, \mathrm{d}\nu - \int f^{-} \, \mathrm{d}\nu$ aus Def 278 wegen $\operatorname{Re} f = f$ und $\int \operatorname{Im} f)^{\pm} \, \mathrm{d}\nu = 0$. Wegen Satz 269 sind $\int f^{-} \, \mathrm{d}\nu$ und $\int f^{+} \, \mathrm{d}\nu$ Elemente von $[0, \infty]$, wegen Satz 280(2) also Elemente von $\mathbb{R}^{\geq 0}$. Da mit ist $\int f \, \mathrm{d}\nu \in \mathbb{R}$. $\blacksquare$

Nr. 281 (Satz) ν-Integrierbarkeit und Real- sowie Imaginärteil

Eine Funktion $f\colon \mathcal{X} \longrightarrow \hat{\mathbb{K}}$ ist ν-integrierbar $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ sind ν-integrierbar und im Fall der ν-Integrierbarkeit gilt: $\int f\,d\nu = \int \operatorname{Re} f\,d\nu + i(\int \operatorname{Im} f\,d\nu)$.

Außerdem ist $\operatorname{Re}(\int f\,d\nu) = \int \operatorname{Re} f\,d\nu$ und $\operatorname{Im}(\int f\,d\nu) = \int \operatorname{Im} f\,d\nu$.

Beweis. Zunächst zur behaupteten Äquivalenz:

f ist ν-integrierbar
$\underset{Def\ 276}{\Leftrightarrow}$ f ist messbar und $(\operatorname{Re} f)^{\pm}, (\operatorname{Im} f)^{\pm} < \infty$
$\underset{Satz\ 248}{\Leftrightarrow}$ $\operatorname{Re} f$ ist messbar und $(\operatorname{Re} f)^{\pm} < \infty$ und $\operatorname{Im} f$ ist messbar und $(\operatorname{Im} f)^{\pm} < \infty$
$\underset{Satz\ 280}{\Leftrightarrow}$ $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ sind ν-integrierbar.

Sind nun die genannten Funktionen ν-integrierbar, folgt aus den Formeln in Def 278 und Satz 280, dass $\int f\,\mathrm{d}\nu = \int \operatorname{Re} f\,\mathrm{d}\nu + i(\int \operatorname{Im} f\,\mathrm{d}\nu)$. Da $\int \operatorname{Re} f\,\mathrm{d}\nu$ und $\int \operatorname{Im} f\,\mathrm{d}\nu$ nach Satz 280 reelle Zahlen sind, folgt aus der Darstellung $\int f\,\mathrm{d}\nu = \int \operatorname{Re} f\,\mathrm{d}\nu + i(\int \operatorname{Im} f\,\mathrm{d}\nu)$ schließlich, dass $\operatorname{Re}(\int f\,\mathrm{d}\nu) = \int \operatorname{Re} f\,\mathrm{d}\nu$ und $\operatorname{Im}(\int f\,\mathrm{d}\nu) = \int \operatorname{Im} f\,\mathrm{d}\nu$. ■

Nr. 282 (Satz und Def) ν-Quasiintegrierbarkeit von $\hat{\mathbb{R}}$-Funktionen

Eine Funktion $f\colon \mathcal{X} \longrightarrow \hat{\mathbb{R}}$ ist ν-quasiintegrierbar
$:\Leftrightarrow$
f ist messbar und mindestens eines der beiden Integrale $\int f^{\pm}$ ist kleiner als ∞.

Jedes $f \in \mathcal{M}^+$ ist ν-quasiintegrierbar.
Ebenso ist jede ν-integrierbare $\hat{\mathbb{R}}$-Funktion erst recht ν-quasiintegrierbar.

Beweis. Die erste Behauptung folgt, da f^- konstant auf 0 abbildet, also $\int f^-\,\mathrm{d}\nu = 0 < \infty$ gilt (Satz 271). Die zweite Behauptung ist trivial. ■

Nr. 283 (Def) ν-Integral ν-quasiintegrierbarer $\hat{\mathbb{R}}$-Funktionen

Sei $f\colon \mathcal{X} \longrightarrow \hat{\mathbb{R}}$ ν-quasiintegrierbar.

$\int f\,\mathrm{d}\nu$ (lies: ν-Integral von f) $:=$ $\int f^+\,\mathrm{d}\nu - \int f^-\,\mathrm{d}\nu$

Bem. Allen Funktionen aus $\mathcal{M}^+$ und allen ν-integrierbaren $\hat{\mathbb{R}}$-Funktionen, die nach Satz 282 quasiintegrierbar sind, weist diese Definition erneut ein ν-Integral zu, aber dieses stimmt mit dem zuvor definierten überein (für $f \in \mathcal{M}^+$ beachte $f^+ = f$ und dass f^- konstant auf 0 abbildet, so dass $\int f^-\,\mathrm{d}\nu = 0$ ist; für ν-integrierbares f beachte Satz 280).

Nr. 284 (Satz) ν-Quasiintegrierbarkeit und ν-Integral konstanter $\hat{\mathbb{R}}$-Funktionen

Jede konstant auf $a \in \hat{\mathbb{R}}$ abbildende Funktion $f : \mathcal{X} \longrightarrow \hat{\mathbb{R}}$ ist ν-quasiintegrierbar mit $\int f \,\mathrm{d}\nu = a\nu(X)$.

Beweis. f ist messbar (Satz 228), und es ist eine der Funktionen $f^{\pm}$ die konstant auf 0 abbildende Funktion N von $\mathcal{X}$ in $\hat{\mathbb{R}}$, für welche $\int N \,\mathrm{d}\nu \underset{Satz\ 271}{=} 0\nu(X) = 0\infty$ gilt. Daher ist f ν-quasiintegrierbar. Ist $a \geq 0$, so ist $f \in \mathcal{M}^+$, also folgt bereits aus Satz 271, dass $\int f \,\mathrm{d}\nu = a\nu(X)$. Ist $a \leq 0$, so ist $f^+ = N$, während $f^- \in \mathcal{M}^+$ ist und konstant auf das positive $-a$ abbildet. Daher folgt $\int f \,\mathrm{d}\nu \underset{Def}{=} \int f^+ \,\mathrm{d}\nu - \int f^- \,\mathrm{d}\nu = 0 - \int -a \,\mathrm{d}\nu \underset{Satz\ 271}{=} 0 - -a\nu(X) = a\nu(X)$. ∎

Nr. 285 (Satz) Äquivalenzsatz für Integrierbarkeit von $\hat{\mathbb{K}}$-Funktionen

Für f: $\mathcal{X} \longrightarrow \hat{\mathbb{K}}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *f ist ν-integrierbar*
2. *$\mathrm{Re}\, f$ und $\mathrm{Im}\, f$ sind ν-integrierbar*
3. *$(\mathrm{Re}\, f)^{\pm}$ und $(\mathrm{Im}\, f)^{\pm}$ sind ν-integrierbar*
4. *Es gibt ν-integrierbare Funktionen $p, q, r, s \in \mathcal{M}^+$ mit $f = p - q + i(r - s)$*
5. *f ist messbar und es gibt ν-integrierbares $g \in \mathcal{M}^+$ mit $|f| \leq g$*
6. *f ist messbar und $|f|$ ν-integrierbar*

Beweis. Siehe [Els 99, Satz 3.3, S. 129]. ∎

Nr. 286 (Satz) Bewahrung der ν-Integrierbarkeit beim Übergang zu min **und** max

Sind f, g: $\mathcal{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ν-integrierbar, so auch $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ ν-integrierbar.

Beweis. Siehe [Els 99, Korollar 3.5, S. 129]. ∎

Nr. 287 (Satz) Linearität des ν-Integrals von $\hat{\mathbb{K}}$-Funktionen

Für ν-integrierbare Funktionen f, g: $\mathcal{X} \longrightarrow \hat{\mathbb{K}}$ ν-integrierbar und $\alpha \in \mathbb{K}$ sind auch $f + g$ und αf ν-integrierbar mit $\int (f + g) \,\mathrm{d}\nu = \int f \,\mathrm{d}\nu + \int g \,\mathrm{d}\nu$ und $\int \alpha f \,\mathrm{d}\nu = \alpha \int f \,\mathrm{d}\nu$.

Beweis. Siehe [Els 99, Satz 3.6, S. 129-130]. ∎

Nr. 288 (Satz) Hinreichendes Kriterium für Integrierbarkeit von $\hat{\mathbb{K}}$-Funktionen

Sei $f\colon X \longrightarrow \mathbb{K}$. Ist f messbar, beschränkt und $\nu(\{f \neq 0\}) < \infty$, so ist f ν-integrierbar.

Beweis. Siehe [Els 99, Satz 3.11, S. 131-132]. ∎

Nr. 289 (Satz) ν-Integrierbarkeit und ν-Integral der konstant auf 0 abbildenden $\hat{\mathbb{K}}$-Funktion

Die Nullfunktion $f\colon \mathcal{X} \longrightarrow \hat{\mathbb{K}}$ mit $\forall\, x \in X\ f(x) = 0$ ist ν-integrierbar mit $\int f\, d\nu = 0$.

Hinweis. Vgl. hierzu Satz 279, mit dem der hier vorliegende Satz noch nicht bewiesen ist, da hier $\nu(X) = \infty$ zugelassen ist.

Beweis. Nach Satz 228 ist f messbar, trivialerweise ist f beschränkt und es gilt $\nu(\{f \neq 0\}) = \nu(\emptyset) = 0 < \infty$. Daher folgt aus SatzHinreichendes Kriterium fuer Integrierbarkeit von hat mK-Funktionen, dass f ν-integrierbar ist.
Da nun $f = 0f$, folgt aus Satz 287, dass $\int f\,\mathrm{d}\mu = \int 0f\,\mathrm{d}\nu = 0 \int f\,\mathrm{d}\nu = 0$. ∎

Nr. 290 (Satz) Monotonie für ν-Integrale von $\hat{\mathbb{R}}$-Funktionen

Sind $f, g\colon \mathcal{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ν-quasiintegrierbar und $f \leq g$, so ist $\int f\, d\nu \leq \int g\, d\nu$

Beweis. Siehe [Els 99, Satz 3.7, S. 131]. ∎

Nr. 291 (Satz) Integralungleichungen für ν-Integrale von $\hat{\mathbb{K}}$-Funktionen

Ist $f\colon \mathcal{X} \longrightarrow \hat{\mathbb{K}}$ ν-integrierbar, so ist $\int f\, d\nu \leq \int |f|\, d\nu$

Beweis. Siehe [Els 99, Satz 3.8, S. 131]. ∎

Nr. 292 (Def) ν-fast überall bestehende Eigenschaften

Sei $E(x)$ eine für $x \in X$ definierte Eigenschaft und ν Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ über X.

$E(x)$ besteht bezüglich des Maßes ν über X *fast überall* (wkM ν_X-f.ü. oder ν-f.ü. oder f.ü.) $:\Leftrightarrow$ es gibt eine ν-Nullmenge N, so dass $\forall\, x \in \complement N\ E(x)$ gilt.

Nr. 293 (Satz) ν-integrierbare $\hat{\mathbb{K}}$-Funktionen sind ν-f.ü. endlich

1. *Für integrierbare $\hat{\mathbb{K}}$-Funktionen f gilt $|f(x)| < \infty$ ν-f.ü.*
2. *Für integrierbare $\hat{\mathbb{R}}$-Funktionen ist $-\infty < f(x) < \infty$ ν-f.ü.*

Beweis. Zu (1) siehe [Els 99, Korollar 3.4, S. 129].

Zu (2). Für $\hat{\mathbb{R}}$-Funktionen sind (1) und (2) äquivalent. ■

Nr. 294 (Satz) Integralkriterium für Funktionen, die f.ü. Null sind

Sei $f \in \mathcal{M}^+$. $\int f \, d\nu = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ ν-f.ü.

Beweis. Nach Satz 272 ist $\int f \, d\nu$ genau dann $= 0$, wenn die messbare Menge $N := \{f > 0\}$ eine ν-Nullmenge ist. Da $f(x)$ stets nichtnegativ ist, gilt für alle $x \in \complement N$, dass $f(x) = 0$. Ist also N eine ν-Nullmenge, so ist $f(x) = 0$ ν-f.ü. Ist umgekehrt $f(x) = 0$ ν-f.ü. vorausgesetzt, so gibt es eine ν-Nullmenge M, so dass $f(x) = 0$ für alle $x \in \complement M$. Es ist dann $N \subseteq M$, so das wegen Satz 202 auch N eine ν-Nullmenge ist. ■

Nr. 295 (Satz) Übertragung von fast überall bestehenden Relationen zwischen quasiintegrierbaren Funktionen auf ihre ν-Integrale

Seien f, g ν-quasiintegrierbare Funktionen mit Definitionsbereich $\mathcal{X}$.

1. $f(x) \le g(x)$ *ν_X-fast überall* $\Rightarrow \int f \, d\nu \le \int g \, d\nu$
2. $f(x) = g(x)$ *ν_X-fast überall* $\Rightarrow \int f \, d\nu = \int g \, d\nu$

Beweis. Siehe [Els 99, Satz 4.2a, S. 139-140]. ■

Nr. 296 (Satz) Integrierbarkeitskriterium der Majorisierung fast überall

Sei $f \in \mathcal{M}(\mathcal{X}, \hat{\mathbb{K}})$, und es gebe eine „integrierbare Majorante“ von f,
d. h. eine integrierbare Funktion $g \in \mathcal{M}^+$ mit $|f(x)| \le g(x)$ ν-f.ü.

Dann ist auch f integrierbar.

Beweis. Wegen $(\operatorname{Re} f)^{\pm}(x) \le |f(x)| \le g(x)$ ν-f.ü. und $(\operatorname{Im} f)^{\pm}(x) \le |f(x)| \le g(x)$ ν-f.ü. folgt mit Satz 295, dass $\int (\operatorname{Re} f)^{\pm} \, d\nu \le \int |g| \, d\nu < \infty$ und $\int (\operatorname{Im} f)^{\pm} \, d\nu \le \int |g| < \infty$. ■

Nr. 297 (Satz) Übertragung von fast überall bestehenden Relationen zwischen messbaren Funktionen auf ihre ν-Integrale

1. *Sind $f, g\colon \mathcal{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar, f ν-integrierbar und $f(x) \leq g(x)$ ν f.ü., so ist g ebenso wie f ν-quasiintegrierbar und $\int f\, d\nu \leq \int g\, d\nu$*
2. *Sind $f, g\colon \mathcal{X} \longrightarrow \hat{\mathbb{K}}$ messbar, f ν-integrierbar und $f(x) = g(x)$ ν f.ü., so ist g ν-integrierbar und $\int f\, d\nu = \int g\, d\nu$*

Beweis. Siehe [Els 99, Satz 4.2b-c, S. 139-140]. ■

Nr. 298 (Satz) Bewahrung von Integrierbarkeit und Integral bei Abänderung des Integranden auf Nullmengen

Sei f eine ν-integrierbare Funktion $f\colon \mathcal{X} \longrightarrow \hat{\mathbb{K}}$.
Sei $N \subseteq X$ eine ν-Nullmenge (so dass N und $\complement N$ messbar sind).

Sei $\mathcal{N}$ im Fall, dass $\mathcal{X}$ $\begin{smallmatrix}\text{der Messraum } (X, \mathfrak{A}) \text{ ist}\\ \text{ein topologischer Raum } (X, \mathfrak{O}_{\mathcal{X}}) \text{ ist}\end{smallmatrix}$ ist,

der $\begin{smallmatrix}\text{Untermessraum } (N, \mathfrak{A} \Cap N)\\ \text{topologische Unterraum } (N, \mathfrak{O}_{\mathcal{X}} \Cap N)\end{smallmatrix}$ mit Träger N und sei $n\colon \mathcal{N} \longrightarrow \hat{\mathbb{K}}$ messbar.

Dann ist $\mathfrak{A} \Cap N$ die linke σ-Algebra von n (für die obere Lesart trivialerweise, für die untere wegen Satz 196) und wir behaupten:
Die Funktion $g := ((f|\complement N) \cup n)\colon \mathcal{X} \longrightarrow \hat{\mathbb{K}}$ mit für alle $x \in X$: $g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in \complement N \\ n(x) & \text{für } x \in N \end{cases}$
ist integrierbar mit $\int g\, d\nu = \int f\, d\nu$

Beweis. Dies folgt aus Satz 297(2) (g ist nach Satz 232 messbar, und $f(x) = g(x)$ f.ü.). ■

Nr. 299 (Satz) Satz von der majorisierten Konvergenz für $\hat{\mathbb{K}}$-Funktionen

Sei $f \in \mathcal{M}(\mathcal{X}, \hat{\mathbb{K}})$ und (f_n) eine Folge von Funktionen aus $\mathcal{M}(\mathcal{X}, \hat{\mathbb{K}})$.
Sei $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ f.ü. und $g \in \mathcal{M}^+(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{R}})$ integrierbar mit für alle Indizes n: $|f_n(x)| \leq g(x)$ f.ü.

Dann sind f und alle f_n ν-integrierbar (also messbar, so dass $|f_n - f|$ nach Satz 250 aus $\mathcal{M}(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{R}})$, also neben $\int f_n\, d\nu$ und $\int f\, d\nu$ auch $\int |f_n - f|\, d\nu$ wohldefiniert ist) und es gilt

$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\nu = \int f\, d\nu$ *sowie* $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|\, d\nu = 0$.

Beweis. Siehe [Els 99, Satz 5.2, S. 144]. ■

9.10 ν-Integrierbarkeit und das ν-Integral ν-integrierbarer Banachraum-Funktionen

Vereinbarung: $\mathcal{Y}$ in den folgenden Abschnitten

Ab jetzt sei $\mathcal{Y}$ ein $\mathbb{K}$-Banachraum (bzw. ein von einem solchen induzierter topologischer Raum).

Zum Gegenstand dieses Abschnitts

In den letzten Abschnitten wurde das ν-Integral zunächst für Funktionen aus $\mathcal{T}_m^+$ (reellwertige nichtnegative Treppenfunktionen) definiert, dann wurde der Begriff des ν-Integrals zunächst auf Funktionen aus $\mathcal{M}^+$ (numerische nichtnegative messbare Funktionen) ausgeweitet, und schließlich auf Funktionen aus $\mathcal{I}(\nu, \mathcal{X}, \hat{\mathbb{K}})$ (ν-integrierbare Funktionen von $\mathcal{X}$ in $\hat{\mathbb{K}}$, also spezielle Funktionen aus $\mathcal{M}(\mathcal{X}, \hat{\mathbb{K}})$).

Hierauf aufbauend, werden nun in einem vierten und letzten Schritt auch spezielle streng messbare Banachraum-Abbildungen von $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$, also Elemente von $\mathfrak{M}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, ν-integrierbar genannt und erhalten ein ν-Integral.

Das Integral banachraumwertiger Funktionen heißt in der Literatur auch *Bochner-Integral*. Es wird in den meisten einführenden Büchern zur Integrations- und Maßtheorie nicht behandelt. Neben dem grundlegenden Artikel von Bochner selbst [Boc 33] wird es unter anderem in [Mik 78], [Cra 82, S. 199-207], [Coh 80, Appendix, S. 350-357] sowie [Lang 93, Kap. VI, S. 111-180] (hier unter der Bezeichnung „allgemeines Integral") eingeführt, wobei wesentlich verschiedenartige Wege beschritten werden. Ich folge hier dem Aufbau in [Coh 80].

Nr. 300 (Satz und Def) ν-Integrierbarkeit von Banachraum-Funktionen; die Menge $\mathcal{I}(\nu, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$

$f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ ist ν-integrierbar $:\Leftrightarrow$ f ist streng messbar und $\|f\|$ ist ν-integrierbar

Auf der rechten Seite ist mit der ν-Integrierbarkeit von $\|f\|$ die bereits erklärte ν-Integrierbarkeit von $\hat{\mathbb{K}}$-Funktionen (Def 276) gemeint, wobei hier $\hat{\mathbb{K}} = \mathbb{R}$ zu setzen ist.

Außerdem beweisen wir im Anschluss an diesen Satz, dass die Norm $\| \bullet \|$ durch eine beliebige äquivalente Norm $||| \bullet |||$ des Banachraums $\mathcal{Y}$ ersetzt werden darf.

Im Spezialfall $\mathcal{Y} = \mathbb{K}$ haben wir nun zwei Definitionen von ν-Integrierbarkeit, aber die alte stimmt wegen Satz 227 und der Äquivalenz (1) $\Leftrightarrow$ (6) in Satz 285 und mit der neuen überein.

$\mathcal{I}(\nu, \mathcal{X}, \mathcal{Y}) \;:=\; \{f \;:\; f\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ ist ν-integrierbare Funktion$\}$, wkM sei das $\mathcal{I}(\nu)$ oder $\mathcal{I}$.

Beweis der Gleichwertigkeit der Definition mit $||| \bullet |||$ statt $\| \bullet \|$. Zu zeigen ist, dass unter Voraussetzung der strengen Messbarkeit von f gilt:

$\|f\|$ ist ν-integrierbar $\Leftrightarrow$ $|||f|||$ ist ν-integrierbar

Da f streng messbar, also nach Def 226 erst recht messbar ist, ist nach Satz 249 auch $\|f\|$ sowie $|||f|||$ messbar, und als nichtnegative Funktionen sind $\|f\|$ und $|||f|||$ Elemente von $\mathcal{M}^+(\mathcal{X}, \mathbb{R})$. Nach dem Kriterium Satz 277 ist also $\|f\|$ genau dann ν-integrierbar, wenn $\int \|f\| \, \mathrm{d}\nu < \infty$, und ebenso ist $|||f|||$ genau dann ν-integrierbar, wenn $\int |||f||| \, \mathrm{d}\nu < \infty$. Zu zeigen ist somit

$\int \|f\| \, \mathrm{d}\nu < \infty \;\Leftrightarrow\; \int |||f||| \, \mathrm{d}\nu < \infty$.

Wegen der Äquivalenz der Normen gibt es ein $\delta > 0$ mit $\|f\| \leq \delta \, |||f|||$, also folgt nach Satz 270(1) und 270(3), dass $\int \|f\| \, \mathrm{d}\nu \leq \delta \int |||f||| \mathrm{d}\nu$, weshalb $\int \|f\| \, \mathrm{d}\nu < \infty$ ist, wenn $\int |||f||| \mathrm{d}\nu < \infty$ ist. Also gilt $\Leftarrow$. Genauso folgt $\Rightarrow$. ■

Nr. 301 (Satz) ν-Integrierbarkeit allgemein

Sei $f \colon \mathcal{X} \longrightarrow \hat{\mathbb{K}}$ oder $\longrightarrow \mathcal{Y}$. Dann ist äquivalent:

1. *f ist ν-integrierbar*
2. *f ist streng messbar und $\|f\|$ ist ν-integrierbar*
3. *f ist streng messbar und $\int \|f\| \, \mathrm{d}\nu < \infty$.*
4. *f ist streng messbar und es gibt ein ν-integrierbares g mit $\|f\| \leq g$*

Beweis.
(1) $\Leftrightarrow$ (2). Falls die Werte von f im Banachraum $\mathcal{Y}$ liegen, gilt diese Äquivalenz per Def 300, andernfalls gilt sie wegen Satz 227 und der Äquivalenz (1) $\Leftrightarrow$ (6) in Satz 285.

(2) $\Rightarrow$ (3). Da $\|f\|$ ν-integrierbar ist, ist $\|f\|$ nach Def 276 messbar. Wegen der Nichtnegativität von $\|f\|$ ist also $\|f\| \in \mathcal{M}^+$. Aus der Integrierbarkeit von $\|f\|$ folgt daher mit Satz 277, dass $\int f \, \mathrm{d}\nu < \infty$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Aus der strengen Messbarkeit von f folgt die Messbarkeit von f und somit nach Satz 249 auch die von $\|f\|$, also ist $\|f\| \in \mathcal{M}^+$. Nach dem Kriterium Satz 277 folgt also aus $\int \|f\| \, \mathrm{d}\nu < \infty$, dass f ν-integrierbar ist. Daher können wir als g die Funktion $\|f\|$ nehmen.

(4) $\Rightarrow$ (2). Wegen der strengen Messbarkeit von f folgt die Messbarkeit von f und somit nach Satz 249 auch die von $\|f\|$, also ist $\|f\|$ ebenso wie g Element von $\mathcal{M}^+$. Wegen der ν-Integrierbarkeit von g und Satz 270(3) folgt nun $\int \|f\| \, \mathrm{d}\nu \leq \int g \, \mathrm{d}\nu < \infty$. Nach Satz 277 ist daher $\|f\|$ ν-integrierbar. ■

Nr. 302 (Satz und Def) ν-Integral ν-integrierbarer einfacher Banachraum-Funktionen

Sei $f\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ eine einfache ν-integrierbare Funktion,
deren paarweise verschiedenen Werte $a_1, \ldots, a_n \in Y$ sind.
Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei $A_i = f^{-1}[\{a_i\}]$.

Dann gilt für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, dass A_i zur linken σ-Algebra von f gehört
und dass im Fall $a_i \neq 0$ gilt $\nu(A_i) < \infty$. Wir können daher definieren:

$\int f \,\mathrm{d}\nu$ (lies: ν-Integral von f) $:= \sum_{i=1}^{n} a_i \nu(A_i)$ $(\in Y)$.

Bem 1. Offenbar können wir in obiger Definition für $a_1, \ldots, a_n$ auch die *von* 0 *verschiedenen* paarweise verschiedenen Werte nehmen.
Bem 2. Im Fall $\mathcal{Y} = \mathbb{K}$ haben wir nun $\int f \,\mathrm{d}\nu$ doppelt definiert, aber wegen $f = \sum a_i \chi_{A_i}$ ergibt sich auch nach der alten Definition wegen Sätzen 265 und 287 für das Integral der gleiche Wert.

Beweis. Da f messbar ist, gehören die Mengen $f^{-1}[\{a_i\}]$ nach Satz 233 zur linken σ-Algebra $\mathfrak{A}$ von f, also zu $\mathrm{Db}(\nu)$. Nun ist $\|f\| = \sum_{i=1}^{n} \|a_i\| \chi_{A_i}$, so dass wegen Satz 260(4) folgt, dass $\|f\| \in \mathfrak{T}^+$. Weiter ist $\int \|f\| \,\mathrm{d}\nu = \sum_{i=1}^{n} \|a_i\| \nu(A_i)$. Wegen der vorausgesetzten Integrierbarkeit von $\|f\|$ folgt aus Satz 277, dass $\sum_{i=1}^{n} \|a_i\| \nu(A_i) < \infty$, daher muss für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$, für das $a_i \neq 0$ ist, $\nu(A_i) < \infty$ sein. ■

Nr. 303 (Satz) ν-Integral charakteristischer Banachraum-Funktionen

Sei $A \in \mathfrak{A}$ und $y \in Y$
und χ stehe für die charakteristische Funktion $\chi_{A,X,y,0}$ (vgl. Def 258).

Falls nun $\nu(A) < \infty$ gilt, ist χ einfach und ν-integrierbar mit $\int \chi \,\mathrm{d}\nu = y\nu(A)$.

Hinweis. Vgl. hierzu Satz 265.

Beweis. Die Einfachheit ist trivial. Nach Satz 259 ist χ streng messbar. Sei zunächst $y \neq 0$. Dann ist $\|\chi\| = |y| \|\chi_{A,X,1,0}\|$, also gilt nach Sätzen 265 und 266, dass $\int \|\chi\| \,\mathrm{d}\nu = |y|\nu(A) < \infty$. Ist aber $y = 0$, so ist $\|y\|$ die konstant auf 0 abbildende Funktion, und nach Satz 271 gilt $\int \|\chi\| \,\mathrm{d}\nu = 0 < \infty$. In jedem Fall ist $\int \|\chi\| \,\mathrm{d}\nu < \infty$, und mit Satz 301 ist somit die ν-Integrierbarkeit von χ bewiesen.
Entweder ist nun 0 der einzige Wert von χ, oder $y \neq 0$ ist der einzige Wert, oder χ hat genau zwei Werte, nämlich 0 und y.
Ist 0 der einzige Wert, so ist $\chi^{-1}[\{0\}] = X$, also $\int \chi \,\mathrm{d}\nu = 0\nu(X) = 0 = 0\nu(A)$.
Ist $y \neq 0$ der einzige Wert, so ist $A = X$ und $\chi^{-1}[\{y\}] = X$, also $\int \chi_A \,\mathrm{d}\nu = y\nu(X) = y\nu(A)$.
Ist schließlich $y \neq 0$ und kommen sowohl y wie auch 0 als Werte vor, so ist $\chi_A^{-1}[\{0\}] = X \setminus A$ und $\chi_A^{-1}[\{1\}] = A$, also $\int \chi_A = 1\nu(A) + 0\nu(X \setminus A) = \nu(A)$. ■

Nr. 304 (Satz) ν-Integrierbarkeit und ν-Integral konstanter Banachraum-Funktionen im Fall $\nu(X) < \infty$

Wenn $\nu(X) < \infty$, ist jede konstante Funktion $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ mit $\forall\ x \in X\ f(x) = a \in Y$ ν-integrierbar mit $\int f\,\mathrm{d}\nu = a\nu(X)$.

Beweis. Es ist $f = \chi_{X,X,a,a}$. Siehe nun Satz 303. ■

Nr. 305 (Satz) ν-Integrierbarkeit und ν-Integral der konstant auf $0 \in Y$ abbildenden Banachraum-Funktion

f: $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ mit $\forall\ x \in X\ f(x) = 0 \in Y$ ist ν-integrierbar mit $\int f\,\mathrm{d}\nu = 0$.

Dies gilt auch für $\nu(X) = \infty$, so dass dieser Satz kein Spezialfall von Satz 304 ist.

Beweis. Es ist $f = \chi_{\emptyset,\mathcal{X},0,0}$ und $\nu(\emptyset) = 0 < \infty$. Siehe nun Satz 303. ■

Nr. 306 (Satz) Integralungleichung für einfache ν-integrierbare Banachraum-Funktionen

Sei f: $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ eine einfache ν-integrierbare Funktion.
Per Def ist dann auch $\|f\|$ ν-integrierbar und es gilt: $\|\int f\,\mathrm{d}\nu\| \leq \int \|f\|\,\mathrm{d}\nu$

Beweis. Seien $a_1, \ldots, a_n$ die paarweise verschiedenen Werte von f, und $\forall\ i \in \{1, \ldots, n\}\ A_i = f^{-1}[\{a_i\}]$. Nach Satz und Def 302 sind die A_i messbar und es gilt $\int f\,\mathrm{d}\nu = \sum_{i=1}^n a_i\nu(A_i)$. Nun gilt $\|f\| = \sum_{i=1}^n \|a_i\|\chi_{A_i}$, also folgt nach Satz refallgemeine Formel fuer das nu-Integral nichtnegativer Treppenfunktionen, dass $\int \|f\|\,\mathrm{d}\nu = \sum_{i=1}^n \|a_i\|\nu(A_i)$, so dass die Behauptung wegen $\|\sum_{i=1}^n a_i\nu(A_i)\| \leq \sum_{i=1}^n \|a_i\nu(A_i)\| = \sum_{i=1}^n \|a_i\|\nu(A_i)$ zutrifft. ■

Nr. 307 (Satz) Lemma zur Linearität des ν-Integrals von Banachraum-Funktionen

Sind f, g: $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ ν-integrierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{K}$, so sind auch $f + g$ und λf ν-integrierbar.

Beweis. Nach dem Kriterium Satz 301 sind f, g messbar und es gilt
(A) $\int \|f\|\,\mathrm{d}\nu < \infty$ sowie $\int \|g\|\,\mathrm{d}\nu < \infty$.

Wegen Satz 263 ist auch $f + g$ und λf streng messbar, und wegen dem Kriterium Satz 301 braucht nur noch nachgewiesen zu werden, das $\int \|f + g\|\,\mathrm{d}\nu < \infty$ und $\int \|\lambda f\|\,\mathrm{d}\nu < \infty$.
Wegen Satz 249 sind zunächst $\|f\|$, $\|g\|$, $\|f + g\|$ und $\|\lambda f\|$ Elemente von $\mathcal{M}^+(\mathcal{X}, \mathbb{R})$. Nach

Satz 270 ist mit $\|f\|$ und $\|g\|$ schließlich auch $\|f\| + \|g\|$ Element von $\mathcal{M}^+(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, und wegen $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ folgt nun:
$\int \|f+g\| \,\mathrm{d}\nu \underset{Satz\ 270(3)}{\leq} \int (\|f\| + \|g\|) \,\mathrm{d}\nu \underset{Satz\ 270(2)}{=} \int \|f\| \,\mathrm{d}\nu + \int \|g\| \,\mathrm{d}\nu \underset{(A)}{\leq} \infty.$
Außerdem ist $\int \|\lambda f\| \,\mathrm{d}\nu = \int |\lambda| \|f\| \,\mathrm{d}\nu \underset{Satz\ 270(1)}{=} |\lambda| \int \|f\| \,\mathrm{d}\nu \underset{(A)}{\leq} \infty.$■

Nr. 308 (Satz) Linearität für ν-integrierbare einfache Banachraum-Funktionen

Seien $f, g \colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ einfache ν-integrierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{K}$.

Dann sind auch $f + g$ und λf ν-integrierbare einfache Funktionen und es gilt

1. *(Homogenität) $\int \lambda f \,d\nu = \lambda \int f \,d\nu$.*
2. *(Additivität bezüglich Integrand) $\int (f+g) \,d\nu = \int f \,d\nu + \int g \,d\nu$*

Beweis. Trivialerweise sind $f + g$ und λf einfache Funktionen, und nach dem vorhergehenden Lemma (Satz 307) sind sie ν-integrierbar. Seien nun $a_1, \ldots, a_m$ die paarweise verschiedenen Werte von f, und $\forall\ j \in \{1, \ldots, m\}\ A_j = f^{-1}[\{a_j\}]$, und seien $b_1, \ldots, b_n$ die paarweise verschiedenen Werte von g, und $\forall\ k \in \{1, \ldots, n\}\ B_k = g^{-1}[\{a_k\}]$. Seien schließlich $c_1, \ldots, c_p$ die paarweise verschiedenen Werte von $f + g$ und $\forall\ i \in \{1, \ldots, p\}\ C_i := (f+g)^{-1}[\{c_i\}]$.

Zur Homogenität. Im Fall $\lambda = 0$ ist 0 der einzige Wert von λf, also $(\lambda f)^{-1}[\{0\}] = X$ und es gilt $\int \lambda f \,\mathrm{d}\nu = 0\nu(X) = 0 = 0 \int f \,\mathrm{d}\nu$. Im Fall $\lambda \neq 0$ sind $\lambda a_1, \ldots, \lambda a_m$ die paarweise verschiedenen Werte von λf, wobei für $i \in \{1, \ldots, m\}$ offenbar $f^{-1}[\lambda a_i] = A_i$ gilt. Daher ist $\int \lambda f \,\mathrm{d}\nu = \sum_{i=1}^m \lambda a_i \nu(A_i) = \lambda \sum_{i=1}^m a_i \nu(A_i) = \lambda \int f \,\mathrm{d}\nu$.

Zur Additivität. Es ist dann $\int (f+g) \,\mathrm{d}\nu = \sum_{i=1}^p c_i \nu(C_i)$. Zu jedem $i \in \{1, \ldots, p\}$ gibt es nun aber ein $j \in \{1, \ldots, m\}$ und ein $k \in \{1, \ldots, n\}$, so dass $c_i = a_j + b_k$ und $C_i = (f + g)^{-1}[\{c_i\}] = f^{-1}[\{a_j\}] \cap g^{-1}[\{b_k\}] = A_j \cap B_k$. Somit ist also $\int f + g \,\mathrm{d}\nu$ die Summe S gewisser $(a_j + b_k)\nu(A_j \cap B_k)$ mit $j \in \{1, \ldots, p\}$ und $k \in \{1, \ldots, m\}$.
Ist umgekehrt ein $j \in \{1, \ldots, p\}$ und $k \in \{1, \ldots, m\}$ so gewählt, dass es *kein* $i \in \{1, \ldots, p\}$ gibt mit $c_i = a_j + b_k$, so ist offenbar $A_j \cap B_k = \emptyset$, also $\nu(A_j \cap B_k) = 0$, also bleibt die Summe S gleich, wenn wir $(a_j + b_k)\nu(A_j \cap B_k)$ hinzuaddieren. Daher ist $S = \int f + g \,\mathrm{d}\nu$ einfach die Summe *aller* Summanden $(a_j + b_k)\nu(A_j \cap B_k)$ mit $j \in \{1, \ldots, m\}$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$, das heißt

$\int (f+g) \,\mathrm{d}\nu = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_j + b_k)\nu(A_j \cap B_k).$

Nun ist A_j für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$ die disjunkte Vereinigung der $A_j \cap B_k$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$, also $\nu(A_j) = \sum_{k=1}^n \nu(A_j \cap B_k)$, also ist
$\int f \,\mathrm{d}\nu = \sum_{j=1}^m a_j \nu(A_j) = \sum_{j=1}^m a_j \sum_{k=1}^n \nu(A_j \cap B_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_j \nu(A_j \cap B_k)$
Ebenso folgt $\int g \,\mathrm{d}\nu = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n b_k \nu(A_j \cap B_k)$,
also $\int f \,\mathrm{d}\nu + \int g \,\mathrm{d}\nu = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (a_j + b_k)\nu(A_j \cap B_k) = \int (f+g) \,\mathrm{d}\nu$. ■

Nr. 309 (Satz und Def) ν-Integral ν-integrierbarer Banachraum-Funktionen

Sei $f\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ ν-integrierbar. Dann gilt:

1. Es gibt eine Folge (f_n) ν-integrierbarer einfacher Funktionen $f_n\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ derart dass $\sup_n \|f_n\|$ ν-integrierbare reelle Funktion ist.
2. Es gibt eine Folge (f_n) wie in (1), für die $\|f_n\| \le \|f\|$ für alle Indizes n gilt.
3. Für jede Folge wie in (1) existiert $\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\nu$ und für verschiedene solche Folgen hat dieser Ausdruck stets denselben Wert.

Wegen dieser Tatsachen können wir definieren:

$\int f \,\mathrm{d}\nu$ (lies: ν-Integral von f) $:= \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\nu$,

wobei (f_n) eine Folge ist, wie in (1) und (2) beschrieben.

Bem. Für einfache ν-integrierbare Banachraum-Funktionen f war $\int f \,\mathrm{d}\nu$ bereits in Def 302 definiert worden. Die neue Definition stimmt aber mit der alten überein, wie man sieht, wenn man als Folge (f_n) gemäß (1) die konstante Folge $(f)_{n\in\mathbb{N}}$ wählt.

$\mathcal{I}(\nu, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$ sei die Menge der ν-integrierbaren Funktionen von $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$;
wkM schreiben wir dafür $\mathcal{I}(\nu)$ oder $\mathcal{I}$.

Beweis. Zu (1) und (2). Wir zeigen (2), dann gilt trivialerweise (1). Nach Satz 262 gibt es eine Folge (f_n) maßtheoretischer Treppenfunktionen $f_i\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$, die punktweise gegen f konvergiert, so dass für alle Indizes n gilt $\|f_n\| \le \|f\|$.

Wir zeigen, dass jedes f_n ν-integrierbar ist.
Zunächst sind die f_n als Treppenfunktionen einfach und messbar, also nach Satz 257 streng messbar. Nun ist gemäß dem Kriterium 301 noch zu zeigen, das $\int \|f_n\| \,\mathrm{d}\nu < \infty$. Wegen der Messbarkeit von f_n ist nach Satz 249 auch $\|f_n\|$ messbar und somit ebenso wie $\|f\|$ Element von $\mathcal{M}^+$. Wegen $\|f_n\| < \|f\|$ folgt mit Satz 270(3), dass $\int \|f_n\| \,\mathrm{d}\nu < \int \|f\| \,\mathrm{d}\nu < \infty$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\sup_n \|f_n\|$ reelle ν-integrierbare Funktion ist. Wegen $\forall\ x \in X\ \|f_n(x)\| \le \|f(x)\| \in \mathbb{R}$ ist $\sup_n \|f_n(x)\| \le\in \|f(x)\|\mathbb{R}$, also existiert $\sup_n |f_n(x)|$ für jedes $x \in X$ als reelle und natürlich nichtnegative Zahl. Wegen der Messbarkeit der Funktionen $\|f_n\|$ ist nach Satz 243 auch $\sup_n \|f_n\|$ messbar, also ebenso wie $\|f\|$ Element von $\mathcal{M}^+$. Wegen $\sup_n \|f_n\| \le \|f\|$ folgt mit Satz 270(3), dass $\int \sup_n f_n \,\mathrm{d}\nu < \int \|f\| \,\mathrm{d}\nu < \infty$. Somit ist $\sup_n \|f_n\|$ nach Satz 277 ν-integrierbar.

Zu (3). Wegen $\forall\ x \in X\ \ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ folgt $\lim_{n\to\infty}(f_n(x) - f(x)) = 0$ und schließlich $\lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$. Ist also N die reelle Funktion mit konstantem Wert 0, so ist

$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|(x) = N(x)$ f.ü., wobei $\|f_n - f\|$ wegen der Messbarkeit von f_n und f (mittels der Sätze 263 und 249) ebenso wie N Element von $\mathcal{M}+$ ist. Außerdem gilt $\forall\, x \in X$ $|\|f_n(x) - f(x)\|| = \|f_n(x) - f(x)\| \leq \|f_n(x)\| + \|f(x)\| \leq (\sup\|f_n\|)(x) + \|f\|(x) = (\sup\|f_n\| + \|f\|)(x)$, also

$|\|f_n(x) - f(x)\|| \leq (\sup\|f_n\| + \|f\|)(x)$ f.ü.,

wobei $\sup\|f_n\| + \|f\|$ nach (1) und Satz 287 ν-integrierbar und daher Element von $\mathcal{M}^+$ ist. Somit folgt nun mit Satz 299 von der majorisierten Konvergenz für $\hat{\mathbb{K}}$-Funktionen, dass $\lim_{n\to\infty} \int |(\|f_n - f\|) - N|\, \mathrm{d}\nu = 0$, das heißt $\lim_{n\to\infty} \int \|f_n - f\|\, \mathrm{d}\nu = 0$.
Es gibt also zu $\varepsilon > 0$ ein n_0 mit für alle $k \geq n_0$:

(A) $\lim_{n\to\infty} \int \|f_k - f\|\, \mathrm{d}\nu < \frac{\varepsilon}{2}$.

Für $m, n \geq n_0$ gilt nun $\|f_n - f_m\| = \|f_n - f + f - f_m\| \leq \|f_n - f\| + \|f_m - f\|$. Weil die Funktionen dieser Ungleichung Elemente von $\mathcal{M}^+$ sind, folgt
$\int \|f_n - f_m\|\, \mathrm{d}\nu \underset{Satz\ 270(3)}{\leq} \int (\|f_n - f\| + \|f_m - f\|)\, \mathrm{d}\nu \underset{Satz\ 270(2)}{=} \int \|f_n - f\|\, \mathrm{d}\nu + \int \|f_m - f\|\, \mathrm{d}\nu$
$\underset{(A)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Dann gilt aber auch $\| \int f_n\, \mathrm{d}\nu - \int f_m\, \mathrm{d}\nu\| \underset{Satz\ 308}{=} \| \int (f_n - f_m)\, \mathrm{d}\nu\| \underset{Satz\ 306}{\leq} \int \|f_n - f_m\| < \varepsilon$,
also haben wir gezeigt, dass

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0\ \forall\, m, n \geq n_0\ \| \int f_n\, \mathrm{d}\nu - \int f_m\, \mathrm{d}\nu\| < \varepsilon$.

Das aber heißt, dass die Folge $(\int f_n\, \mathrm{d}\nu)$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{Y}$ ist, somit einen Grenzwert $y \in Y$ besitzt.

Sei nun (g_n) ebenso wie (f_n) eine Folge ν-integrierbarer einfacher Funktionen $g_n\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ mit $\lim_{n\to\infty} g_n = f$ derart dass $\sup\|g_n\|$ ν-integrierbare reelle Funktion ist. Dann gilt für alle $x \in X$, dass $\lim_{n\to\infty}(f_n(x) - g_n(x)) = 0$ und daher auch $\lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - g_n(x)\| = 0$, also $\lim_{n\to\infty} \|f_n - g_n\|(x) = N(x)$ f.ü., wobei $\|f_n - g_n\|$ aufgrund der Messbarkeit von f_n und g_n ebenso wie N Element von $\mathcal{M}^+$ ist.
Außerdem gilt wegen für alle $x \in X$, dass $|\|f_n(x) - g_n(x)\|| = \|f_n(x) - g_n(x)\| \leq \|f_n(x)\| + \|g_n(x)\| \leq (\sup\|f_n\| + \sup\|g_n\|)(x)$ insbesondere $|\|f_n(x) - g_n(x)\|| \leq (\sup\|f_n\| + \sup\|g_n\|)(x)$ f.ü., wobei $\sup\|f_n\| + \sup\|g_n\|$ nach Satz 287 ν-integrierbar und daher Element von $\mathcal{M}^+$ ist. Somit folgt nun mit Satz 299 von der majorisierten Konvergenz für $\hat{\mathbb{K}}$-Funktionen, dass $\lim_{n\to\infty} \int |(\|f_n - g_n\|) - N|\, \mathrm{d}\nu = 0$, d. h.:

$\lim_{n\to\infty} \int \|f_n - g_n\|\, \mathrm{d}\nu = 0$

Da nun für alle Indizes n gilt $0 \leq \| \int (f_n - g_n)\, \mathrm{d}\nu\| \underset{Satz306}{\leq} \int \|f_n - g_n\|\, \mathrm{d}\nu$,
folgt $\lim_{n\to\infty} \| \int (f_n - g_n)\, \mathrm{d}\nu\| = 0$. Daraus folgt $\lim_{n\to\infty} \int (f_n - g_n)\, \mathrm{d}\nu = 0$, nach Satz 308 also $\lim_{n\to\infty} \int f_n\, \mathrm{d}\nu - \int g_n\, \mathrm{d}\nu = 0$, also $\lim_{n\to\infty} f_n\, \mathrm{d}\nu = \lim_{n\to\infty} g_n\, \mathrm{d}\nu$. ■

Nr. 310 (Satz) Linearität für ν-integrierbare Banachraum-Funktionen

Seien $f, g \colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ ν-integrierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{K}$.
Dann sind auch $f + g$ und λf ν-integrierbare Funktionen und es gilt

1. *(Homogenität)* $\int \lambda f \, \mathrm{d}\nu = \lambda \int f \, \mathrm{d}\nu$.
2. *(Additivität bezüglich Integrand)* $\int (f + g) \, \mathrm{d}\nu = \int f \, \mathrm{d}\nu + \int g \, \mathrm{d}\nu$

Beweis. Siehe [Coh 80, Proposition E.4., S. 353]. ■

Nr. 311 (Satz) Integralungleichung für nu-integrierbare Banachraum-Funktionen

Sei $f \colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ eine ν-integrierbare Funktion.
Per Def ist dann auch $\|f\|$ ν-integrierbar und es gilt: $\| \int f \, \mathrm{d}\nu \| \leq \int \|f\| \, \mathrm{d}\nu$

Beweis. Siehe [Coh 80, Proposition E.5., S. 353]. ■

Nr. 312 (Satz) Maßtheoretisches Integral mehrdimensionaler Funktionen

Für $n \in \mathbb{N}^{\odot}$ und Funktionen $f \colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{K}^n$ gilt: $\int f \, \mathrm{d}\nu = (\int f_1 \, \mathrm{d}\nu, \ldots, \int f_n \, \mathrm{d}\nu)$

Beweis. Nach [Coh 80, Proposition E.11, S. 356] gilt für ν-integrierbares $f \colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ und jede Linearform $\phi \colon \mathcal{Y} \longrightarrow \mathbb{K}$ stets $\int \phi \circ f \, \mathrm{d}\nu = \phi(\int f \, \mathrm{d}\nu)$.
Im Fall $\mathcal{Y} = \mathbb{K}^n$ kann man also für ϕ die i-te Projektion ($i \in \{1, \ldots, n\}$) nehmen. Dann ergibt sich $\int f_i \, \mathrm{d}\nu = (\int f \, \mathrm{d}\nu)_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Daraus folgt die Behauptung. ■

Nr. 313 (Satz) Satz von der majorisierten Konvergenz für Banachraum-Funktionen

Sei $f \in \mathfrak{M}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ und (f_n) eine Folge von Funktionen aus $\mathfrak{M}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.
Gelte $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ fast überall.

Sei $g \in \mathcal{M}^+$ integrierbar mit für alle Indizes n: $\|f_n(x)\| \leq g(x)$ *f.ü.*

Dann sind f sowie alle Funktionen f_n und $\|f_n - f\|$ ν-integrierbar, und es gilt

1. $\lim_{n \to \infty} \int f_n \, \mathrm{d}\nu = \int f \, \mathrm{d}\nu$
2. $\lim_{n \to \infty} \int \|f_n - f\| \, \mathrm{d}\nu = 0$

Beweis. Zu (1) siehe [Coh 80, Theorem E.6, S. 353-354]. (2) folgt unmittelbar aus (1). ■

9.11 ν-Integrale über messbaren Teilmengen

Nr. 314 (Satz) Gleichwertigkeit der Integration über $f|T$ und $f \cdot \chi_T$

Sei $f\colon \mathcal{X} \longrightarrow \hat{\mathbb{K}}$ (bzw. $\longrightarrow \mathcal{Y}$). Sei T Element der linken σ-Algebra $\mathfrak{A}$ von f.
Ist $\mathcal{X}$ $\frac{\text{Messraum}}{\text{topologischer Raum}}$, sei $\mathcal{T} = \frac{(T,\mathfrak{A} \Cap T)}{(T,\mathfrak{O}_{\mathcal{X}} \Cap T)}$ der $\frac{\text{Untermessraum}}{\text{topologische Unterraum}}$ von $\mathcal{X}$ mit Träger T.

Wir betrachten nun die beiden Funktionen
$f|T\colon T \longrightarrow \hat{\mathbb{K}}$ (bzw. $\longrightarrow \mathcal{Y}$) und
$f \cdot \chi_T\colon \mathcal{X} \longrightarrow \hat{\mathbb{K}}$ (bzw. $\longrightarrow \mathcal{Y}$) mit $\forall\, x \in X$ $(f \cdot \chi_T)(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
(Falls f $\hat{\mathbb{K}}$-wertig ist, kann $f \cdot \chi_T$ als Produkt von f mit der charakteristischen Funktion χ_T von T interpretiert werden, wobei also $\chi_T(x) = 0$ oder $= 1$, je nachdem ob $x \in T$ oder nicht. — Falls aber f $\mathcal{Y}$-wertig ist, ist diese Interpretation nicht immer möglich, da 1 kein Element von $\mathcal{Y}$ sein muss. Man nehme dann $f \cdot \chi_T$ einfach als formale Bezeichnung für die oben definierte Funktion)

Dann ist $\mathfrak{A}_T := \mathfrak{A} \Cap T$ ist die linke σ-Algebra von $f|T$ (Satz 231), während die rechte σ-Algebra von $f|T$ trivialerweise mit der von $f \cdot \chi_T$ übereinstimmt. Weiter ist $(T, \mathfrak{A}_T)$ Messraum (Satz 179) und $\nu|(\mathfrak{A}_T)$ ist ein Maß auf diesem (Satz 201). Weiter gilt:

0. *f ist messbar [bzw. streng messbar] $\Rightarrow$ $f|T$ ist messbar [bzw. streng messbar]*
1. *$f|T$ ist messbar [bzw. streng messbar] $\Leftrightarrow$ $f \cdot \chi_T$ ist messbar [bzw. streng messbar]*
2. *$f \cdot \chi_T \in \mathcal{M}^+ \Leftrightarrow f|T \in \mathcal{M}^+$*
   und dann gilt $\int f \cdot \chi_T \, d\nu = \int f|T \, d\nu|\mathfrak{A}_T$
3. *$f \cdot \chi_T$ ist genau dann ν-integrierbar, wenn $f|T$ $\nu|\mathfrak{A}_T$-integrierbar ist*
   und dann gilt $\int f \cdot \chi_T \, d\nu = \int f|T \, d\nu|\mathfrak{A}_T$
4. *$f \cdot \chi_T$ ist genau dann ν-quasiintegrierbar, wenn $f|T$ $\nu|\mathfrak{A}_T$-quasiintegrierbar ist*
   und dann gilt $\int f \cdot \chi_T \, d\nu = \int f|T \, d\nu|\mathfrak{A}_T$
5. *$\int f \cdot \chi_T \, d\nu = \int f|T \, d\nu|\mathfrak{A}_T$,*

   das heißt die linke Seite ist genau dann wohldefiniert,

   wenn dies auch für die rechte gilt,

   und im Fall der Wohldefiniertheit bezeichnen die Terme dasselbe.

Beweis (vgl. [Els 99, Lemma 3.15, S. 133-134]). Zu (0) siehe Satz 231.

Zu (1). Sei $f \cdot \chi_T$ (ν-)messbar. Ist B Element der rechten σ-Algebra von $f \cdot \chi_T$ und $f|T$, folgt $(f|T)^{-1}[B] = \{x \in T \,:\, f(x) \in B\} = \{x \in X \,:\, f(x) \cdot \chi_T(x) \in B\} \cap T = (f \cdot \chi_T)^{-1}[B] \cap T$, was wegen $(f \cdot \chi_T)^{-1}[B] \in \mathfrak{A}$ ein Element von $\mathfrak{A} \Cap T = \mathfrak{A}_T$ ist. Somit ist $f|T$ ($\nu|\mathfrak{A}_T$-)messbar.
Sei umgekehrt $f|T$ ($\nu|\mathfrak{A}_T$-)messbar. Da $T \in \mathfrak{A}$, gilt $\mathfrak{A}_T = \mathfrak{A} \Cap T \subseteq \mathfrak{A}$. Es gilt dann für ein B aus der rechten σ-Algebra von $f \cdot \chi_T$ und $f|\mathcal{T}$, dass $(f|\mathcal{T})^{-1}[B] \in \mathfrak{A}_T \subseteq \mathfrak{A}$, also $(f|\mathcal{T})^{-1}[B] \in \mathfrak{A}$.

Weiter ist $(f \cdot \chi_T)^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \cdot \chi_T(x) \in B\}$
$= \{x \in T : f(x) \in B\} \cup \{x \in X \setminus T : 0 \in B\}$, das ist
$= \begin{cases} \{x \in T : f(x) \in B\} & \text{falls } 0 \notin B \\ \{x \in T : f(x) \in B\} \cup (X \setminus T) & \text{sonst} \end{cases}$
In beiden Fällen ist das $\in \mathfrak{A}$, denn $\{x \in T : f(x) \in B\} = (f|\mathcal{T})^{-1}[B] \in \mathfrak{A}$, und wegen $T \in \mathfrak{A}$ ist auch $X \setminus T \in \mathfrak{A}$, also auch $\{x \in T : f(x) \in B\} \cup (X \setminus T) \in \mathfrak{A}$.
Somit ist $f \cdot \chi_T$ (ν-)messbar.

Um nun die Aussage über strenge Messbarkeit zu beweisen, müssen wir nur noch zeigen:
$\mathrm{Wb}(f|\mathcal{T})$ ist separabel $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Wb}(f \cdot \chi_T)$ ist separabel.
Nun ist $\mathrm{Wb}(f|\mathcal{T}) = f[T]$, während $\mathrm{Wb}(f \cdot \chi_T) = f[T]$ oder $= f[T] \cup \{0\}$ ist. Im ersten Fall ist die Äquivalenz trivial; im zweiten folgt $\Rightarrow$, weil $\{0\}$ separabel und die Vereinigung separabler Mengen separabel ist (vgl. Anhang, Satz 352(2) und (4)), und $\Leftarrow$, weil Teilmengen separabler Mengen in metrischen Räumen separabel sind (vgl. Anhang, Satz 352(4)).

Zu (2). Die Äquivalenz $f \cdot \chi_T \in \mathcal{M}^+ \Leftrightarrow f|\mathcal{T} \in \mathcal{M}^+$ ist mit Blick auf (1) trivial. Sei nun $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathcal{T}_m^+(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ mit $u_n \uparrow f \cdot \chi_T$. Mit Blick auf (0) ist dann auch $(u_n|T)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathcal{T}_m^+(\mathcal{T}, \mathbb{R})$, und trivialerweise ist $u_n|\mathcal{T} \uparrow f|\mathcal{T}$.

Nach der Def des Integrals für nichtnegative messbare Funktionen ist also
$\int f \cdot \chi_T \,\mathrm{d}\nu = \lim_{n\to\infty} \int u_n \,\mathrm{d}\nu$ sowie $\int f|Y \,\mathrm{d}\nu|\mathfrak{A}_T = \lim_{n\to\infty} \int u_n|\mathcal{T} \,\mathrm{d}\nu|\mathfrak{A}_T$
Wir sind also fertig, wenn wir $\int u_n \,\mathrm{d}\nu = \int u_n|\mathcal{T} \,\mathrm{d}\nu|\mathfrak{A}_T$ nachweisen können.

Nun gilt für $x \in \complement T$, dass $0 \leq u_n(x) \leq f(x) \cdot \chi_T(x) = 0$, also
(A) $\forall\, x \in \complement T\ u_n(x) = 0$.

Wir gehen davon aus, dass $\complement T \neq \emptyset$ (sonst ist $T = X$ und die zu zeigende Gleichung $\int u_n \,\mathrm{d}\nu = \int u_n|\mathcal{T} \,\mathrm{d}\nu|\mathfrak{A}_T$ gilt trivialerweise).
Sind nun a_i für $i = 1, \ldots, n$ die Werte, die u_n annimmt, so ist 0 darunter, und wir können $a_1 = 0$ setzen. Dann ist $u_n = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$, wobei $A_i := u_n^{-1}[\{a_i\}] \in \mathfrak{A}$ ist (vgl. Satz 260(2))
Weiter ist dann $\complement T$ wegen (A) eine Teilmenge von $u_n^{-1}[\{0\}] = u_n^{-1}[\{a_1\}] = A_1$. Es sind also $A_2, \ldots, A_n$ Teilmengen von T, also ist $A_2 = A_2 \cap T, \ldots, A_n = A_n \cap T$, so dass $A_2, \ldots, A_n$ auch Elemente von $\mathfrak{A}_T$ sind. Weiter ist wegen $T, A_1 \in \mathfrak{A}$ auch $A_1 \cap T \in \mathfrak{A}$. Außerdem ist $A_1 \cap T = (A_1 \cap T) \cap T$ und darum auch Element von $\mathfrak{A}_T$. Trivialerweise gilt nun $u_n|T = a_1\chi_{A_1\cap T} + \sum_{i=2}^n a_i\chi_{A_i}$. Mit Blick auf Satz 267 gilt also wegen $u_n = \sum_{i=1}^n a_i\chi_{A_i}$ bzw. wegen $u_n|T = a_1\chi_{A_1\cap T} + \sum_{i=2}^n a_i\chi_{A_i}$

$$\begin{aligned} \int u_n \,\mathrm{d}\nu &= \sum_{i=1}^n a_i\nu(A_i) \underset{a_1=0}{=} \sum_{i=2}^n a_i\nu(A_i) \text{ bzw.} \\ \int u_n|\mathcal{T} \,\mathrm{d}\nu|\mathfrak{A}_T &= \nu(A_1 \cap T) + \sum_{i=2}^n a_i\nu(A_i) \underset{a_1=0}{=} \sum_{i=2}^n a_i\nu(A_i), \end{aligned}$$

also $\int u_n \,\mathrm{d}\nu = \int u_n|\mathcal{T} \,\mathrm{d}\nu|\mathfrak{A}_T$.

Zu (3) und (4). Zunächst sei f Funktion in $(\hat{\mathbb{K}}, \mathfrak{O}_{\hat{\mathbb{K}}})$. Trivialerweise gilt dann $(\mathrm{Re}(f|\mathcal{T}))^{\pm} = (\mathrm{Re}\, f)^{\pm}|\mathcal{T}$ und ebenso $(\mathrm{Re}\, f)^{\pm} \cdot \chi_T = (\mathrm{Re}(f \cdot \chi_T))^{\pm}$. Daher folgt wegen (2), dass

$\int(\mathrm{Re}(f|\mathcal{T}))^{\pm}\,\mathrm{d}\nu|\mathfrak{A}_T = \int(\mathrm{Re}\,f)^{\pm}|\mathcal{T}\,\mathrm{d}\nu|\mathfrak{A}_T \underset{(2)}{=} \int(\mathrm{Re}\,f)^{\pm}\cdot\chi_T\,\mathrm{d}\nu = \int(\mathrm{Re}(f\cdot\nu_T)^{\pm}\,\mathrm{d}\nu,$

so dass die linke Seite genau dann $< \infty$ ist, wenn es die rechte ist. Entsprechendes gilt für Im statt Re. Also ist $f\cdot\nu_T$ genau dann ν-(quasi)integrierbar, wenn $f|\mathcal{T}$ $\nu|\mathfrak{A}_T$ (quasi-)integrierbar ist, und aus (2) folgt dann auch die behauptete Gleichheit der Integrale.

Für den Fall (3) bleibt noch der Fall, dass f Funktion in $\mathcal{Y}$ ist. Da gemäß (1) $f|\mathcal{T}$ genau dann streng messbar ist, wenn $f\cdot\chi_T$ streng messbar ist, und außerdem gemäß dem ersten Teil des Beweises von (3) $\|f|\mathcal{T}\|$ (das ist $\|f\||\mathcal{T}$) genau dann $\nu|\mathfrak{A}_T$-integrierbar ist, wenn $\|f\cdot\chi_T\|$ (das ist $\|f\|\cdot\chi_T$) ν-integrierbar ist, folgt insgesamt, dass $f|\mathcal{T}$ genau dann $\nu|\mathfrak{A}_T$-integrierbar ist, wenn $f\cdot\chi_T$ ν-integrierbar ist.

Sei nun (f_n) eine Folge ν-integrierbarer einfacher Funktionen von $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f\cdot\chi_T$ derart dass $\sup_n\|f_n\|$ ν-integrierbare reelle Funktion ist. Dann ist trivialerweise $\lim_{n\to\infty}(f_n|\mathcal{T}) = f|\mathcal{T}$, es ist nach Satz 231 jedes $f_n|\mathcal{T}$ messbar und für alle $x\in T$ gilt offenbar $\sup_n\|(f_n|\mathcal{T})(x)\| = \sup_n\|f_n(x)\| < \infty$, so dass $\sup_n f_n|\mathcal{T}$ reelle Funktion ist.
Weiter gilt für alle $x\in X$: $\sup_n(\|f_n(x)\|\cdot\chi_T(x)) \le \sup_n\|f_n(x)\|$, und so folgt mit dem ersten Teil des Beweises von (3) sowie Satz 270(3), dass
$\int\sup_n\|f_n|\mathcal{T}\|\,\mathrm{d}(\nu|\mathfrak{A}_T) = \int\sup_n(\|f_n\||\mathcal{T})\,\mathrm{d}(\nu\mathfrak{A}_T) = \int\sup_n(\|f_n\|\cdot\chi_T)\,\mathrm{d}\nu \le \int\sup_n\|f_n\|\,\mathrm{d}\nu$ $< \infty$. Insgesamt ist $\sup_n\|f_n|\mathcal{T}\|$ nach Satz 277 $\nu|\mathfrak{A}_T$-integrierbar. Erst recht ist $\|f_n|\mathcal{T}\| \le \sup\|f_n|\mathcal{T}\|$, also $\int\|f_n|\mathcal{T}\|\,\mathrm{d}(\nu|\mathfrak{A}) \le \int\sup\|f_n|\mathcal{T}\|\,\mathrm{d}(\nu|\mathfrak{A}) < \infty$, so dass $f_n|T$ $(\nu|\mathfrak{A}_T)$-integrierbar ist. Daher folgt

$\int(f\cdot\chi_T)\,\mathrm{d}\nu = \lim_{n\to\infty}\int f_n\,\mathrm{d}\nu$ und $\int(f|\mathcal{T})\,\mathrm{d}(\nu|\mathfrak{A}_T) = \lim_{n\to\infty}\int(f_n|\mathcal{T})\,\mathrm{d}(\nu\mathfrak{A}_T)$

Wir sind also fertig, wenn wir für alle Indizes n nachweisen können, dass
$\int f_n\cdot\chi_T\,\mathrm{d}\nu = \int(f_n|\mathcal{T})\,\mathrm{d}(\nu|\mathfrak{A}_T)$.

Zu zeigen ist also, dass
$\int f\cdot\chi_T\,\mathrm{d}\nu = \int(f|\mathcal{T})\,\mathrm{d}(\nu|\mathfrak{A}_T)$ für den Fall gilt, dass f einfach ist.

Seien unter dieser Voraussetzung $a_1,\dots a_n$ die von Null und voneinander verschiedenen Werte von $f\cdot\chi_T$. Wir können $\complement T\neq\emptyset$ voraussetzen (sonst gilt $T = X$ und $\int f\cdot\chi_T\,\mathrm{d}\nu = \int(f|\mathcal{T})\,\mathrm{d}(\nu\mathfrak{A}_T)$ gilt trivialerweise). Es sind $a_1,\dots,a_n$ auch die von 0 verschiedenen Werte von $f|\mathcal{T}$. Für $i\in\{1,\dots,n\}$ sei $A_i := (f\cdot\chi_T)^{-1}[\{a_i\}]$, das ist offenbar Teilmenge von T und $= (f|\mathcal{T})^{-1}[\{a_i\}]$. Somit folgt in der Tat

$\int(f|\mathcal{T})\,\mathrm{d}(\nu|\mathfrak{A}_T) = \sum_{i=1}^n a_i\nu(A_i) = \int(f\cdot\chi_T)\,\mathrm{d}\nu.$

Zu (5). Dies folgt sofort aus (2) bis (4), denn Wohldefiniertheit eines Integralterms ist genau dann gegeben, wenn der Integrand bezüglich des angegebenen Maßes $\in\mathcal{M}^+$ oder integrierbar oder quasiintegrierbar ist. ■

Nr. 315 (Def) ν-Integral über einer messbaren Teilmenge

Sei $f\colon \mathcal{X} \longrightarrow \hat{\mathbb{K}}$ oder $\longrightarrow \mathcal{Y}$. Sei $T \in \mathfrak{A}$.
Sei $\mathcal{T}$ im Fall, dass $\mathcal{X}$ $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Messraum}}{\text{topologischer Raum}}$ ist, der $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Untermessraum}}{\text{topologische Unterraum}}$ von $\mathcal{X}$ mit Träger T.

Nach Satz 314(5) gilt $\int f \cdot \chi_T \,\mathrm{d}\nu = \int f|\mathcal{T} \,\mathrm{d}\nu|\mathfrak{A}_T$,
so dass wir im Fall der Wohldefiniertheit einer (und daher beider) Seiten dieser Gleichung (d. h. wenn die Integranden $\in \mathcal{M}^+(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{R}})$ bzw. $\in \mathcal{M}^+(\mathcal{T}, \overline{\mathbb{R}})$ oder ν–integrierbar bzw. $\nu|\mathfrak{A}_T$-integrierbar oder ν–quasiintegrierbar bzw. $\nu|\mathfrak{A}_T$-quasiintegrierbar sind), definieren können:

$\int_T f \,\mathrm{d}\nu$ (lies: ν-Integral von f über T) $:= \int f \cdot \chi_T \,\mathrm{d}\nu = \int f|\mathcal{T} \,\mathrm{d}\nu|\mathfrak{A}_T$

T heißt der *Integrationsbereich* des Integralterms $\int_T f \,\mathrm{d}\nu$.

Nr. 316 (Satz) allgemeines ν-Integral als ν-Integral über einer Teilmenge

*Sei $f\colon \mathcal{X} \longrightarrow \hat{\mathbb{K}}$ oder $\longrightarrow \mathcal{Y}$ derart, dass $\int f \,d\nu$ definiert ist,
d. h. f ist $\in \mathcal{M}^+$ oder ν-integrierbar oder ν-quasiintegrierbar. Dann gilt: $\int f \,d\nu = \int_X f \,d\nu$.*

Beweis. Trivial. ∎

Nr. 317 (Satz) Additivität bezüglich Integrationsbereich für das ν-Integral

Sei $f\colon \mathcal{X} \longrightarrow \hat{\mathbb{K}}$ oder $\longrightarrow \mathcal{Y}$ und $T_1, T_2 \in \mathfrak{A}$.

Wenn f Element von $\mathcal{M}^+$ bzw. integrierbar bzw. quasiintegrierbar ist, gilt das auch für $f|T_1$, $f|T_2$, $f|(T_1 \cap T_2)$, $f|(T_1 \cup T_2)$,[1] *(und nach Satz 314 für $f \cdot \chi_{T_1}$, $f \cdot \chi_{T_2}$, $f \cdot \chi_{T_1 \cap T_2}$, $f \cdot \chi_{T_1 \cup T_2}$),
und es folgt:*

1. $\int_{T_1 \cup T_2} f \,d\nu + \int_{T_1 \cap T_2} f \,d\nu = \int_{T_1} f \,d\nu + \int_{T_2} f \,d\nu$
2. *T_1, T_2 disjunkt* $\Rightarrow \int_{T_1 \cup T_2} f \,d\nu = \int_{T_1} f \,d\nu + \int_{T_2} f \,d\nu$

Beweis. Wir zeigen, dass sich Eigenschaft von f, Element von $\mathcal{M}^+$ bzw. quasiintegrierbar bzw. integrierbar zu sein, auf $f|T$ überträgt, wenn $T \in \mathfrak{A}$ ist. Da mit T_1, T_2 auch $T_1 \cap T_2$ und $T_1 \cup T_2$ Elemente von $\mathfrak{A}$ sind, sind dann nur noch die beiden Formeln (1) und (2) zu beweisen.
Zunächst folgt nach Satz 231 aus der Messbarkeit bzw. strengen Messbarkeit von f auch die von $f|T$ und wegen Satz 314(1) dann auch die von $f \cdot \chi_{T_1}$. Ist f eine $\hat{\mathbb{R}}$-Funktion folgt nach Satz 252 aus der Messbarkeit von f auch die von $f^\pm$, also auch die von $f^\pm|T$ und $f^\pm \cdot \chi_T$.

[1] wobei natürlich die (Quasi-)Integrierbarkeit von f auf ν, die von $f|T_1$ auf $\nu|\mathfrak{A}_{T_1}$, die von $f|T_2$ auf $\nu|\mathfrak{A}_{T_2}$, die von $f|(T_1 \cap T_2)$ auf $\nu|\mathfrak{A}_{T_1 \cap T_2}$ und die von $f|(T_1 \cup T_2)$ auf $\nu|\mathfrak{A}_{T_1 \cup T_2}$ bezogen werden muss.

Wenn nun f nichtnegativ ist, so trivialerweise auch jede Einschränkung von f. Ist daher f Element von $\mathcal{M}^+(\mathcal{X},\overline{\mathbb{R}})$ so $f|T \in \mathcal{M}^+(T,\overline{\mathbb{R}})$.
Als nächstes sei f ν-quasiintegrierbar, also $\int f^+ \,\mathrm{d}\nu < \infty$ oder $\int f^- \,\mathrm{d}\nu < \infty$. Da nun $f^\pm \cdot \chi_T$ nach dem eben Bewiesenen messbar und trivialerweise nichtnegativ ist, folgt wegen $f^\pm \cdot \chi_T \leq f^\pm$, dass $\int (f^\pm \cdot \chi_T) \,\mathrm{d}\nu \leq \int f^\pm \,\mathrm{d}\nu$, also ist eines der beiden Integrale $\int (f^\pm \cdot \chi_T) \,\mathrm{d}\nu$ kleiner ∞, das heißt nach Satz 314(3): eines der beiden Integrale $\int f^\pm|T \,\mathrm{d}\nu|\mathfrak{A}_T$ ist $< \infty$, und da trivialerweise $f^\pm|T = (f|T)^\pm$, folgt daraus die Quasiintegrierbarkeit von $f|T$.
Schließlich sei f ν-integrierbar. Nun gilt $\|f \cdot \chi_T\| \leq \|f\|$, wobei (im Fall, dass f $\hat{\mathbb{K}}$-Funktion ist, nach Satz 285(6), und im Fall, dass f Banachraum-Funktion ist, nach Def 300) $\|f\|$ ν-integrierbar ist. Daher folgt die Integrierbarkeit von $f \cdot \chi_T$ aus Satz 301, und nach Satz 314 auch die Integrierbarkeit von $f|T$.

Zu (1). Offenbar gilt $\chi_{T_1\cup T_2} + \chi_{T_1\cap T_2} = \chi_{T_1} + \chi_{T_2}$ und das Integral ist sowohl für Integranden aus $\mathcal{M}^+$ wie auch für integrierbare $\hat{\mathbb{K}}$-Funktionen und integrierbare Banachraum-Funktionen linear (Sätze 270(2), 287 und 310). Daher folgt für $f \in \mathcal{M}^+$ oder integrierbares f:
$\int_{T_1\cup T_2} f \,\mathrm{d}\nu + \int_{T_1\cap T_2} f \,\mathrm{d}\nu = \int f\chi_{T_1\cup T_2} \,\mathrm{d}\nu + \int f\chi_{T_1\cap T_2} = \int f(\chi_{T_1\cup T_2} + \chi_{T_1\cap T_2}) \,\mathrm{d}\nu = \int f(\chi_{T_1} + \chi_{T_2}) \,\mathrm{d}\nu = \int f\chi_{T_1} \,\mathrm{d}\nu + \int f\chi_{T_2} \,\mathrm{d}\nu = \int_{T_1} f \,\mathrm{d}\nu + \int_{T_2} f \,\mathrm{d}\nu$.

Sei nun f quasiintegrierbar, also von den Termen $\int f^+ \,\mathrm{d}\nu$ und $\int f^- \,\mathrm{d}\nu$ höchstens der erste bzw. zweite Term $= \infty$. Gilt nun für *ein* T aus $\{T_1, T_2, T_1 \cap T_2, T_1 \cup T_2\}$, dass $\int_T f^+ \,\mathrm{d}\nu = \infty$, so ist offenbar erst recht $\int f^+ \,\mathrm{d}\nu = \infty$, also ist $\int f^- \,\mathrm{d}\nu$ von ∞ verschieden und für *alle* T aus $\{T_1, T_2, T_1 \cap T_2, T_1 \cup T_2\}$ ist dann $\int_{T'} f^- \,\mathrm{d}\nu$ ebenfalls von ∞ verschieden. Analog folgt: gilt für *ein* T, dass $\int_T f^- \,\mathrm{d}\nu = \infty$, so gilt für *alle* T, dass $\int_T f^+ \,\mathrm{d}\nu \neq \infty$. Aufgrunddessen kommt in

$$\int_{T_1} f^+ \,\mathrm{d}\nu - \int_{T_1} f^- \,\mathrm{d}\nu + \int_{T_2} f^+ \,\mathrm{d}\nu - \int_{T_2} f^- \,\mathrm{d}\nu$$

nicht zugleich ∞ und $-\infty$ vor, so dass in dieser Summe neben dem Kommutativ- auch das Assoziativgesetz angewendet werden kann (vgl. die Beschreibung der Operationen in $\overline{\mathbb{R}}$ in Abschnitt 1.3). Gleiches gilt für die Summe

$$\int_{T_1\cap T_2} f^+ \,\mathrm{d}\nu - \int_{T_1\cap T_2} f^- \,\mathrm{d}\nu + \int_{T_1\cup T_2} f^+ \,\mathrm{d}\nu - \int_{T_1\cup T_2} f^- \,\mathrm{d}\nu.$$

Aus dem bewiesenen Teil folgt nun: $\int_{T_1\cup T_2} f \,\mathrm{d}\nu + \int_{T_1\cap T_2} f \,\mathrm{d}\nu$
$= (\int_{T_1\cap T_2} f^+ \,\mathrm{d}\nu - \int_{T_1\cap T_2} f^- \,\mathrm{d}\nu) + (\int_{T_1\cup T_2} f^+ \,\mathrm{d}\nu - \int_{T_1\cup T_2} f^- \,\mathrm{d}\nu)$
$= \int_{T_1\cap T_2} f^+ \,\mathrm{d}\nu + \int_{T_1\cup T_2} f^+ \,\mathrm{d}\nu - (\int_{T_1\cap T_2} f^+ \,\mathrm{d}\nu + \int_{T_1\cup T_2} f^- \,\mathrm{d}\nu)$
$= \int_{T_1} f^+ \,\mathrm{d}\nu + \int_{T_2} f^+ \,\mathrm{d}\nu - (\int_{T_1} f^+ \,\mathrm{d}\nu + \int_{T_2} f^- \,\mathrm{d}\nu)$
$= (\int_{T_1} f^+ \,\mathrm{d}\nu - \int_{T_1} f^- \,\mathrm{d}\nu) + (\int_{T_2} f^+ \,\mathrm{d}\nu - \int_{T_2} f^- \,\mathrm{d}\nu) = \int_{T_1} f \,\mathrm{d}\nu + \int_{T_2} f \,\mathrm{d}\nu$.

Zu (2). Folgt aus (1) wegen $\int_{T_1\cap T_2} f \,\mathrm{d}\nu = \int_\emptyset f \,\mathrm{d}\nu = \int f \cdot \chi_\emptyset \,\mathrm{d}\nu = 0$. Zur letzten Gleichung beachte, dass $f \cdot \chi_\emptyset$, die konstant auf $0 \in \hat{\mathbb{K}}$ bzw. $0 \in Y$ abbildende Funktion ist. Es folgt daher aus Satz 289 bzw. 305, dass $\int f \cdot \chi_\emptyset \,\mathrm{d}\nu = 0$. ∎

9.12 $\mathcal{L}^p$-Räume

Bedeutung von $\hat{Y}$ Sei $\hat{Y} = Y$ oder $= \overline{\mathbb{R}}$; je nachdem sei $\hat{\mathcal{Y}}$ der top. Raum $\mathcal{Y}$ bzw. $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{O}})$.

Nr. 318 (Def) Potenzen mit Basis ∞

Für $p \in \mathbb{R}^{>0}$ sei $\infty^p := \infty$ und $\infty^{-p} := 0$

Nr. 319 (Satz und Def) $N_{p,\nu}$ für $p \in \mathbb{R}^+$

Sei $p \in \mathbb{R}^+$ und $f \in \mathfrak{M}(\mathcal{X}, \hat{\mathcal{Y}})$ (also streng messbare Funktion von $\mathcal{X}$ in $\hat{\mathcal{Y}}$); gemäß Satz 227 heißt dies im Fall $Y = \hat{\mathbb{K}}$ einfach, dass $f \in \mathcal{M}(\mathcal{X}, \hat{\mathbb{K}})$ ist.
Dann ist $\|f\|^p \in \mathcal{M}^+$ und wir definieren:

$N_{p,\nu}(f) \ := \ (\int \|f\|^p \,\mathrm{d}\nu)^{\frac{1}{p}}$, wofür wir wkM schreiben $N_p(f)$ oder $N(f)$. Es gilt:

1. $N_p(f) \in [0, \infty]$
2. Für $\lambda \in \mathbb{K}$ ist $N_p(\lambda f) = |\lambda| N_p(f)$
3. $\|f\| \in \mathfrak{M}(\mathcal{X}, \hat{\mathbb{R}})$ und $N_p(\|f\|) = N_p(f)$

Beweis. Die Funktion von g: $\hat{\mathcal{Y}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit $\forall\, x \in \hat{\mathbb{K}}\ g(x) := \|x\|^p$ ist offenbar stetig und daher messbar (Satz 235). Nach Satz 237 ist auch die Funktion $g \circ f$ messbar, und das ist unsere Funktion $\|f\|^p$. Als messbare nichtnegative Funktion ist dann also $\|f\|^p \in \mathcal{M}^+(\mathcal{X}, \hat{\mathbb{R}})$.

Zu (1). Nach Satz 269 ist $\int \|f\|^p \,\mathrm{d}\nu \in [0, \infty]$. Für den Fall, dass das Integral $= \infty$ ist, beachte noch $\infty^{\frac{1}{p}} \underset{Def\ 318}{=} \infty$.

Zu (2). Mit f ist auch $\lambda f \in \mathfrak{M}(\mathcal{X}, \hat{\mathcal{Y}})$ (Sätze 250 und 263), also $N_p(\lambda f)$ wohldefiniert, und es gilt für alle $x \in \hat{Y}$, dass $\|\lambda f(x)\|^p = |\lambda|^p \|f(x)\|^p$ (wie man auch im Fall $f(x) = \pm\infty$ leicht überlegt, indem man $\lambda = 0$ und $\lambda \neq 0$ unterscheidet und $0 \cdot \infty = 0$ sowie Def 318 beachtet).

Es folgt $N_p(\lambda f) = (\int \|\lambda f\|^p \,\mathrm{d}\nu)^{\frac{1}{p}} = (\int |\lambda|^p \|f\|^p \,\mathrm{d}\nu)^{\frac{1}{p}} \underset{Satz\ 270}{=} (|\lambda|^p \int \|f\|^p \,\mathrm{d}\nu)^{\frac{1}{p}}$,
und für endliches $\int \|f\| \,\mathrm{d}\nu$ ist $(|\lambda|^p \int \|f\|^p \,\mathrm{d}\nu)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| (\int \|f\|^p \,\mathrm{d}\nu)^{\frac{1}{p}}$; für unendliches $\int \|f\| \,\mathrm{d}\nu$ gilt dies ebenfalls, weil dann beide Seiten entweder $= 0$ oder $= \infty$ sind. Schließlich ist $|\lambda| (\int \|f\|^p \,\mathrm{d}\nu)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| N_p(f)$.

Zu (3). Wir haben am Anfang des Beweises gezeigt, dass $\|f\|^p$ Element von $\mathcal{M}(\mathcal{X}, \hat{\mathbb{R}})$ ist; erst recht gilt dies für $p = 1$, also ist $\|f\| \in \mathcal{M}(\mathcal{X}, \hat{\mathbb{R}}) = \mathfrak{M}(\mathcal{X}, \hat{\mathbb{R}})$ und damit $N_p(\|f\|)$ wohldefiniert. Per Def ist nun $N_p(\|f\|) = (\int \| \|f\| \|^p)^{\frac{1}{p}} = (\int \|f\|^p)^{\frac{1}{p}} \,\mathrm{d}\nu = N_p(f)$. ■

Nr. 320 (Satz und Def) $N_{\infty,\nu}$

Sei $f \in \mathfrak{M}(\mathcal{X}, \hat{\mathcal{Y}})$.

$N_{\infty,\nu}(f) \;:=\; \operatorname{ess\,sup}_{x\in X} \|f(x)\| \;:=\; \inf\{\alpha \in [0,\infty] \,:\, \|f(x)\| \leq \alpha \ \nu\text{-f.ü.}\}$

Dieses Infimum existiert und wird *essentielles Supremum* von f genannt und wkM mit $N_\infty(f)$ oder $N(f)$ bezeichnet. Weiter gilt für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $f, g \in \mathcal{M}(\mathcal{X}, \hat{\mathcal{Y}})$:

1. $N_\infty(f) \in [0,\infty]$ und $\|f(x)\| \leq N_\infty(f)$ ν-f.ü., also
   $N_\infty(f) \in \{\alpha \in [0,\infty] \,:\, \|f(x)\| \leq \alpha \ \nu\text{-f.ü.}\}$ und darum
   $N_\infty(f) = \min\{\alpha \in [0,\infty] \,:\, \|f(x)\| \leq \alpha \ \nu\text{-f.ü.}\}$
2. $N_\infty(\lambda f) = |\lambda| N_\infty(f)$
3. $N_\infty(f+g) \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$.

Beweis. Es ist ∞ stets Element von $\{\alpha \in [0,\infty] \,:\, \|f(x)\| \leq \alpha \ \nu\text{-f.ü.}\}$, also besitzt diese Menge wegen der Vollständigkeit von $\overline{\mathbb{R}}$ ein Element von $\overline{\mathbb{R}}$ als Infimum, also existiert $N_\infty(f)$.

Zu (1). Da 0 untere Schranke der genannten Menge ist, ist $N_\infty(f) \in [0,\infty]$.
Weiter zeigen wir, das $\|f(x)\| \leq N_\infty(f)$ ν-f.ü. Wenn $N_\infty(f) = \infty$, so ist das klar. Sei also $N_\infty(f) < \infty$. Es ist dann für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $N_\infty(f) + \frac{1}{n}$ größer als das Infimum von $\{\alpha \in [0,\infty] \,:\, \|f(x)\| \leq \alpha \ \nu\text{-f.ü.}\}$, so dass es ein α aus dieser Menge gibt mit $\alpha < N_\infty(f) + \frac{1}{n}$. Also gilt $\|f(x)\| \leq \alpha$ ν-f.ü., d. h. $\{x \in X \,:\, \|f(x)\| > \alpha\}$ ist eine ν-Nullmenge, erst recht ist dann $\{x \in X \,:\, \|f(x)\| > N_\infty(f) + \frac{1}{n}\}$ eine ν-Nullmenge (Satz 202), und schließlich ist nach Satz 207(3) dann auch $\bigcup_{n=1}^\infty \{x \in X \,:\, \|f(x)\| > N_\infty(f) + \frac{1}{n}\}$ eine ν-Nullmenge, und das ist die Menge $\{x \in X \,:\, \|f(x)\| > N_\infty(f)\}$.

Zu (2) und (3). Mit f ist auch λf und $f + g \in \mathfrak{M}(\mathcal{X}, \hat{\mathbb{K}})$ (Sätze 250 und 263), also $N_\infty(\lambda f)$ und $N_\infty(f+g)$ wohldefiniert.

Zu (2). Zu zeigen ist die Gleichung

(A) $\;|\lambda| \inf\{\alpha \in [0,\infty] \,:\, \|f(x)\| \leq \alpha \ \nu\text{-f.ü.}\} = \inf\{\alpha \in [0,\infty] \,:\, |\lambda|\|f(x)\| \leq \alpha \ \nu\text{-f.ü.}\}$

was für $\lambda = 0$ klar ist (beide Seiten sind dann 0). Sei also $\lambda \neq 0$. Dann genügt es, zu zeigen, dass die linke Seite von (A) kleinergleich der rechten ist, weil dann auch folgt, dass $\frac{1}{|\lambda|} \inf\{\alpha \in [0,\infty] \,:\, |\lambda|\|f(x)\| \leq \alpha \ \nu\text{-f.ü.}\} \leq \inf\{\alpha \in [0,\infty] \,:\, \frac{1}{|\lambda|}|\lambda|\|f(x)\| \leq \alpha \ \nu\text{-f.ü.}\}$, woraus folgt, dass die linke Seite von (A) größergleich der rechten ist, insgesamt also (A) gilt.

Um nun also zu zeigen, dass die linke Seite s von (A) kleinergleich der rechten ist, ist zu zeigen, dass s die untere Schranke der Menge $M := \{\alpha \in [0,\infty] \,:\, |\lambda|\|f(x)\| \leq \alpha \ \nu\text{-f.ü.}\}$ ist. Wir kürzen ab $i := \inf\{\alpha \in [0,\infty] \,:\, \|f(x)\| \leq \alpha \ \nu\text{-f.ü.}\}$, dann gilt $s = |\lambda| i$. Angenommen s ist nicht untere Schranke von M, so gibt es ein $\alpha \in M$ mit $\alpha < s = |\lambda| i$. Für dieses α gilt $|\lambda| \|f(x)\| \leq \alpha$ ν-f.ü., also $\|f(x)\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\alpha$ ν-f.ü., das aber heißt, dass $\frac{1}{|\lambda|}\alpha \in \{\alpha \in [0,\infty] \,:\, \|f(x)\| \leq \alpha \ \nu\text{-f.ü.}\}$ gilt, also $i \leq \frac{1}{|\lambda|}\alpha$. Dann folgt aber wegen $\alpha < s = |\lambda| i$, dass $i \leq \frac{1}{|\lambda|}\alpha < \frac{1}{|\lambda|} s = i$ (↯). Also ist die Annahme falsch, und i ist untere Schranke von M.

Zu (3). Sei $i_f := \inf \{\alpha \in [0,\infty] \,:\, \|f(x)\| \leq \alpha \ \nu\text{-f.ü.}\}$ und $i_g := \{\alpha \in [0,\infty] \,:\, \|g(x)\| \leq \alpha \ \nu\text{-f.ü.}\}$, und $M := \{\alpha \in [0,\infty] \,:\, |f(x)+g(x)| \leq \alpha \ \nu\text{-f.ü.}\}$, dann ist zu zeigen, dass $\inf M \leq i_f + i_g$. Dazu genügt es, zu zeigen, dass

(B) $\|f(x)+g(x)\| \leq i_f + i_g$ ν-f.ü.

denn das bedeutet $i_f + i_g \in M$, und daher in der Tat $\inf M \leq i_f + i_g$.
Nun gilt nach (1), dass $\|f(x)\| \leq i_f$ ν-f.ü. und $\|g(x)\| \leq i_f$ ν-f.ü.,
das heißt $N_f := \{x \in X \,:\, \|f(x)\| > i_f\}$ und $N_g := \{x \in X \,:\, \|g(x)\| > i_f\}$ sind ν-Nullmengen, also ist nach Satz 207(1) auch $N := N_f \cup N_g$ eine ν-Nullmenge. Nun ist wegen der Dreiecksungleichung $\{x \in X \,:\, \|f(x)+g(x)\| > i_f + i_g\} \subseteq \{x \in X \,:\, \|f(x)\| + \|g(x)\| > i_f + i_g\}$, und diese Menge ist $\subseteq N$ (denn wegen $i_f \geq |f(x) \ \wedge \ i_g \geq \|g(x)\| \ \Rightarrow \ i_f + g_g \geq \|f(x)\| + \|g(x)\|$ ist $\complement N \subseteq \complement\{x \in X \,:\, \|f(x)\| + \|g(x)\| > i_f + i_g\}$). Somit folgt aus Satz 202, dass $\{x \in X \,:\, |f(x)+g(x)| > i_f + i_g\}$ ν-Nullmenge ist, also gilt $|f(x)+g(x)| \leq i_f + i_g$ ν-f.ü. ■

Nr. 321 (Satz) Höldersche Ungleichung

Sei $p, q \in [1,\infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (wobei $\frac{1}{\infty} := 0$). Sei $f, g \in \mathfrak{M}(\mathcal{X}, \hat{\mathbb{K}})$ $(= \mathcal{M}(\mathcal{X}, \hat{\mathbb{K}}))$.

Dann gilt: $N_1(fg) \leq N_p(f) N_q(g)$.

Beweis. Siehe [Els 99, 1.5, S. 222]. ■

Nr. 322 (Satz) Dreiecksungleichung für p-Potenzen

Sei $p \in\,]0,1]$. Dann gilt für $a, b \in \hat{Y}$: $\|a+b\|^p \leq \|a\|^p + \|b\|^p$

Beweis. Wenn $a = \pm\infty$ oder $b = \pm\infty$, ist die rechte Seite $= \infty$, also gilt die Ungleichung trivialerweise. Sei ab jetzt $a, b \neq \infty$.

Dann ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\forall\, x \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ $f(x) = x^p - (x + \|b\|)^p$ in jedem positiven Punkt x differenzierbar mit $f'(x) = px^{p-1} - p(x+\|b\|)^{p-1}$. Dieser Wert ist stets nichtnegativ, dann es gilt $x \leq x + \|b\|$, also (wegen $p - 1 \leq 0$) $x^{p-1} \geq (x+\|b\|)^{p-1}$, also (wegen $p > 0$) auch $px^{p-1} \geq p(x+\|b\|)^{p-1}$, so dass $px^{p-1} - p(x+\|b\|)^{p-1} \geq 0$. Daher folgt, dass f isoton ist, so dass $f(0) \leq f(\|a\|)$ ist, d. h. $-\|b\|^p \leq \|a\|^p - (\|a\| + \|b\|)^p$, also $(\|a\| + \|b\|)^p \leq \|a\|^p + \|b\|^p$. Wegen der gewöhnlichen Dreiecksungleichung und der Isotonie der Potenzierung mit p folgt schließlich $\|a+b\|^p \leq (\|a\| + \|b\|)^p \leq \|a\|^p + \|b\|^p$. ■

Nr. 323 (Satz) Minkowskische Ungleichung

1. *Für $f, g \in \mathfrak{M}(\mathcal{X}, \hat{\mathcal{Y}})$ und $p \in [1, \infty]$ gilt:* $N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g)$
2. *Für $f, g \in \mathfrak{M}(\mathcal{X}, \hat{\mathcal{Y}})$ und $p \in]0,1]$ gilt:* $(N_p(f+g))^p \leq N_p(f)^p + N_p(g)^p$

Beweis. Nach Sätzen 250 und 263 ist zunächst $f+g \in \mathfrak{M}(\mathcal{X}, \hat{\mathcal{Y}})$, also $N_p(f+g)$ wohldefiniert. Für (1) kann nun der Beweis aus [Els 99, 1.8., S. 223] unverändert übernommen werden.
Zu (2). Wegen Satz 322 gilt $\|f+g\|^p \leq \|f\|^p + \|g\|^p$, also folgt nach Satz 266, dass $\int \|f+g\|^p \, \mathrm{d}\nu \leq \int \|f\|^p \, \mathrm{d}\nu + \int \|g\|^p \, \mathrm{d}\nu$, das heißt $N_p(f+g)^p \leq N_p(f)^p + N_p(g)^p$. ■

Nr. 324 (Def) $\mathcal{L}^p$-Räume

$\mathcal{L}^p(\nu, \mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \{f \in \mathfrak{M}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \,:\, N_{p,\nu}(f) < \infty\}$ (wkM steht hierfür: $\mathcal{L}^p(\nu, \mathcal{X})$, $\mathcal{L}^p(\nu)$ oder $\mathcal{L}^p$)

1. Für $p = 1$ ist $\mathcal{L}^p(\nu, \mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \mathcal{L}(\nu, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$, also $= \{f \in \mathrm{Abb}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \,:\, f$ ist ν-integrierbar$\}$.
2. Für $p \in]0, \infty[$ ist $\mathcal{L}^p(\nu, \mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \{f \in \mathfrak{M}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \,:\, \|f\|^p$ ist ν-integrierbar$\}$.
3. Für $p = \infty$ ist $\mathcal{L}^p(\nu, \mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \mathcal{L}^\infty(\nu, \mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \{f \in \mathfrak{M}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \,:\, \operatorname{ess\,sup} \|f(x)\| < \infty\}$.
4. Für $p \in]0, \infty]$ ist $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\nu, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$,
   ausgestattet mit den Einschränkungen der Operationen von $\mathrm{Abb}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$
   ein $\mathbb{K}$-Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.
   Nullvektor ist die Funktion 0_p: $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ mit konstantem Wert 0.

Beweis. Zu (1). Nach Satz 301(3) ist f genau denn ν-integrierbare Funktion von $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$, wenn f streng messbare Funktion von $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ ($\in \mathfrak{M}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$) und $\int \|f\| \, \mathrm{d}\nu < \infty$ ($N_1(f) < \infty$) ist.

Zu (2). Ist $f \in \mathfrak{M}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, so folgt aus Satz 319, dass $\|f\|^p \in \mathcal{M}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$. Unter der Voraussetzung $f \in \mathfrak{M}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ist daher die ν-Integrierbarkeit von $\|f\|^p$ nach Satz 277(3) äquivalent zu $\int \|f\|^p \, \mathrm{d}\nu < \infty$, das ist äquivalent zu $(\int \|f\|^p \, \mathrm{d}\nu)^{\frac{1}{p}} < \infty$, also zu $N_p(f) < \infty$.

Zu (3). Siehe Def 320 von $N_\infty(f)$.

Zu (4). Für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $f, g \in \mathcal{L}^p$ gilt wegen der strengen Messbarkeit von f und g mit Satz 263, dass $f+g$ und λf streng messbar sind; außerdem folgt mit Sätzen 319(2) und 320(2), dass $N_p(\lambda f) = |\lambda| N_p(f) < \infty$, so dass $\lambda f \in \mathcal{L}^p$. Weiter folgt im Fall $p \in [1, \infty]$ mit Satz 323(1), dass $N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g) < \infty$, und sonst mit Satz 323(2), dass $N_p(f+g) \leq (N_p(f)^p + N_p(g)^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$, so dass in jedem Fall $f+g \in \mathcal{L}^p$. Schließlich ist die konstante Funktion $0_p \in \mathcal{L}^p$ (und dann trivialerweise neutrales Element): sie ist nach Satz 228 streng messbar, und $N_p(0_p)$ ist im Fall $p < \infty$ gleich $(\int 0_p \, \mathrm{d}\nu)^{\frac{1}{p}} \underset{\text{Satz 305}}{=} 0^{\frac{1}{p}} = 0 < \infty$, während $N_\infty(0_p) = \inf\{\alpha \in [0, \infty] \,:\, 0 \leq \alpha \ \nu\text{-f.ü.}\} = 0 < \infty$ ist. ■

Nr. 325 (Def) Norm und Metrik von $\mathcal{L}^p$

Für $p \in]0, \infty]$ sei

- $\| \bullet \|_p :=$ die Funktion $\| \bullet \|_p$: $\mathcal{L}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\forall\ f \in \mathcal{L}^p\ \|f\|_p := N_{p,\nu}(f)$
- $d_p(\bullet, \bullet) :=$ die Funktion $d_p(\bullet, \bullet)$: $\mathcal{L}^p \times \mathcal{L}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\forall\ f, g \in \mathcal{L}^p\ d_p(f,g) = \|f - g\|_p$

und für $p \in]0, 1[$ sei

- $d_p(\bullet, \bullet) :=$ die Funktion $d_p(\bullet, \bullet)$: $\mathcal{L}^p \times \mathcal{L}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\forall\ f, g \in \mathcal{L}^p\ d_p(f,g) = \|f - g\|_p^p$

$d_p(\bullet, \bullet)$ heißt *Metrik* von $\mathcal{L}^p$, $\| \bullet \|_p$ heißt im Fall $p \in [1, \infty]$ *Norm* von $\mathcal{L}^p$.
Diese Bezeichnungen erhalten ihre Rechtfertigung durch den nächsten Satz.

Nr. 326 (Satz) Eigenschaften der $\mathcal{L}^p$-Räume

1. *Für $p \in [1, \infty]$ ist die Funktion $\| \bullet \|_p$ eine Halbnorm auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathcal{L}^p(\nu, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$, der mit dieser Halbnorm also ein halbnormierter Vektorraum ist;*
   die Def von $d_p(\bullet, \bullet)$ zeigt dann, dass $d_p(\bullet, \bullet)$ die von $\| \bullet \|$ induzierte Halbmetrik ist
2. *Für $p \in]0, 1[$ ist die Funktion $d_p(\bullet, \bullet)$ eine Halbmetrik auf der Menge $\mathcal{L}^p(\nu, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$*
3. *Für $p \in]0, \infty]$ ist der $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathcal{L}^p(\nu, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$, versehen mit $d_p(\bullet, \bullet)$, ein halbmetrischer Vektorraum (vgl. Def 354) und somit ein topologischer Vektorraum.*

Beweis. Zu (1). Mit Blick auf die Def von $\mathcal{L}^p$ ist $\|f\|_p = N_p(f)$ stets reellwertig; die Homogenität folgt aus Sätzen 319(2) und 320(2), die Dreiecksungleichung aus Satz 323(1).

Zu (2). Mit Blick auf die Def von $\mathcal{L}^p$ ist $d_p(f, g) = \|f - g\|_p^p = N_p(f - g)^p$ stets reellwertig.
Zunächst ist $d_p(f, f) = N_p(f - f)^p = N_p(0_p)^p$, wobei 0_p die konstant auf 0 werfende Funktion von $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ ist. Wie im Beweis von Satz 324(4) gezeigt, ist aber $N_p(0_p) = 0$, also auch $0 = N_p(n)^p = d_p(f, f)$.
Zur Symmetrie: $d_p(f, g) = N_p(f - g)^p = |-1|^p N_p(f - g)^p = (|-1| N_p(f - g))^p \underset{Satz\ 319(2)}{=} N_p((-1)(f - g))^p = N_p(g - f)^p = d_p(g, f)$.
Zur Dreiecksungleichung: $d_p(f, h) = N_p(f - h)^p = N_p((f - g) + (g - h))^p \underset{Satz\ 323}{\leq} N_p(f - g)^p + N_p(g - h)^p = d_p(f, g) + d_p(g, h)$.

Zu (3). Wir müssen nur zeigen, dass ein halbmetrischer $\mathbb{K}$-Vektorraum vorliegt (zur Definition dieses Begriffs siehe Anhang, Def 354), dann liegt mit der induzierten Topologie nach Satz 357 ein topologischer $\mathbb{K}$-Vektorraum vor. Dass nun ein halbmetrischer Vektorraum vorliegt, folgt im Fall $p \in [1, \infty]$ sofort aus (1) in Verbindung mit Satz 357). Im Fall $p \in]1, \infty[$ aber müssen wir wegen (2) mit Blick auf Def 354 nur noch die Translationsinvarianz, Stauchungsbedingung und Konvergenzbedingung nachweisen. Hierzu sein $f, g, h \in \mathcal{L}^p$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| \leq 1$ gegeben.

Zur Translationsinvarianz. Es ist $d_p(f+h, g+h) = \|f + h - (g - h)\|_p^p = \|f - g\|_p^p = d_p(f, g)$.

Zur Stauchungsbedingung: $d_p(f\lambda, 0) = \|f\lambda\|_p^p = \int \|\lambda f\|^p \,\mathrm{d}\nu = \int |\lambda|^p \|f\|^p \,\mathrm{d}\nu = |\lambda|^p \int \|f\|^p \,\mathrm{d}\nu$, und wegen $|\lambda| \leq 1$ folgt $|\lambda|^p \leq 1^p = 1$, also $|\lambda|^p \int \|f\|^p \,\mathrm{d}\nu \leq \int \|f\|^p \,\mathrm{d}\nu = \|f\|_p^p = d_p(f, 0)$.

Zur Konvergenzbedingung. $\lim_{n\to\infty} d_p(\frac{1}{n}f, 0) = \lim_{n\to\infty} \|\frac{1}{n}f\|_p^p = \lim_{n\to\infty}(\int \|\frac{1}{n}f\|^p)^{\frac{1}{p}})^p$
$= \lim_{n\to\infty} \int \|\frac{1}{n}f\|^p = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}^p \int \|f\|^p \,\mathrm{d}\nu = \int \|f\|^p \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n})^p = (\int \|f\|^p)0 = 0.$ ■

Nr. 327 (Satz) Nullsatz für $\mathcal{L}^p$-Räume

Für $p \in \,]0, \infty]$ und $f, g \in \mathcal{L}^p(\nu, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$ gilt:

1. $\|f\|_p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0$ *ν-f.ü.*
2. $d_p(f, g) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = g$ *ν-f.ü.*

Beweis. Zu (1). Zunächst sei $p < \infty$. Dann ist $\|f\|_p = 0$ per Def äquivalent zu $(\int \|f\|^p \,\mathrm{d}\nu)^{\frac{1}{p}} = 0$, dies ist äquivalent zu $\int \|f\|^p \,\mathrm{d}\nu = 0$, denn beide Aussagen setzen $\int \|f\|^p \,\mathrm{d}\nu < \infty$ voraus, und unter dieser Voraussetzung folgt $\Rightarrow$ durch Potenzieren der Gleichung mit p und $\Leftarrow$ durch Potenzieren mit $\frac{1}{p}$. Mit Satz 294 folgt weiter:
$\int \|f\|^p \,\mathrm{d}\nu = 0 \;\Leftrightarrow\; \|f\|^p = 0$ f.ü. $\;\Leftrightarrow\; \|f\| = 0$ f.ü. $\;\Leftrightarrow\; f = 0$ f.ü.

Für $p = \infty$ aber gilt: $\|f\|_\infty = 0$ ist per Def und wegen Satz 320(1) äquivalent dazu, dass das Minimum von $\{\alpha \in [0, \infty] : \|f(x)\| \leq \alpha \;\nu\text{-f.ü.}\}$ gleich 0 ist; dies ist aber äquivalent zu

(A) $0 \in \{\alpha \in [0, \infty] : \|f(x)\| \leq \alpha \;\nu\text{-f.ü.}\}$

(wobei $\Leftarrow$ gilt, weil es in dieser Menge kein Element kleiner als 0 gibt). Weiter ist (A) äquivalent zu $\|f\| = 0$ f.ü., also zu $f = 0$ f.ü.

Zu (2). Im Fall $p \in \,]0, 1[$ gilt $d_p(f, g) = 0 \;\Leftrightarrow\; \|f - g\|_p^p = 0 \;\Leftrightarrow\; \|f - g\|_p = 0$, und im Fall $p \in [1, \infty]$ gilt unmittelbar $d_p(f, g) = 0 \;\Leftrightarrow\; \|f - g\|_p = 0$, in beiden Fällen folgt also aus (1), dass $d_p(f, g) = 0 \;\Leftrightarrow\; \|f - g\|_p = 0 \;\Leftrightarrow\; f - g = 0 \;\nu$-f.ü. $\;\Leftrightarrow\; f = g \;\nu$-f.ü. ■

Nr. 328 (Satz und Def) Die Vektorräume $\mathcal{N}^p$ und $\mathcal{L}^p/\mathcal{N}^p$

Für $p \in]0,\infty]$ sei $N^p(\nu,\mathcal{X},\mathcal{Y}) := \{f \in \mathcal{L}^p : d_p(f,0_p) = 0\}$. Dann zeigt Satz 327, dass
für $p \in [1,\infty]$ $N^p(\nu,\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \{f \in \mathcal{L}^p : \|f\|_p = 0\}$
Für $\mathcal{N}^p(\nu,\mathcal{X},\mathcal{Y})$ steht wkM kurz $\mathcal{N}^p(\nu,\mathcal{X})$ oder $\mathcal{N}^p(\nu)$ oder $\mathcal{N}^p$.

Aus Satz 327 folgt sofort, dass $\mathcal{N}^p$ Untervektorraum von $\mathcal{L}^p$ ist,
und somit existiert auch der Quotientenvektorraum $\mathcal{L}^p/\mathcal{N}^p$. Es gilt:

1. $N^p = \{f \in \mathfrak{M}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) : f(x) = 0\ \nu\text{ -f.ü.}\}$
2. Für die Elemente von $\mathcal{L}^p/\mathcal{N}^p$, also die Nebenklassen $N^p + f$ mit $f \in \mathcal{L}^p$ gilt:
   Funktionen $f, g \in \mathcal{L}^p$ liegen genau dann in derselben Nebenklasse, wenn $f = g$ f.ü.
3. Gehören f, f' zur selben Nebenklasse F und g, g' zur selben Nebenklasse G, so gilt
   $\|f\|_p = \|f'\|_p$ sowie $d_p(f,g) = d_p(f',g')$

Aufgrund von (3) können wir für Elemente F, G von $\mathcal{L}^p/\mathcal{N}^p$ definieren: $|||F|||_p := \|f\|_p$ sowie $D_p(F,G) := d_p(f,g)$, wobei f beliebiges Element von F und g beliebiges Element von G ist; WkM schreiben wir $|||\,|||_p$ wieder $\|\,\|_p$ und für D_p wieder d_p. — Es gilt nun:

4. Für $p \in [1,\infty]$ ist $D_p(F,G) = |||F-G|||_p$, und für $p \in]0,1[$ ist $D_p(F,G) = |||F-G|||_p^p$

Beweis. Zu (1). Wegen Satz 327(2) gilt für $f \in \mathcal{L}^p$: $f = 0_p$ f.ü. $\Leftrightarrow d_p(f,0_p) = 0$.
Also ist $\mathcal{N}^p = \{f \in \mathcal{L}^p : f(x) = 0 \text{ f.ü.}\}$. Es bleibt zu zeigen, dass
$\{f \in \mathcal{L}^p : f(x) = 0 \text{ f.ü.}\} = \{f \in \mathfrak{M}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) : f(x) = 0 \text{ f.ü.}\}$.

$\supseteq$. Zu zeigen ist, dass jedes $f \in \{f \in \mathfrak{M}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) : f = 0_p \text{ f.ü.}\}$ Element von $\mathcal{L}^p$ ist.
Im Fall $p < \infty$ gilt wegen $f = 0_p$ f.ü. auch $\|f\|^p = 0_p$ f.ü., wobei $\|f\|^p$ nach Satz 319 Element von $\mathcal{M}^+$ ist. Es folgt also aus Satz 294, dass $\int \|f\|^p \,\mathrm{d}\nu = 0 < \infty$, erst recht $N_p(f) < \infty$, also $f \in \mathcal{L}^p$.
Im Fall $p = \infty$ folgt aus $f = 0_p$ f.ü., sofort, dass $0 = \min\{\alpha \in [0,\infty] : \|f(x)\| \leq \alpha\ \nu\text{-f.ü.}\}$ und daher $N_\infty(f) = 0 < \infty$, also wieder $f \in \mathcal{L}^p$.
$\subseteq$. Dies ist trivial, da Elemente von $\mathcal{L}^p$ per Def auch solche von $\mathfrak{M}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ sind.

Zu (2). Seien f, g Elemente derselben Nebenklasse, die Nebenklasse $f + \mathcal{N}$ von f ist auch jene von g, also $g \in f + \mathcal{N}$, also $g = f + n$ mit $n(x) = 0\ \nu$-f.ü. Dann folgt aber $g(x) = f(x)\ \nu$-f.ü. Sei umgekehrt $f(x) = g(x)\ \nu$-f.ü., und N die ν-Nullmenge $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$. Dann sei n die Funktion n: $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ mit $\forall\, x \in N\ n(x) = g(x) - f(x)$ und $\forall\, x \in X \setminus N\ n(x) = 0$, dann gilt $n = 0_p$ f.ü. und $f = g + n$. Außerdem folgt aus Satz 232, dass n streng messbar ist.[1] Somit ist $n \in \mathcal{N}^p$, so dass f, g zur selben Nebenklasse gehören.

[1] n ist aus der konstanten Funktion $0_p|N$ und der Funktion $f - g|M$ mit $M := X \setminus N$ zusammengesetzt. Nun ist $O_p|N$ gemäß Satz 228 streng messbar, und $f - g|M$ ist nach Satz 263 und Satz 231 ebenfalls streng messbar. Somit kann Satz 232 angewendet werden.

Zu (3). Wegen (2) ist $f = f'$ ν-f.ü., also auch $\|f\|^p = \|f'\|^p$ ν-f.ü., wobei $\|f\|^p$ und $\|f'\|^p$ nach Satz 324(2) ν-integrierbar, erst recht ν-quasiintegrierbar sind, so dass nach Satz 295(2) folgt $\int \|f\|^p \,\mathrm{d}\nu = \int \|f'\|^p \,\mathrm{d}\nu$. Somit folgt für den Fall $p \in]0,\infty[$, dass $\|f\|_p = \|f'\|_p$.

Außerdem folgt für alle $\alpha \in [0,\infty]$ $\|f\| \leq \alpha$ ν-f.ü. $\Leftrightarrow$ $\|f'\| \leq \alpha$ ν-f.ü.

Daraus folgt $\|f\|_\infty = \|f'\|_\infty$. Insgesamt gilt also für alle $p \in]0,\infty]$: $\|f\|_p = \|f'\|_p$.

Weiter liegen $f - g$ und $f' - g'$ in derselben Nebenklasse $F - G$, für den Fall $p \in [1,\infty]$ folgt also aus dem eben Gezeigten $\|f - g\|_p = \|f' - g'\|_p$ und dann auch $\|f - g\|_p^p = \|f' - g'\|_p^p$, also in jedem Fall $d_p(f,g) = d_p(f',g')$.

Zu (4). Für $p \in [1,\infty]$ gilt $D_p(F,G) = d_p(f,g) = \|f - g\|_p = |||F - G|||_p$. Für $p \in]0,1[$ gilt $D_p(F,G) = d_p(f,g) = \|f - g\|_p^p = |||F - G|||_p^p$. ■

Nr. 329 (Satz und Def) L^p-Räume

Für $p \in]0,\infty]$ sei $L^p(\nu,\mathcal{X},\mathcal{Y})$ der Vektorraum $\mathcal{L}^p/\mathcal{N}^p$, ausgestattet mit der Funktion $D_p(\bullet,\bullet)$ (wkM mit $d_p(\bullet,\bullet)$ bezeichnet). Das ist ebenso wie $\mathcal{L}^p$ ein halbmetrischer Vektorraum (insbesondere topologischer Vektorraum), in dem aber positive Definitheit gilt, so dass sogar ein metrischer Vektorraum vorliegt. WkM bezeichnen wir $L^p(\nu,\mathcal{X},\mathcal{Y})$ mit $L^p(\nu)$ oder L^p.

Für $p \in]0,1[$ können wir $\mathcal{L}^p/\mathcal{N}^p$ auch mit $|||\bullet|||_p$ (wkM mit $\|\bullet\|_p$ bezeichnet) ausstatten und erhalten dann einen normierten Vektorraum, der den metrischen Vektorraum L^p induziert. Wir können also L^p für $p \in]1,0[$ sowohl als normierten wie auch als metrischen Vektorraum auffassen.

Beweis. trivial. ■

Nr. 330 (Satz) Satz von Riesz-Fischer oder Vollständigkeit der $\mathcal{L}^p$ und L^p-Räume

Für $p \in]0,\infty]$ sind die $\mathcal{L}^p$-Räume sowie die L^p-Räume vollständig.
Als Korollar folgt unmittelbar:

1. *Für $p \in]0,\infty]$ ist $\mathcal{L}^p$ vollständiger halbmetrischer Raum, während L^p vollständiger metrischer Raum ist.*
2. *Für $p \in [1,\infty]$ ist $\mathcal{L}^p$ vollständiger halbnormierter Raum, während L^p vollständiger normierter Vektorraum, Banachraum ist.*

Beweis. Der Beweis von [Els 99, Satz 2.5., S. 230], der den Satz von Riesz-Fischer für den Fall $\mathcal{Y} = \mathbb{K}$ ausspricht, kann übernommen werden, sofern der Betrag als Norm interpretiert und der Begriff der Messbarkeit durch den der strengen Messbarkeit ersetzt wird. ■

10 Das Lebesgue-Integral

10.1 Das Maß einer Maßkette

Nr. 331 (Def) $\mathfrak{I}_{\mathbb{T}}$

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette.

$\mathfrak{I}_{\mathbb{T}} := \{[a, b[\ : \ a, b \in \mathbb{T} \wedge a \leq b\} \cup M$, wobei $M := \begin{cases} \emptyset & \text{falls } \mathbb{T} \text{ kein Maximum besitzt} \\ \{\max \mathbb{T}\} & \text{sonst} \end{cases}$

Bem. Im Fall $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ist $M = \emptyset$, und die Definition von $\mathfrak{I}_{\mathbb{T}}$
stimmt dann mit der früher gegebenen Definition von $\mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$ (Def 184) überein.

Nr. 332 (Satz) $\mathfrak{I}_{\mathbb{T}}$ als Halbring über der nichtleeren Maßkette $\mathbb{T}$

Für nichtleere Maßketten $\mathbb{T}$ ist $\mathfrak{I}_{\mathbb{T}}$ ein Halbring über $\mathbb{T}$.

Beweis. Es müssen die drei Axiome des Halbringes (Def 182) nachgewiesen werden.
Zum Leermengenaxiom. Wegen $\mathbb{T} \neq \emptyset$ sei $a \in \mathbb{T}$. Dann ist $[a, a[= \emptyset \in \mathfrak{I}_{\mathbb{T}}$.
Zur Durchschnitts-Stabilität. Für $a \leq b, c \leq d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{T}$ ist
$[a, b[\cap [c, d] = [\max\{a, c\}, \min\{b, d\}[$,
das ist trivialerweise $\in \mathfrak{I}_{\mathbb{T}}$, wenn $\max\{a, c\} \leq \min\{b, d\}$, und ansonsten ist es $= \emptyset \in \mathfrak{I}_{\mathbb{T}}$.
Existiert $\max \mathbb{T}$, so ist außerdem $\{\max \mathbb{T}\} \cap \{\max \mathbb{T}\} = \{\max \mathbb{T}\} \in \mathfrak{I}_{\mathbb{T}}$ und $\{\max \mathbb{T}\} \cap [a, b[= \emptyset \in \mathfrak{I}_{\mathbb{T}}$.
Zum Differenzaxiom. Sei wieder $a \leq b, c \leq d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{T}$ gegeben. Dann ist $[a, b] \setminus [c, d]$ disjunkte Vereinigung von Elementen von $\mathfrak{I}_{\mathbb{T}}$, was ganz entsprechend bewiesen wird wie das Differenzaxiom in Satz 184.
Existiert schließlich $\max \mathbb{T}$, so ist außerdem $[a, b[\setminus \{\max \mathbb{T}\}$ bzw. $\{\max \mathbb{T}\} \setminus [a, b[$ bzw. $\{\max \mathbb{T}\} \setminus \{\max \mathbb{T}\}$ jeweils ein Element von $\mathfrak{I}_{\mathbb{T}}$ (nämlich $[a, b[$ bzw. $\{\max \mathbb{T}\}$ bzw. $\emptyset$) und somit ebenfalls eine disjunkte Vereinigungen von Elementen von $\mathfrak{I}_{\mathbb{T}}$. ■

Da Maßketten $\mathbb{T}$ mit der Ordnungstopologie einen topologischen Raum bilden, existiert die Menge der $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}_{\mathbb{T}}$ der Borelmengen von $\mathbb{T}$, das ist nach Def 189 die von der Menge $\mathfrak{O}$ der offenen Mengen von $\mathbb{T}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma_{\mathbb{T}}(\mathfrak{O})$. Der folgenden Satz nennt einige der Erzeuger der Menge $\mathfrak{B}$ der Borelmengen von $\mathbb{T}$:

Nr. 333 (Satz) Verschiedene Erzeuger der Borelmengen auf einer nichtleeren Maßkette $\mathbb{T}$

Sei $\mathbb{T}$ nichtleere Maßkette. Dann sind folgende Mengensysteme Erzeuger von $\mathfrak{B}_{\mathbb{T}}$:

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{O}_{\mathbb{T}} & := & \{U \subseteq \mathbb{T} : U \textit{ ist offen}\} \\
\mathfrak{C}_{\mathbb{T}} & := & \{U \subseteq \mathbb{T} : U \textit{ ist geschlossen}\} \\
\mathfrak{K}_{\mathbb{T}} & := & \{U \subseteq \mathbb{T} : U \textit{ ist kompakt}\} \\
\mathfrak{I}_{[\mathbb{T}]} & := & \{[a,b] : a,b \in \mathbb{T} \ \wedge \ a \leq b\} \cup \{\emptyset\} \\
\mathfrak{I}_{\mathbb{T}} := \mathfrak{I}_{[\mathbb{T}[} & := & \{[a,b[\ : a,b \in \mathbb{T} \ \wedge \ a \leq b\} \cup M, \\
\textit{wobei } M & := & \begin{cases} \emptyset & \textit{falls } \mathbb{T} \textit{ kein Maximum besitzt} \\ \{\max \mathbb{T}\} & \textit{sonst} \end{cases} \\
\mathfrak{F}_{\mathbb{T}} & := & \{\bigcup_{k=1}^{n} A_k : n \in \mathbb{N} \ \wedge A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{I}_{\mathbb{T}} \textit{ disjunkt}\}
\end{array}$$

Beweis. $\mathfrak{B} = \sigma(\mathfrak{O}) = \sigma(\mathfrak{C}) = \sigma(\mathfrak{K})$ folgt aus Satz 191, denn $\mathbb{T}$ ist ja Hausdorffraum (Satz 27) sowie ein K_σ-Raum (Satz 74(1)).

$\boxed{\sigma(\mathfrak{I}_{[\mathbb{T}]}) = \sigma(\mathfrak{O})}$. Nach Satz 79 gibt es eine Submaßkette $\mathbb{D}$ von $\mathbb{R}$, so dass $\mathbb{T}$ und $\mathbb{D}$ isomorph sind; sei f: $\mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{D}$ ein entsprechender Maßketten-Isomorphismus. Ist nun $\mathfrak{A}$ beliebige Teilmenge von $\mathfrak{P}(\mathbb{T})$, so gilt:

(A) $\sigma_{\mathbb{T}}(\mathfrak{A}) = f^{-1}[\![\sigma_{\mathbb{D}}(f[\![A]\!])]\!]$

Da nämlich f^{-1}: $\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{T}$ gilt, folgt aus Satz 194, dass $\sigma_{\mathbb{D}}(f[\![\mathfrak{A}]\!]) = f[\![\sigma_{\mathbb{T}}(\mathfrak{A})]\!]$ und (A) folgt durch Anwendung von f^{-1} auf beide Seiten dieser Gleichung.

Mit Blick auf die Isotonie des Isomorphismus f ist nun $f[\![\mathfrak{I}_{[\mathbb{T}]}]\!] = \mathfrak{I}_{[\mathbb{D}]}$, was trivialerweise $= \mathfrak{I}_{[\mathbb{R}]} \Cap D$ ist. Dann ist aber
$\sigma_{\mathbb{D}}(f[\![\mathfrak{I}_{[\mathbb{T}]}]\!]) = \sigma_{\mathbb{D}}(\mathfrak{I}_{[\mathbb{R}]} \Cap D) \underset{\textit{Satz } 195}{=} \sigma_{\mathbb{R}}(\mathfrak{I}_{[\mathbb{R}]}) \Cap D \underset{\textit{Satz } 193}{=} \sigma_{\mathbb{R}}(\mathfrak{O}_{\mathbb{R}}) \Cap D \underset{\textit{Satz } 195}{=} \sigma_{\mathbb{D}}(\mathfrak{O}_{\mathbb{R}} \Cap D)$.
Nun ist $\mathfrak{O}_{\mathbb{R}} \Cap D$ die Menge der $\mathbb{D}$-offenen Mengen $\mathfrak{O}_{\mathbb{D}}$, also insgesamt
$\sigma_{\mathbb{D}}(f[\![\mathfrak{I}_{[\mathbb{T}]}]\!]) = \sigma_{\mathbb{D}}(\mathfrak{O}_{\mathbb{D}})$.

Weiter folgt nun $f^{-1}[\![\sigma_{\mathbb{D}}(f[\![\mathfrak{I}_{[\mathbb{T}]}]\!])]\!] = f^{-1}[\![\sigma_{\mathbb{D}}(\mathfrak{O}_{\mathbb{D}})]\!] \underset{\textit{Satz } 194}{=} \sigma_{\mathbb{T}}(f^{-1}[\![\mathfrak{O}_{\mathbb{D}}]\!])$. Da f als Maßketten-Isomorphismus f zugleich Homöomorphismus von $\mathbb{T}$ in $\mathbb{D}$ ist (Satz 77), ist aber $f^{-1}[\![\mathfrak{O}_{\mathbb{D}}]\!] = \mathfrak{O}_{\mathbb{T}}$. Somit ist schließlich $f^{-1}[\![\sigma_{\mathbb{D}}(f[\![\mathfrak{I}_{[\mathbb{T}]}]\!])]\!] = \sigma_{\mathbb{T}}(\mathfrak{O}_{\mathbb{T}})$. Insgesamt können wir Gleichung (A), wenn wir für $\mathfrak{A}$ die Menge $\mathfrak{I}_{\mathbb{T}}$ einsetzen, umformen zu: $\sigma_{\mathbb{T}}(\mathfrak{I}_{[\mathbb{T}]}) = \sigma_{\mathbb{T}}(\mathfrak{O}_{\mathbb{T}})$.

$\boxed{\sigma(\mathfrak{I}_{\mathbb{T}}) = \sigma(\mathfrak{I}_{[\mathbb{T}]})}$. $\subseteq$. Für jedes Intervall $[a,b[\ \in \mathfrak{I}_{\mathbb{T}}$ gilt $[a,b[\ = [a,b] \setminus [a,a] \in \sigma(\mathfrak{I}_{[\mathbb{T}]})$. Falls $\max \mathbb{T}$ existiert, ist außerdem $\{\max \mathbb{T}\}$ nach Sätzen 192 und 27 Borelmenge, also $\in \mathfrak{B} = \sigma(\mathfrak{I}_{[\mathbb{T}]})$. Somit ist $\mathfrak{I}_{\mathbb{T}} \subseteq \sigma(\mathfrak{I}_{[\mathbb{T}]})$, also auch $\sigma(\mathfrak{I}_{\mathbb{T}}) \subseteq \sigma(\mathfrak{I}_{[\mathbb{T}]})$.

$\supseteq$. Wenn wir zeigen, dass $\mathfrak{I}_{[\mathbb{T}]} \subseteq \sigma(\mathfrak{I})$, folgt $\sigma(\mathfrak{I}_{[\mathbb{T}]}) \subseteq \sigma(\mathfrak{I})$, und wir sind fertig. Um nun $\mathfrak{I}_{[\mathbb{T}]} \subseteq \sigma(\mathfrak{I})$ zu beweisen, genügt es, für jedes $t \in \mathbb{T}$ zu zeigen dass $\{t\} \in \sigma(\mathfrak{I}_{\mathbb{T}})$: dann folgt nämlich sowohl $[a,b] = [a,b[\cup \{b\} \in \sigma(\mathfrak{I}_{\mathbb{T}})$ als auch $\{\max \mathbb{T}\} \in \sigma(\mathfrak{I}_{\mathbb{T}})$, falls $\max \mathbb{T}$ existiert.

Sei also $t \in \mathbb{T}$. Wenn $t = \max \mathbb{T}$, ist per Def sofort $\{t\} \in \mathfrak{I}_{\mathbb{T}} \subseteq \sigma(\mathfrak{I}_{\mathbb{T}})$. Wir können also annehmen, dass es ein $s \in \mathbb{T}$ gibt mit $t < s$. Ist t rechts-zerstreut, so ist $\{t\} = [t, \sigma(t)[\in \mathfrak{I}_{\mathbb{T}} \subseteq \sigma(\mathfrak{I}_{\mathbb{T}})$. Ist aber t rechts-dicht, so ist t Berührungspunkt von $]t, s]$, d. h. es gibt in jeder Umgebung von t einen Punkt aus $]t, s]$. Da $\mathbb{T}$ metrisierbar ist, ist t als Berührungspunkt dadurch charakterisiert, dass es eine Folge (s_n) in $]t, s]$ gibt, die gegen t konvergiert. Dann ist aber $\{t\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [t, s_n[\in \sigma(\mathfrak{I}_{\mathbb{T}})$.

$\boxed{\sigma(\mathfrak{I}_{\mathbb{T}}) = \sigma(\mathfrak{F}_{\mathbb{T}})}$. Da $\mathfrak{I}_{\mathbb{T}}$ Halbring über $\mathbb{T}$ ist (Satz 332), folgt aus Satz 188, dass $\rho(\mathfrak{I}_{\mathbb{T}}) = \mathfrak{F}_{\mathbb{T}}$, und daher aus Satz 187, Zusatz 2, dass $\sigma(\mathfrak{I}_{\mathbb{T}}) = \sigma(\rho(\mathfrak{I}_{\mathbb{T}})) = \sigma(\mathfrak{F}_{\mathbb{T}})$. ■

Nr. 334 (Satz und Def) lebesgue-stieltjesscher und lebesguescher Inhalt über $\mathbb{R}$

Sei $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ isoton, zum Beispiel $F = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Dann ist durch
$\nu_{(\mathbb{R},F)}\colon \mathfrak{I}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ \nu_{(\mathbb{R},F)}([a, b[) := F(b) - F(a)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$
ein σ-endlicher Inhalt auf dem Halbring $\mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$ über $\mathbb{R}$ definiert.

$\nu_{(\mathbb{R},F)}$ heißt der *lebesgue-stieltjessche Inhalt* über $\mathbb{R}$ bezüglich F.
$\nu_{\mathbb{R}} := \nu_{(\mathbb{R},\mathrm{id}_{\mathbb{R}})}$ heißt der *lebesguesche Inhalt* oder schlechthin *Inhalt* über $\mathbb{R}$.

Beweis. Siehe [Els 99, Satz 2.1(a), S. 37]. ■

Nr. 335 (Satz und Def) lebesguescher Inhalt $\nu_{\mathbb{T}}$ über einer nichtleeren Maßkette $\mathbb{T}$

Sei $\mathbb{T}$ nichtleere Maßkette mit Wachstumseichung μ. Dann ist durch

$$\nu_{\mathbb{T}}\colon \mathfrak{I}_{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ \forall\, A \in \mathfrak{I}_{\mathbb{T}}\ \ \nu(A) = \begin{cases} \mu(t, s) & \text{falls } A = [s, t[\text{ mit } s, t \in \mathbb{T} \text{ und } s \leq t \\ 0 & \text{falls } \max \mathbb{T} \text{ existiert und } A = \{\max \mathbb{T}\} \end{cases}$$

ein σ-endlicher Inhalt $\nu_{\mathbb{T}}$ auf $\mathfrak{I}_{\mathbb{T}}$ über $\mathbb{T}$ definiert,
der im Standardfall $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ mit dem lebesgueschen Inhalt übereinstimmt.

Wegen der Übereinstimmung dieses Inhalts mit dem lebesgueschen Inhalt im Fall der Standardmaßkette soll $\nu_{\mathbb{T}}$ auch im allgemeinen Fall der *lebesguesche Inhalt* über der Maßkette heißen. Wir nennen ihn auch kurz den *Inhalt* über $\mathbb{T}$ schlechthin.

Beweis. Zunächst zur Wohldefiniertheit von ν. Wenn $[s, t[= [u, v[$, so ist zu zeigen, dass $\mu(t, s) = \mu(v, u)$. Zunächst ist im Fall $s < t$ die Menge $M := [s, t[= [u, v[$ nichtleer, und es ist $s = \min M = u$ und $t = \sup M = v$, also $\mu(t, s) = \mu(v, u)$. Im Fall $s = t$ aber ist $M = \emptyset$, und dann muss auch $u = v$ sein. Also ist dann $\mu(t, s) = \mu(t, t) = 0 = \mu(v, v) = \mu(v, u)$.

Zur Additivität. Sei $(A_i)_{i\in I}$ disjunkte endliche Folge in $\mathfrak{I}_\mathbb{T}$ mit $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathfrak{I}_\mathbb{T}$.
Sei zunächst $I = \emptyset$. Mit einem $t \in \mathbb{T}$ (nach Voraussetzung ist $\mathbb{T} \neq \emptyset$) ist dann $\nu(\bigcup_{i\in I} A_i) = \nu(\emptyset) = \nu([t,t[) = \mu(t,t) = 0 = \sum_{i\in I} \nu(A_i)$.
Ist $I \neq \emptyset$, so können wir durch Umindizieren erreichen dass $I = \{1,\dots,n\}$ mit $n \in \mathbb{N}^\odot$. Dann sind $A_1,\dots,A_n$ disjunkte Elemente von $\mathfrak{I}_\mathbb{T}$ mit $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{I}_\mathbb{T}$. Dann gibt es zwei Fälle:

- $\max \mathbb{T}$ existiert und $\{\max \mathbb{T}\}$ ist eines der Elemente A_i
- alle A_i sind Intervalle $[a,b[$ mit $a,b \in \mathbb{T}$, $a \leq b$

Im ersten Fall ist $\max \mathbb{T} \in \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{I}_\mathbb{T}$, da aber das einzige Element von $\mathfrak{I}_\mathbb{T}$, was $\max \mathbb{T}$ enthalten kann, $\{\max \mathbb{T}\}$ ist, folgt $\bigcup_{i=1}^n A_i = \{\max \mathbb{T}\}$. Wegen der Disjunktheit der A_i ist dann für genau ein $i_0 \in I$ wahr, dass $A_{i_0} = \{\max \mathbb{T}\}$, während die übrigen A_j (mit $j \neq i$) gleich $\emptyset$ sind. Es ist dann $\nu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \nu(A_{i_0}) = \nu(\{\max \mathbb{T}\}) = 0 = \nu(A_{i_0}) = \sum_{i=1}^n \nu(A_i)$.
Im zweiten Fall können wir (nötigenfalls durch Vertauschen der Bezeichnungen der Mengen A_n) erreichen, dass es Elemente $a, a_0, a_1, \dots, a_n, b$ mit $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b$ gibt, so dass gilt: $\forall\ i \in \{1,\dots,n\}\ A_i = [a_{n-1}, a_n[$. Es ist dann $\nu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \nu([a,b[) = \mu(b,a)$, das ist per Kozyklus-Eigenschaft $= \sum_{i=1}^n \mu(a_i, a_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \nu([a_{i-1} a_i[) = \sum_{i=1}^n \nu(A_i)$.
Somit ist gezeigt, dass ν additiv, also ein Inhalt auf dem Halbring $\mathfrak{I}_\mathbb{T}$ ist.

Zur σ-Endlichkeit. Gemäß Def 206 ist zu zeigen, dass $\mathbb{T}$ abzählbare Vereinigung von Mengen auf $\mathfrak{I}_\mathbb{T}$ ist, deren Maß endlich ist. Nach Satz 74(3) ist jede Maßkette $\mathbb{T}$ Vereinigung abzählbar vieler kompakter Intervalle, von denen je zwei verschiedene höchstens einen Punkt gemeinsam haben, der dann gemeinsamer Grenzpunkt dieser beiden Intervalle ist. Ersetzen wir diese Intervalle $[a,b]$ durch $[a,b[$, und fügen, falls $\max \mathbb{T}$ existiert, noch $\{\max \mathbb{T}\}$ hinzu, so erhalten wir abzählbar viele Mengen aus $\mathfrak{I}_\mathbb{T}$, deren Vereinigung $\mathbb{T}$ ergibt. Außerdem nimmt ν für Elemente von $\mathfrak{I}_\mathbb{T}$ trivialerweise immer endliche Werte an.

Zur Übereinstimmung mit dem (gemäß Def 334 festgelegten) lebesgueschen Inhalt im Falle $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. Für $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ ist der lebesguesche Inhalt des Intervalls $[a,b[$ gemäß Def 334 gleich $\mathrm{id}_\mathbb{R}(b) - \mathrm{id}_\mathbb{R}(a) = b - a$ und gemäß Def 335 gleich $\mu_\mathbb{R}(b,a) = b - a$. ■

Das weitere Vorgehen Um nun den Fortsetzungssatz (Satz 221) auf den lebesgueschen Inhalt einer Maßkette anwenden zu können, müssen wir zeigen, dass dieser ein σ-endliches Prämaß ist. Wir gehen von dem bekannten Satz aus, dass dies für die Standardmaßkette $\mathbb{R}$ gilt, und zeigen zunächst, dass auch die Inhalte aller nichtleeren Submaßketten von $\mathbb{R}$ σ-endliche Prämaße sind. Anschließend weiten wir das Ergebnis auf beliebige nichtleere Maßketten $\mathbb{T}$ aus.

Nr. 336 (Satz) Der lebesguesche Inhalt über $\mathbb{R}$ als Prämaß

Alle lebesgue-stieltjesschen Inhalte $\nu_{(\mathbb{R},F)}$ mit linksseitig stetigem F sind σ-endliche Prämaße über $\mathbb{R}$.
Insbesondere ist der lebesguesche Inhalt $\nu_\mathbb{R}$ ein σ-endliches Prämaß über $\mathbb{R}$.

Beweis. Siehe [Els 99, Satz 2.2, S. 38-39]. ■

Nr. 337 (Satz) Der Inhalt über einer nichtleeren Submaßkette von $\mathbb{R}$ als Prämaß

Der lebesguesche Inhalt $\nu_{\mathbb{T}}$ einer Submaßkette $\mathbb{T} \neq \emptyset$ von $\mathbb{R}$ ist σ-endliches Prämaß.

Beweis. Die σ-Endlichkeit wurde in Satz 335 bewiesen. Zu zeigen ist, dass ein Prämaß vorliegt. Sei $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_{[\mathbb{T}[}$ und $\mathfrak{I}^* := \mathfrak{I}_{[\mathbb{R}[}$. Sei $\nu^* = \nu_{\mathbb{R}}$ der lebesguesche Inhalt von $\mathbb{R}$ und $\nu := \nu_{\mathbb{T}}$ der von $\mathbb{T}$. Sei nun $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine disjunkte Familie von Elementen von $\mathfrak{I}$ mit $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{I}$.

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei dann $A_i^* := \{x \in \mathbb{R} : \exists\, a, b \in A_i \; a \leq x \leq b\}$. Falls A_i linkshalboffenes Intervall $[a, b[_{\mathbb{T}} := \{x \in \mathbb{T} : a \leq x < b\}$ in $\mathbb{T}$ mit $a, b \in \mathbb{T}$ und $a \leq b$ ist, so ist A_i^* das linkshalboffene Intervall $[a, b[_{\mathbb{R}} := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ mit denselben Grenzen wie A_i und daher mit $\nu^*(A_i) = \nu(A_i)$. Falls $A_i = \{\max \mathbb{T}\}$ ist, so ist A_i^* ebenfalls $= \{\max \mathbb{T}\}$. In jedem Fall ist $(A_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ disjunkte Familie von Elementen von $\mathfrak{I}^* \cup M$, wobei $M := \begin{cases} \emptyset & \text{falls } \mathbb{T} \text{ kein Maximum besitzt} \\ \{\max \mathbb{T}\} & \text{sonst} \end{cases}$
Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

Erster Fall: $\mathbb{T}$ besitzt ein Maximum und $\max \mathbb{T} \in \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$. Da $\{\max \mathbb{T}\}$ das einzige Element von $\mathfrak{I}$ ist, dass $\max \mathbb{T}$ enthält, gilt dann $\{\max \mathbb{T}\} = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$. Wegen der Disjunktheit gilt dann für genau ein $i_0 \in \mathbb{N}$, dass $A_{i_0} = \{\max \mathbb{T}\}$, während für alle $j \in I$ mit $j \neq i_0$ gelten muss: $A_j = \emptyset$. Es folgt $\nu(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i) = \nu(\{\max \mathbb{T}\}) = 0$, und auch $\sum_{i=0}^{\infty} \nu(A_i) = \nu(A_{i_0}) = 0$.

Zweiter Fall: $\mathbb{T}$ besitzt kein Maximum oder $\max \mathbb{T} \notin \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Dann ist keines der A_i mit $\{\max T\}$ identisch; also gilt für alle $i \in \mathbb{N}$, dass A_i und A_i^* linkshalboffene Intervalle sind mit $\nu(A_i) = \nu^*(A_i)$. Weiter ist dann $(A_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ eine disjunkte Familie von Elementen von $\mathfrak{I}^*$. Schließlich ist $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ dann nicht mit $\{\max \mathbb{T}\}$ identisch, und ist somit gleich einem linkshalboffenen Intervall $[a, b[_{\mathbb{T}} := \{x \in \mathbb{T} : a \leq x < b\}$. Es folgt $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i^* = [a, b[_{\mathbb{R}} := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \in \mathfrak{I}^*$. Da ν^* als Prämaß σ-additiv ist, folgt also $\nu^*(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i^*) = \sum_{i=0}^{\infty} \nu^*(A_i)$, so dass insgesamt: $\nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \nu([a, b[_{\mathbb{T}}) = b - a = \nu^*([a, b[_{\mathbb{R}}) = \nu^*(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i^*) = \sum_{i=0}^{\infty} \nu^*(A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \nu(A_i)$. ■

Nr. 338 (Satz) Der Inhalt über einer beliebigen nichtleeren Maßkette als Prämaß

Der lebesguesche Inhalt $\nu_{\mathbb{T}}$ einer Maßkette $\mathbb{T} \neq \emptyset$ ist σ-endliches Prämaß.

Beweis. Die σ-Endlichkeit wurde in Satz 335 bewiesen. Zu zeigen ist, dass ein Prämaß vorliegt. Nach Satz 79 ist $\mathbb{T}$ isomorph zu einer Submaßkette $\mathbb{D}$ von $\mathbb{R}$. Sei f Maßketten-Isomorphismus $f \colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{D}$. Sei $\mathfrak{I}' := \mathfrak{I}_{[\mathbb{D}[}$. Sei ν^* der Inhalt von $\mathbb{D}$, μ^* die Wachstumseichung von $\mathbb{D}$, und μ jene von $\mathbb{T}$.
Zunächst gilt die Feststellung, dass für $A \in \mathfrak{I}$ stets $f[A] \in \mathfrak{I}'$ gilt. Denn es gilt $A = [x, y[$ mit $x, y \in \mathbb{T}$ und $x \leq y$, oder es ist $A = \{\max \mathbb{T}\}$. Im ersten Fall gilt wegen der strengen Isotonie von f, dass $f[A] = [f(x), f(y)[\in \mathbb{D}$. Ebenfalls per strenger Isotonie von f gilt im zweiten Fall $f(\{\max \mathbb{T}\}) = \max \mathbb{D}$, insbesondere existiert dann zusammen mit $\max \mathbb{T}$ auch $\max \mathbb{D}$ und es

gilt $f[\{\max \mathbb{T}\}] = \{\max \mathbb{D}\} \in \mathfrak{I}'$.

Sei nun $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine disjunkte Familie von Elementen von $\mathfrak{I}$ mit $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathfrak{I}$. Dann folgt aus dem eben Bewiesenen, dass $(f[A_i])_{i\in\mathbb{N}}$ eine disjunkte Familie von Elementen von $\mathfrak{I}'$ ist mit $\bigcup_{i=0}^{\infty} f[A_i] = f[\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i] \in \mathfrak{I}'$. Wir unterscheiden wieder zwei Fälle.
Erster Fall: $\mathbb{T}$ besitzt ein Maximum und $\max \mathbb{T} \in \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$. Diesen Fall behandeln wir genau wie den ersten Fall im Beweis von Satz 337.
Zweiter Fall: $\mathbb{T}$ besitzt kein Maximum oder $\max \mathbb{T} \notin \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$. Dann ist sowohl $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ wie auch jedes A_i von $\{\max \mathbb{T}\}$ verschieden, also gibt es $a, b \in \mathbb{T}$ mit $a \leq b$ und zu jedem $i \in \mathbb{N}$ $a_i, b_i \in \mathbb{T}$ mit $a_i \leq b_i$, so dass $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = [a, b[$ und $A_i = [a_i, b_i[$.
Da nun ν^* nach Satz 337 ein Prämaß ist, und da außerdem f als Maßketten-Morphismus $\forall\, x, y \in \mathbb{T}\ \mu^*(f(x), f(y)) = \mu(x, y)$ erfüllt (Def 76) und als Maßketten-Isomorphismus streng isoton ist (Satz 77), folgt also:

$\nu(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i) = \nu([a, b[) = \mu(b, a) =$

$= \mu^*(f(b), f(a)) = \nu^*([f(a), f(b)[) = \nu^*(f[\ [a, b[\ ]) = \nu^*(f[\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i]) = \nu^*(\bigcup_{i=0}^{\infty} f[A_i]) =$

$= \sum_{i=0}^{\infty} \nu^*(f[A_i]) = \sum_{i=0}^{\infty} \nu^*(f[\ [a_i, b_i[\ ]) = \sum_{i=0}^{\infty} \nu^*([f(a_i), f(b_i)[) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(f(b_i), f(a_i)) =$

$= \sum_{i=0}^{\infty} \mu(b_i, a_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \nu([a_i, b_i[) = \sum_{i=0}^{\infty} \nu(A_i)$. ■

Nr. 339 (Satz und Def) borelsche und lebesguesche Größen einer Maßkette, insbesondere die Maße $\beta_{\mathbb{T}}$ und $\lambda_{\mathbb{T}}$ und die Menge $\mathfrak{L}_{\mathbb{T}}$

Sei $\mathbb{T}$ eine nichtleere Maßkette und $\nu_{\mathbb{T}}$: $\mathfrak{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ der lebesguesche Inhalt über $\mathbb{T}$.
Sei η das von $\nu_{\mathbb{T}}$ über $\mathbb{T}$ induzierte äußere Maß $\eta_{\mathbb{T}}(\mu_{\mathbb{T}})$ (vgl. Def 211)

Da $\nu_{\mathbb{T}}$ nach Satz 338 σ-endliches Prämaß über $\mathbb{T}$ ist (und weil nach Satz 333 $\sigma_{\mathbb{T}}(\mathfrak{I}_{\mathbb{T}}) = \mathfrak{B}_{\mathbb{T}}$), zeigt der Fortsetzungssatz für σ-endliche Prämaße (Satz 221), dass es jeweils genau eine Fortsetzung von $\nu_{\mathbb{T}}$ zu einem Maß auf der Menge $\mathfrak{B}_{\mathbb{T}}$ der Borelmengen von $\mathbb{T}$ sowie zu einem Maß auf der Menge $\mathfrak{A}_\eta$ der η-messbaren Mengen über $\mathbb{T}$ gibt. Für $\mathfrak{A}_\eta$ schreiben wir $\mathfrak{L}_{\mathbb{T}}$.

Die erste Fortsetzung bezeichnen wir mit $\beta_{\mathbb{T}}$ und wkM mit β und nennen sie das *borelsche Maß* über der Maßkette $\mathbb{T}$, die zweite Fortsetzung bezeichnen wir mit $\lambda_{\mathbb{T}}$ und wkM mit λ und nennen sie das *lebesguesche Maß* über der Maßkette $\mathbb{T}$.

Die Elemente des Definitionsbereichs $\mathfrak{B}_{\mathbb{T}}$ von $\beta_{\mathbb{T}}$ [bzw. des Definitionsbereichs $\mathfrak{L}_{\mathbb{T}}$ von $\lambda_{\mathbb{T}}$], also die Borelmengen [bzw. η-messbaren Mengen], heißen nun $\beta_{\mathbb{T}}$-messbaren [bzw. $\lambda_{\mathbb{T}}$-messbaren] Mengen; wir nennen sie *borel-messbare Mengen* [bzw. *lebesgue-messbare Mengen*].

Wir nennen $(\mathbb{T}, \mathfrak{B}_{\mathbb{T}})$ bzw. $(\mathbb{T}, \mathfrak{L}_{\mathbb{T}})$ den *borelschen* bzw. *lebesguesche Messraum* von $\mathbb{T}$ und $(\mathbb{T}, \mathfrak{B}_{\mathbb{T}}, \beta_{\mathbb{T}})$ bzw. $(\mathbb{T}, \mathfrak{L}_{\mathbb{T}}, \lambda_{\mathbb{T}})$ den *borelschen* bzw. *lebesguesche Maßraum* von $\mathbb{T}$.

Nr. 340 (Satz) Verhältnis zwischen den borelschen und lebesgueschen Größen einer Maßkette

Für nichtleere Maßketten $\mathbb{T}$ gilt:

1. $\mathfrak{I}_{\mathbb{T}} \subseteq \mathfrak{B}_{\mathbb{T}} \subseteq \mathfrak{L}_{\mathbb{T}} \subseteq \mathbb{T}$
2. $\beta_{\mathbb{T}}$ *ist die eindeutig bestimmte Fortsetzung von* $\nu_{\mathbb{T}}$ *auf* $\mathfrak{B}_{\mathbb{T}}$
3. $\lambda_{\mathbb{T}}$ *ist die eindeutig bestimmte Fortsetzung von* $\nu_{\mathbb{T}}$ *auf* $\mathfrak{L}_{\mathbb{T}}$,
   und $\lambda_{\mathbb{T}}$ *ist eine Fortsetzung und die Vervollständigung von* $\beta_{\mathbb{T}}$ *über* $\mathbb{T}$
4. *Der Maßraum* $(\mathbb{T}, \mathfrak{L}_{\mathbb{T}}, \lambda_{\mathbb{T}})$ *ist die Vervollständigung von* $(\mathbb{T}, \mathfrak{B}_{\mathbb{T}}, \beta_{\mathbb{T}})$

Beweis. Folgt mit Blick auf Def 339 aus Satz 221. ■

Vereinbarung: Bedeutung von $\leq, \mu, \nu, \beta, \lambda, \mathfrak{B}, \mathfrak{O}, \mathfrak{L}$ im Zusammenhang einer nichtleeren Maßkette

Im Zusammenhang mit einer nichtleeren Maßkette $\mathbb{T}$ bezeichne von jetzt an $\leq$ die Kleinergleichrelation von $\mathbb{T}$, μ die Wachstumseichung, ν den lebesgueschen Inhalt, β das borelsche Maß, λ das lebesguesche Maß, $\mathfrak{O}$ die Menge $\mathfrak{O}_{\mathbb{T}}$ der offenen, $\mathfrak{B}$ die Menge $\mathfrak{B}_{\mathbb{T}}$ der borelmessbaren und $\mathfrak{L}$ die Menge $\mathfrak{L}_{\mathbb{T}}$ der lebesgue-messbaren Teilmengen von $\mathbb{T}$.

Nr. 341 (Satz) Messbarkeit und Maß einelementiger Mengen in Maßketten

Einelementige Mengen einer Maßkette sind borel– und lebesgue-messbar, und es gilt:

1. *Ist* $t \in \mathbb{T}$ *rechts-dicht,* *so ist* $\beta(\{t\}) = \lambda(\{t\}) = 0$
2. *Ist* $t \in \mathbb{T}$ *rechts-zerstreut, so ist* $\beta(\{t\}) = \lambda(\{t\}) = \mu^*(t) > 0$

Beweis. Zunächst ist $\{t\}$ nach Satz 192 eine Borelmenge, also $\{t\}$ borel-messbar, und dann nach Satz 340(3) erst recht lebesgue-messbar.

Zu (1). Wegen der Nichtnegativität und der Isotonie von β (Satz 202) gilt für jedes $u > t$:

(A) $0 \leq \beta(\{t\}) \leq \beta([t, u[) = \nu([t, u[= \mu(u, t)$.

Wegen der Stetigkeit von $\mu(\bullet, t)$ an der Stelle t gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von t mit für alle $u \in U$: $|\mu(u, t) - \mu(t, t)| < \varepsilon$, das heißt $|\mu(u, t)| < \varepsilon$. Da t rechts-dicht ist, gibt es nach Satz 36(2) ein $u \in U$ mit $u > t$. Für dieses ist dann nach dem Axiom der strengen Isotonie für Maßketten $\mu(u, t)$ positiv, also $\mu(u, t) = |\mu(u, t)| < \varepsilon$. Zusammen mit (A) folgt also $0 \leq \beta(\{t\}) < \varepsilon$. Da dies für jedes ε gilt, folgt schließlich $\beta(\{t\}) = 0$.

Zu (2). Für rechts-zerstreutes t gilt $\{t\} = [t, \sigma(t)[$ und daher $\beta(\{t\}) = \beta([t, \sigma(t)[= \nu([t, \sigma(t)[= \mu(\sigma(t), t)$, letzteres ist (per Def 72) $= \mu^*(t)$ und per Axiom der strengen Isotonie > 0. ■

Nr. 342 (Satz) Zusammenhang zwischen maßtheoretischen und anderen Treppenfunktionen

Sei $\mathbb{T}$ *nichtleere beschränkte Maßkette mit* $\min \mathbb{T} < \max \mathbb{T}$. *Dann gilt:*

$\mathcal{T}_{[[}(\mathbb{T}, \mathcal{X}) \subseteq \mathcal{T}_{][}(\mathbb{T}, \mathcal{X}) \subseteq \mathcal{T}_m(\mathbb{T}, \mathcal{X})$

Beweis. Die erste Teilmengenbeziehung ist trivial. Weiter hat jedes f aus $\mathcal{T}_{][}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ offenbar eine Darstellung $\sum_{i=1}^{n} \chi_{B_i, \mathbb{T}, \mathcal{X}, \beta_i, 0}$, wobei $\beta_i \in X$ und B_i offene Intervalle oder einelementige Mengen sind, mit Blick auf Satz 192 also auf jeden Fall Borelmengen (also sowohl borel- wie auch lebesgue-messbare Mengen). Somit ist $\chi_{B_i, \mathbb{T}, \mathcal{X}, \beta_i, 0}$ gemäß Satz 259 messbar. Per Linearität der Messbarkeit (Satz 250) ist dann auch f messbar. Da $\mathrm{Wb}(f)$ trivialerweise endlich ist, ist insgesamt $f \in \mathcal{T}_m(\mathbb{T}, \mathcal{X})$. ■

Nr. 343 (Satz und Def) Borel-Messbarkeit und Lebesgue-Messbarkeit einer auf $\mathbb{T}$ definierten Funktion

Sei $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \hat{\mathbb{K}}$ oder $\longrightarrow \mathcal{Y}$, so dass gilt:
die linke σ-Algebra von f ist $\mathfrak{B}_{\mathbb{T}}$ und die rechte ist $\mathfrak{R} := \mathfrak{B}_{\hat{\mathbb{K}}}$ bzw. $\mathfrak{B}_{\mathcal{Y}}$. Wir definieren nun:

f ist *Borel-messbar* bzw. *streng Borel-messbar*
$:\Leftrightarrow$ f ist $\mathfrak{B}_{\mathbb{T}}$-$\mathfrak{R}$-messbar bzw. streng $\mathfrak{B}_{\mathbb{T}}$-$\mathfrak{R}$-messbar

f ist *Lebesgue-messbar* bzw. *streng Lebesgue-messbar*
$:\Leftrightarrow$ f ist $\mathfrak{L}_{\mathbb{T}}$-$\mathfrak{R}$ messbar bzw. streng $\mathfrak{L}_{\mathbb{T}}$-$\mathfrak{R}$-messbar

Ist f Borel-messbare bzw. streng Borel-messbar,
so auch Lebesgue-messbar bzw. streng Lebesgue-messbar.

Beweis. Folgt sofort $\mathfrak{B}_{\mathbb{T}} \subseteq \mathfrak{L}_{\mathbb{T}}$ (Satz 340). ■

Nr. 344 (Satz) Strenge Messbarkeit der Funktionen aus $\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{Y})$

Ist $\mathbb{T} \neq \emptyset$ *Maßkette und* $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{Y}$ *sprungstetig, so ist* f *streng messbar*
(das heißt streng Borel-messbar, und nach Satz 343 auch streng Lebesgue-messbar).

Beweis. Wir behandeln zuerst einen Spezialfall und dann den allgemeinen Fall.

(1). Zunächst liege der Spezialfall vor, dass $\mathbb{T}$ beschränkt ist mit $a = \min \mathbb{T} < \max \mathbb{T} = b$.

Dann ist f nach Satz 120 gleich der Grenzfunktion $\lim f_n$ einer konvergenten Folge (f_n) von Elementen von $\mathcal{T}_{][}(\mathbb{T},\mathcal{Y})$ (und somit nach Satz 342 von Elementen von $\mathcal{T}_m(\mathbb{T},\mathcal{Y})$). Also ist f nach Sätzen 257 und 244 streng messbar.

(2) Im allgemeinen Fall ist $\mathbb{T}$ nach Satz 74(3) abzählbare Vereinigung disjunkter Mengen T_i ($i \in I$, I abzählbar), unter denen nur nichtleere kompakte Intervalle und einelementige Mengen vorkommen. Die T_i sind nach Sätzen 341 und 333 Borelmengen.
Für jedes $i \in I$ ist nun die Funktion $f|T_i$ streng messbar: dies folgt im Fall, dass T_i einelementig ist, aus Satz 228 und im Fall, dass T_i kompaktes Intervall (mit mehr als einem Element) ist, aus (1).
Nach Satz 314(1) ist auch die Funktion $f_i := f \cdot \chi_{T_i}$ streng messbar (die Voraussetzungen des Satzes sind erfüllt, da die T_i Borelmengen sind, also zur linken σ-Algebra von f gehören).

Ist nun I endlich, so können wir durch Umindizierung erreichen, dass $I = [1, n]$ für ein $n \in \mathbb{N}^{\odot}$ (beachte $I \neq \emptyset$ wegen $\mathbb{T} \neq \emptyset$), und es gilt $f = \sum_{i=1}^{n} f_i$, also ist f nach Satz 263 streng messbar.

Für unendliches (aber abzählbares) I aber können wir durch Umindizierung erreichen, dass $I = \mathbb{N}$. Dann ist f trivialerweise gleich der Grenzfunktion von $\left(\sum_{i=0}^{n} f_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$, und somit wegen Satz 244 streng messbar. ■

10.2 Konstruktion und Eigenschaften des Lebesgue-Integrals

Nr. 345 (Satz und Def) (Borel– und) Lebesgue-Integrierbarkeit sowie (Borel– und) Lebesgue-Integral auf nichtleeren Maßketten

Sei $\mathbb{T}$ nichtleere Maßkette, und $f \longrightarrow \mathbb{T} \longrightarrow \hat{\mathbb{K}}$ oder $\longrightarrow \mathcal{Y}$.

f ist *Borel-integrierbar* $\Leftrightarrow$ f ist β-integrierbar,
f ist *Lebesgue-integrierbar* $\Leftrightarrow$ f ist λ-integrierbar

Im Fall der Borel– bzw. Lebesgue-Integrierbarkeit bezeichnen wir das Integral $\int f \, \mathrm{d}\beta$ bzw. $\int f \, \mathrm{d}\lambda$ als das *Borel*– bzw. *Lebesgue-Integral* von f.

Mit $\mathcal{I}(\lambda, \mathbb{T}, \hat{\mathbb{K}})$ bzw. $\mathcal{I}(\lambda, \mathbb{T}, \mathcal{Y})$ oder wkM $\mathcal{I}(\lambda)$ oder $\mathcal{I}$ bezeichnen wir die Menge der Lebesgue-integrierbaren Funktionen von $\mathbb{T}$ in $\hat{\mathbb{K}}$ bzw. in $\mathcal{Y}$.

Ist f Borel-integrierbar, so auch Lebesgue-integrierbar und es gilt dann $\int f \, \mathrm{d}\beta = \int f \, \mathrm{d}\lambda$.

Beweis. Wir führen den Beweis in sechs Teilen.

(1). Sei zunächst f reellwertige nichtnegative Treppenfunktion: $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ und $A_i \in \mathfrak{B}$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Wegen $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{L}$ und weil λ Fortsetzung von β ist (Satz 340), gilt $A_i \in \mathfrak{L}$ und somit gemäß Def 267:
$\int f \, \mathrm{d}\beta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda(A_i) = \int f \, \mathrm{d}\lambda$.

(2). Sei f nichtnegative messbare Funktion. Ist nun (f_n) gleichmäßig gegen f konvergente Folge von reellwertigen nichtnegativen Treppenfunktionen, so folgt aus (1) gemäß Def 269 durch Limesübergang, dass $\int f \, \mathrm{d}\beta = \int f \, \mathrm{d}\lambda$.

(3). Sei f Borel-integrierbar, d. h. β-integrierbar, also nach Satz 301 streng Borel-messbar mit $\int \|f\| \, \mathrm{d}\nu < \infty$. Dann ist f nach Satz 343 auch streng Lebesgue-messbar. Weiter ist $\|f\| \in \mathcal{M}^+$ und es folgt $\int \|f\| \, \mathrm{d}\lambda \underset{(2)}{=} \int \|f\| \, \mathrm{d}\beta < \infty$, also ist f λ-integrierbar, d. h. Lebesgue-integrierbar.

(4). Sei f Borel-integrierbar mit Werten in $\hat{\mathbb{K}}$. Nach (3) ist f dann λ-integrierbar, und wegen (2) folgt gemäß Def 278, dass $\int f \, \mathrm{d}\beta = \int f \, \mathrm{d}\lambda$.

(5). Sei f einfache β-integrierbare Funktion in $\mathcal{Y}$ mit paarweise verschiedenen Werten $a_1, \ldots, a_n$. Nach (3) ist f auch einfache λ-integrierbare Funktion mit diesen Werten. Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei $A_i := f^{-1}[\{a_i\}]$. Weil nun λ Fortsetzung von β ist (Satz 340) gilt gemäß Def 302 $\int f \, \mathrm{d}\beta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda(A_i) = \int f \, \mathrm{d}\lambda$.

(6). Sei f Borel-integrierbar mit Werten in $\mathcal{Y}$. Nach (3) ist f λ-integrierbar. Wir wählen eine folge (f_n) mit der Eigenschaft, dass die f_n β-integrierbare (somit auch λ-integrierbare) einfache Funktionen sind, wobei $\sup \|f_n\|$ β-integrierbar (somit auch λ-integrierbar) und reell ist. Es folgt dann aus (5) durch Limesübergang, dass $\int f \, \mathrm{d}\beta = \int f \, \mathrm{d}\lambda$. ■

Nr. 346 (Satz und Def) (Borel– und) Lebesgue-Integral über Teilmengen nichtleerer Maßketten

Sei $\mathbb{T}$ nichtleere Maßkette, und $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \hat{\mathbb{K}}$ oder $\longrightarrow \mathcal{Y}$.

Ist $T \in \mathfrak{B}$ bzw. $T \in \mathfrak{L}$ und
ist $f|T$ oder $f \cdot \chi_T$ (also nach Satz 314 beides) Borel– bzw. Lebesgue-integrierbar,
so heißt das β– bzw. λ-Integral $\int_T f \,\mathrm{d}\beta$ bzw. $\int_T f \,\mathrm{d}\lambda$ von f über T
das *Borel*– bzw. *Lebesgue-Integral* von f über T.

1. Ist f Borel– bzw. Lebesgue-integrierbar und $T \in \mathfrak{B}$ bzw. $\in \mathfrak{L}$,

   so ist $f|T$ Borel– bzw. Lebesgue-integrierbar (also $\int_T f \,\mathrm{d}\beta$ bzw. $\int_T f \,\mathrm{d}\lambda$ wohldefiniert)

2. Ist $f \cdot \chi_T$ Borel– (und somit Lebesgue–)integrierbar, so gilt $\int_T f \,\mathrm{d}\beta = \int_T f \,\mathrm{d}\lambda$.

Beweis. Zu (1) siehe Satz 317. Zu (2). $\int_T f \,\mathrm{d}\lambda = \int f \cdot \chi_T \,\mathrm{d}\lambda \underset{Satz\ 345}{=} \int f \cdot \chi_T \,\mathrm{d}\beta = \int_T f \,\mathrm{d}\beta$. ■

Nr. 347 (Satz und Def) (Borel– und) Lebesgue-Integral in den Grenzen von a bis b auf nichtleeren Maßketten

Sei $\mathbb{T}$ nichtleere Maßkette, und $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \hat{\mathbb{K}}$ oder $\longrightarrow \mathcal{Y}$. Sei $a, b \in \mathbb{T}$.

Bezeichne hier α entweder das Maß β oder λ, und sei f α-integrierbar.
Dann sind auch $f \cdot \chi_{[a,b]}$, $f \cdot \chi_{[a,b[}$, $f \cdot \chi_{]a,b]}$, $f \cdot \chi_{[a,b]}$ α-integrierbar,
also die Borel– bzw. Lebesgue-Integrale $\int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\alpha$, $\int_{[a,b[} f \,\mathrm{d}\alpha$, $\int_{]a,b]} f \,\mathrm{d}\alpha$, $\int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\alpha$ definiert,
und wir definieren das *Borel– bzw. Lebesgue-Integral von f in den Grenzen von a bis b* durch

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\alpha \ := \begin{cases} +\int_{[a,b[} f \,\mathrm{d}\alpha & \text{falls } a \le b \\ -\int_{[b,a[} f \,\mathrm{d}\alpha & \text{falls } b \le a \end{cases}$$

Es gilt:

1. Für $a \in \mathbb{T}$ ist $\int_{[a,a[} f \,\mathrm{d}\alpha = 0$

   (so dass, wenn sowohl $a \le b$ wie auch $b \le a$ und somit $a = b$ gilt, die im Definiens angegebenen Integrale $\int_{[a,b[} f \,\mathrm{d}\alpha$ und $-\int_{[b,a[} f \,\mathrm{d}\alpha$ übereinstimmen, nämlich $= 0$ sind)

2. Ist f Borel-Integrierbar (und damit Lebesgue-integrierbar), so gilt $\int_a^b f \,\mathrm{d}\beta = \int_a^b f \,\mathrm{d}\lambda$

3. Für $a, b \in \mathbb{T}$ gilt stets $\int_a^a f \,\mathrm{d}\alpha = 0$ sowie $\int_a^b f \,\mathrm{d}\alpha = -\int_b^a f \,\mathrm{d}\alpha$

4. Ist $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ und $a \le b$, so $\int_a^b f \,\mathrm{d}\alpha = \int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\alpha = \int_{]a,b[} f \,\mathrm{d}\alpha = \int_{]a,b]} f \,\mathrm{d}\alpha = \int_{[a,b[} f \,\mathrm{d}\alpha$.

Beweis. Zunächst ist zu zeigen, dass $f \cdot \chi_{[a,b]}$, $f \cdot \chi_{[a,b[}$, $f \cdot \chi_{]a,b]}$, $f \cdot \chi_{[a,b]}$ Borel– bzw. Lebesgue-integrierbar ist. Dazu müssen wir nach Satz 346(1) nur zeigen, dass die Integrationsbereiche $]a, b[, [a, b[,]a, b], [a, b]$ Elemente von $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{L}$ sind. Mit Blick auf Satz 333 sind zunächst

$\{a\} = [a]$ und $\{b\} = [b]$ ebenso wie $[a, b]$ als kompakte Mengen $\in \mathfrak{B}$, als offene Menge ist $]a, b[\ \in \mathfrak{B}$; damit folgt auch, dass $[a, b[\ = \ ]a, b[\cup \{a\} \in \mathfrak{B}$ ist. Ebenso ist $]a, b] = \ ]a, b[\cup \{b\} \in \mathfrak{B}$. Wegen $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{L}$ sind die angegebenen Mengen auch $\in \mathfrak{L}$.

Zu (1). $\int_{[a,a[} f \,\mathrm{d}\alpha = \int_{\emptyset} f \,\mathrm{d}\alpha = \int f\chi_{\emptyset} \,\mathrm{d}\alpha = \int 0 \,\mathrm{d}\alpha = 0$.

Zu (2). Folgt aus Satz 346(2).

Zu (3). $\int_a^a f \,\mathrm{d}\alpha = \int_{[a,a[} f \,\mathrm{d}\alpha \underset{(1)}{=} 0$ und die zweite Behauptung folgt sofort aus der Definition.

Zu (4). Nach Satz 341 gilt $\alpha(\{a\}) = \alpha(\{b\}) = 0$, und die Behauptung folgt aus Satz 317. ■

Nr. 348 (Satz) Additivität bezüglich Integrationsbereich für das (Borel– und) Lebesgue-Integral auf nichtleeren Maßketten

Sei $\mathbb{T}$ nichtleere Maßkette, $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \hat{\mathbb{K}}$ oder $\longrightarrow \mathcal{Y}$ borel– bzw. lebesgue-integrierbare Funktion und $a, b, c \in \mathbb{T}$. Dann gilt:

1. *(Additionsregel)* $\int_a^c f \,d\beta = \int_a^b f \,d\beta + \int_b^c f \,d\beta$ bzw. $\int_a^c f \,d\lambda = \int_a^b f \,d\lambda + \int_b^c f \,d\lambda$
2. *(Subtraktionsregel)* $\int_a^c f \,d\beta - \int_a^b f \,d\beta = \int_b^c f \,d\beta$ bzw. $\int_a^c f \,d\lambda - \int_a^b f \,d\lambda = \int_b^c f \,d\lambda$

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $a \leq b \leq c$. Dann folgt die Behauptung direkt aus Satz 317(2). Für die übrigen fünf Fälle und die Subtraktionsregel kann man den entsprechenden Beweisteil aus dem Beweis von Satz 164 übernehmen. ■

Nr. 349 (Satz) (Borel– und) Lebesgue-Integrierbarkeit sprungstetiger Funktionen

Ist $\mathbb{T}$ beschränkte Maßkette mit $a = \min \mathbb{T} \leq \max \mathbb{T} = b$,
so ist jede Funktion $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{Y})$ Borel– und Lebesgue-integrierbar.

Beweis. Nach Satz 344 ist f ist streng messbar. Da f nach Satz 107 zum Banachraum der beschränkten Funktionen von $\mathbb{T}$ in $\mathcal{Y}$ gehört, gibt es ein $s \in \mathbb{R}$ mit $\|f\| < s^*$, wobei s^* die konstante Funktion von $\mathbb{T}$ in $\mathbb{R}$ ist mit $\forall\, x \in \mathbb{T}\ s^*(x) = s$. Nun ist s^* messbar und nimmt nur einen Wert an, der nichtnegativ ist; daher ist $s^* \in \mathcal{T}_m^+$. Weil nun $s^* = s\chi_{\mathbb{T}}$, gilt per Def 264, dass $\int s^* \,\mathrm{d}\beta = s\beta(\mathbb{T}) = s\beta([a, b]) = s(\beta[a, b[+ \beta\{b\}) = s(\nu([a, b[) + \nu\{b\}) = s(\mu(b, a) + 0) = s\mu(b, a) < \infty$, also ist s^* integrierbar, und nach Satz 301 ist auch f Borel-integrierbar. Nach Satz 345 ist dann f erst recht Lebesgue-integrierbar. ■

Nr. 350 (Satz) Vergleich des Borel– und Lebesgue-Integrals mit den zuvor definierten Integralen

Sei $\mathbb{T}$ Maßkette mit $a = \min\mathbb{T} < \max\mathbb{T} = b$ und sei $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T},\mathcal{Y})$, also Cauchy-integrierbar und nach Satz 349 auch Borel– und Lebesgue-integrierbar.

Dann stimmen das Borel– und Lebesgue-Integral von f mit dem Cauchy-Integral überein: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\beta = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b f(x)\Delta x$.

Mit Satz 174 folgt als unmittelbares Korollar: ist f auch $\in \mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathbb{K})$, stimmt auch das Cauchy-Riemann-Integral mit den anderen Integralen überein, das heißt es gilt:

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\beta = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b f(x)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$.

Beweis. Wegen Satz 347 gilt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\beta = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\lambda$, somit bleibt nur $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\beta = \int_a^b f(x)\Delta x$ zu zeigen. Da f sprungstetig ist, gibt es nach Satz 120 zu f
eine Folge (f_n) von][-Treppenfunktionen $f_n\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{Y}$,
die gleichmäßig gegen f konvergiert. Die f_n sind nach Satz 119 Elemente von $\mathcal{R}(\mathbb{T},\mathcal{Y})$, also wie f selbst zugleich Cauchy–, Borel– und Lebesgue-integrierbar.

Nach dem Konvergenzsatz 142 für Cauchy-Integrale gilt nun $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\Delta x = \int_a^b f\Delta x$. Andererseits gilt nach dem Satz 313 von der majorisierten Konvergenz $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\beta = \int_a^b f\,\mathrm{d}\beta$, denn f und alle f_n sind als integrierbare Funktionen streng messbar, und es gibt ein integrierbares $g \in \mathcal{M}^+(\mathbb{T},\mathbb{R})$ mit für alle Indizes n der Folge und alle $x \in \mathbb{T}$: $\|f_n(x)\| \le g(x)$.

Ein solches g kann man nämlich wie folgt konstruieren. Da f beschränkt ist (Satz 119), gibt es eine positive obere Schranke s mit $\forall\, x \in \mathbb{T}\ \|f(x)\| \le s$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (f_n) gibt es ferner zu $\varepsilon := 1$ einen Index n_0 mit für alle $n \ge n_0$ und alle $x \in \mathbb{T}$: $\|f_n(x) - f(x)\| < 1$, also $\|f_n(x)\| \le \|f_n(x) - f(x)\| + \|f(x)\| \le s + 1$. Da die Menge der Werte, welche eine Treppenfunktion annimmt, endlich ist, ist auch die Menge der Werte, welche die Treppenfunktionen f_n mit Index $n < n_0$ annehmen, eine endliche Menge M. Dann ist auch die Menge $\{\|x\| : x \in M\}$ endlich, besitzt also ein Maximum s^*. Setzen wir nun $m := \max\{s^*, s+1\}$, so gilt für alle $x \in \mathbb{T}$ und alle Indizes n der Folge (f_n), dass $\|f_n(x)\| \le m$. Infolgedessen können wir als g die Funktion $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ nehmen, die konstant auf m abbildet: diese ist nach Satz 279 integrierbar (erst recht messbar und darum als nichtnegative Funktion $\in \mathcal{M}^+$) und es gilt für alle Indizes n und $x \in \mathbb{T}$: $\|f_n(x)\| \le m = g(x)$.
Der Satz von der majorisierten Konvergenz ist also anwendbar und liefert $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\beta = \int_a^b f\,\mathrm{d}\beta$. Wenn somit die Gleichheit der Integrale für die][-Treppenfunktionen f_n bewiesen ist, folgt $\int_a^b f\Delta x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\Delta = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\beta = \int_a^b f\,\mathrm{d}\beta$ und wir sind fertig.

Wir brauchen daher die Behauptung $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\beta = \int_a^b f(x)\Delta x$ nur noch für][-Treppenfunktion f zu beweisen. Da sowohl das Borel– wie auch das Cauchy-Integral additiv bzgl. des Integrationsbereichs ist (Satz 131(3) und 348(1)), können wir weiter annehmen, dass eine][-Zerlegung für f vorliegt, die nur zwei Teilungspunkte a, b besitzt, so dass f über $]a, b[$ konstant ist:

$\boxed{\text{ab jetzt sei } f \text{ über }]a,b[\text{ konstant}}$. Sei $a' := f(a)$ und c' der konstante Wert von f über $]a,b[$ (falls diese Menge nicht leer ist, also im rechts-dichten Fall). Wir beweisen nun:

Lemma 1: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\beta = \int_a^b f(x)\Delta x$ gilt, wenn a rechts-dicht ist.
Lemma 2: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\beta = \int_a^b f(x)\Delta x$ gilt auch, wenn a rechts-zerstreut ist und $b = \sigma(a)$ gilt.

$\boxed{\text{Zu Lemma 1}}$. Es ist $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\beta \underset{Def\ 347}{=} \int_{[a,b[} f(x)\,\mathrm{d}\beta$, mit Blick auf die Definition der verallgemeinerten charakteristischen Funktion (Def 258) ist das gleich $\int (\chi_{\{a\},\mathbb{T},a',0} + \chi_{]a,b[,\mathbb{T},c',0})\,\mathrm{d}\beta$ $\underset{Satz\ 310}{=} \int \chi_{\{a\},\mathbb{T},a',0}\,\mathrm{d}\beta + \int \chi_{]a,b[,\mathbb{T},c',0}\,\mathrm{d}\beta \underset{Satz\ 303}{=} a'\beta(\{a\}) + c'\beta((]a,b[)$.
Da a rechts-dicht ist, folgt aus Satz 341(1), dass $\beta(\{a\}) = 0$, und aus der Subtraktionsformel für Maße folgt $\beta(]a,b[= \beta([a,b[\setminus \{a\}) \underset{Satz\ 203(3)}{=} \beta([a,b[) - \beta(\{a\}) = \beta([a,b[) = \mu(b,a)$.

Insgesamt gilt also $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\beta = c'\mu(b,a)$,
und nach Satz 137 ist im rechts-dichten Fall auch $\int_a^b f(x)\Delta x = c'\mu(b,a)$.

$\boxed{\text{Zu Lemma 2}}$. Nach Voraussetzung ist a rechts-zerstreut und $b = \sigma(a)$, also ist $]a,b[$ leer, also $[a,b[= \{a\}$ und es folgt
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\beta \underset{Def\ 347}{=} \int_{\{a\}} f(x)\,\mathrm{d}\beta$, mit Blick auf die Definition der verallgemeinerten charakteristischen Funktion (Def 258) ist das gleich $\int \chi_{\{a\},\mathbb{T},a',0}\,\mathrm{d}\beta \underset{Satz\ 303}{=} a'\beta(\{a\})$.
Nun ist für rechts-zerstreutes a nach Satz 341(2) $\beta(\{a\}) = \mu^*(a)$, also folgt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\beta = a'\mu^*(a)$, und nach Satz 135 ist auch $\int_a^b f(x)\Delta x = a'\mu^*(a)$. Damit sind die Lemmata bewiesen.

Nun zeigen wir gemäß dem Induktionsprinzip Satz 42, dass $\forall\, t \in [a,b]\ \ \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}\beta = \int_a^t f(x)\Delta x$ gilt. Dann gilt insbesondere $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\beta = \int_a^b \Delta x$ und der Beweis ist abgeschlossen.

$\boxed{\text{IA}}$. $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}\beta = 0 = \int_a^a f(x)\Delta x$.

$\boxed{\text{PP}}$. Ist t rechts-zerstreut und gilt $\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}\beta = \int_a^t f(x)\Delta x$, so folgt
$\int_a^{\sigma(t)} f(x)\,\mathrm{d}\beta = \int_a^{\sigma(t)} f(x)\Delta x$ wegen Lemma 2 und der Additivität des Integrationsbereichs.

$\boxed{\text{PU}}$. Sei t rechts-dicht mit $\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}\beta = \int_a^t f(x)\Delta x$, und ist $s > t$, so gilt $\int_a^s f(x)\,\mathrm{d}\beta = \int_a^s f(x)\Delta x$ wegen Lemma 1 und der Additivität des Integrationsbereichs.

$\boxed{\text{VP}}$. Sei t links-dicht und $\forall\, s \in \mathbb{T}^{<t}\ \int_a^s f(x)\,\mathrm{d}\beta = \int_a^s f(x)\Delta x$ vorausgesetzt. Da t links-dicht ist, können wir ein $\hat{a} \in]a,t[$ wählen. Es ist dann f über $[\hat{a},t[$ konstant $= c'$.
Aus Voraussetzung und Additivität bzgl. Integrationsbereich folgt für $s \in \mathbb{T}$ mit $\hat{a} \leq s < t$

(A) $\int_{\hat{a}}^s f(x)\,\mathrm{d}\beta = \int_{\hat{a}}^s f(x)\Delta x$.

Zu zeigen ist nun zum Abschluss des Beweisteils (VP) und somit des gesamten Beweises, dass
$\boxed{(*)}$ $\int_{\hat{a}}^t f(x)\,\mathrm{d}\beta = \int_{\hat{a}}^t f(x)\Delta x$,
denn per Additivität bezüglich Integrationsbereich folgt aus (*) sofort $\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}\beta = \int_a^t \Delta x$.

Nun ist t links-dichter Punkt von $[a,t]$, also nach Satz 36(2) Häufungspunkt von $[\hat{a},t[$. Daraus folgt (wenn man noch beachtet, dass Maßketten nach Satz 73 metrische Räume sind), dass es eine gegen t strebende Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a,t[$ gibt. Da fast alle ihrer Glieder in $]\hat{a},t[$ liegen, können wir von vornherein annehmen, dass $\forall\ n\in\mathbb{N}\ s_n\in\,]\hat{a},t[$.

Sei nun für Teilmengen T von $\mathbb{T}$ mit $f\cdot\chi_T$ (wie in Satz 314) die Funktion von $\mathbb{T}$ in $\mathcal{Y}$ gemeint mit $\forall\ x\in\mathbb{T}\ (f\cdot\chi_T)(x):=\begin{cases} f(x) & \text{falls } x\in T\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$ Mit Def 347 und Satz 314 folgt

(B) $\int_{\hat{a}}^{t} f\,\mathrm{d}\beta=\int f\cdot\chi_{[\hat{a},t[}\,\mathrm{d}\beta$

Für $n\in\mathbb{N}$ sei $\hat{f}_n:=f\cdot\chi_{[\hat{a},s_n[}$. Die $\hat{f}_n$ sind nach Satz 347 integrierbar und als integrierbare Funktionen sind sie streng messbar; außerdem strebt trivialerweise $(\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f\cdot\chi_{[\hat{a},t[}$. Mittels des Satzes von der majorisierten Konvergenz soll nun gezeigt werden, dass $\int f\cdot\chi_{[\hat{a},t[}\,\mathrm{d}\beta=\lim_{n\to\infty}\int\hat{f}_n\,\mathrm{d}\beta$.
Da f integrierbar ist, ist nach Satz 301 erst recht $\|f\|$ integrierbar. Dann ist trivialerweise $\|f\|\in\mathcal{M}^+$ und es gilt für alle $n\in\mathbb{N}$ $\|\hat{f}_n\|\le\|f\|$. Daher kann der Satz 313 von der majorisierten Konvergenz angewendet werden und liefert $\int f\cdot\chi_{[\hat{a},t[}\,\mathrm{d}\beta=\lim_{n\to\infty}\int\hat{f}_n\,\mathrm{d}\beta$. Mit (B) folgt

(C) $\int_{\hat{a}}^{t} f\,\mathrm{d}\beta=\lim_{n\to\infty}\int\hat{f}_n\,\mathrm{d}\beta$.

Hierbei ist $\int\hat{f}_n\,\mathrm{d}\beta$ per Def von $\hat{f}_n$ gleich $\int f\cdot\chi_{[\hat{a},s_n[}\,\mathrm{d}\beta$, was wegen Def 347 und Satz 314 gleich $\int_{\hat{a}}^{s_n} f\,\mathrm{d}\beta$ ist. Nach (A) ist das $=\int_{\hat{a}}^{s_n} f(x)\Delta x$. Somit geht (C) über in

(D) $\int_{\hat{a}}^{t} f\,\mathrm{d}\beta=\lim_{n\to\infty}\int_{\hat{a}}^{s_n} f(x)\Delta x$.

Da f für alle $n\in\mathbb{N}$ auf $[\hat{a},s_n[$ mit der konstant auf c' abbildenden Funktion übereinstimmt, folgt aus Satz 133(1), dass $\int_{\hat{a}}^{s_n} f(x)\Delta x=\int_{\hat{a}}^{s_n} c'\Delta x\underset{Satz 134(2)}{=}c'\mu(s_n,\hat{a})$.
Also folgt $\lim_{n\to\infty}\int_{\hat{a}}^{s_n} f_n\Delta x=\lim_{n\to\infty}c'\mu(s_n,\hat{a})=c'\lim_{n\to\infty}\mu(s_n,\hat{a})$, das ist wegen der Stetigkeit von $\mu(\bullet,\hat{a})$ (Satz 68) gleich $c'\mu(t,\hat{a})\underset{Satz\ 134(2)}{=}\int_{\hat{a}}^{t} c'\Delta x$.
Da f auf $[\hat{a},t[$ mit der konstant auf c' abbildenden Funktion übereinstimmt, folgt schließlich aus Satz 133(1), dass $\int_{\hat{a}}^{t} c'\Delta x=\int_{\hat{a}}^{t} f(x)\Delta x$.
Somit geht (D) über in $\int_{\hat{a}}^{t} f\,\mathrm{d}\beta=\int_{\hat{a}}^{t} f(x)\Delta x$. Es gilt also (*), was zu zeigen war. ■

Schlusswort

Die unabhängig voneinander eingeführten Integrale auf Maßketten — nämlich das Cauchy-Integral, das Cauchy-Riemann-Integral sowie das (Borel– und) Lebesgue-Integral — stimmen für Funktionen, die entsprechend integrierbar sind, stets überein.
Sie unterscheiden sich nur durch die jeweils verschiedene Bereiche integrierbarer Funktionen: Der Bereich $\mathcal{I}_{CR}(\mathbb{T},\mathcal{Y})$ der Cauchy-Riemann-integrierbaren Funktionen von $\mathbb{T}$ in $\mathcal{Y}$ ist Teilmenge des Bereichs $\mathcal{R}(\mathbb{T},\mathcal{Y})$ der Cauchy-integrierbaren Funktionen, dieser ist Teilmenge des Bereichs $\mathcal{I}(\beta,\mathbb{T},\mathcal{Y})$ der Borel-integrierbaren und dieser schließlich Teilmenge des Bereichs $\mathcal{I}(\lambda,\mathbb{T},\mathcal{Y})$ der Lebesgue-integrierbaren Funktionen.

Anhang

Separable Räume

Nr. 351 (Satz und Def) separabler Raum und separable Menge in einem Raum

Sei $\mathcal{X}$ topologischer Raum. $\mathcal{X}$ ist *separabel* $:\Leftrightarrow$ $\mathcal{X}$ besitzt eine abzählbare dichte Menge.

Sei $\mathcal{X} = (X, \mathfrak{O})$ topologischer Raum und $A \subseteq X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Der topologische Unterraum $\mathcal{A} := (A, \mathfrak{O}_A)$ von $\mathcal{X}$ ist separabel
2. Es gibt ein abzählbares $D \subseteq A$ mit $\forall\ a \in A\ \forall\ U \in \mathfrak{U}_{\mathcal{A}}(a)\ U \cap D \neq \emptyset$
3. Es gibt ein abzählbares $D \subseteq A$ mit $\forall\ a \in A\ \forall\ U \in \mathfrak{U}_{\mathcal{X}}(a)\ U \cap D \neq \emptyset$

und wir definieren:

A ist *separable Menge* im Raum $\mathcal{X}$ $:\Leftrightarrow$ es gilt eine [und daher jede] dieser Aussagen.

Äquivalenzbeweis. (1) ist per Def der Separabilität von $\mathcal{A}$ äquivalent zu (2), denn (2) umschreibt die Aussagen, dass es in $\mathcal{A}$ abzählbare dichte Menge gibt.

Aus (2) folgt (3). Sei $a \in A$ und U eine $\mathcal{X}$-Umgebung von a. Es ist dann $U^* := U \cap A$ eine $\mathcal{A}$-Umgebung von a, wegen (2) also $\emptyset \neq U^* \cap D$. Wegen $U^* \cap D \subseteq U \cap D$ ist dann auch $\emptyset \neq U \cap D$.

Aus (3) folgt (2). Sei $a \in A$ und U eine $\mathcal{A}$-Umgebung von a. Nun gibt es eine $\mathcal{X}$-Umgebung $U*$ von a mit $U = U* \cap A$. Wegen (3) gilt $\emptyset \neq U* \cap D$. Wegen $D \subseteq A$ ist $U* \cap D = U* \cap A \cap D = U \cap D$. Also $\emptyset \neq U \cap D$. ■

Beispiele Jeder normierte endlichdimensionale Vektorraum ist separabel, insbesondere ist $\mathbb{K}^n$ separabel (vgl. [Ama 98, Beispiel 4.3(e), S. 412]).
Auch $\overline{\mathbb{R}}$ ist separabel (dies folgt aus der Separabilität von $\mathbb{R}$ und dem folgenden Satz 352(3)).

Nr. 352 (Satz) Schluss auf Separabilität

Sei $\mathcal{X} = (X, \mathfrak{O})$ topologischer Raum.

1 *Jede abzählbare Punktmenge A des Raumes $\mathcal{X}$ ist separabel.*

2 *Ist $(A_i)_{i \in I}$ abzählbare Familie separabler Mengen von $\mathcal{X}$, so ist $\bigcup_{i \in I} A_i$ separabel.*

3 *Ist A separable Menge von $\mathcal{X}$, so auch ist auch $\overline{A}$ separabel.*

4 *Ist $\mathcal{X}$ halbmetrischer Raum, A separable Menge von $\mathcal{X}$ und $T \subseteq A$, so ist auch T separable Menge von $\mathcal{X}$*

Beweis. Zu (1). Bedingung (2) aus Satz 351 ist erfüllt mit $D := A$.

Zu (2). Zu jedem $a \in A_i$ und jeder $\mathcal{X}$-Umgebung U von A_i gilt gemäß Bedingung (3) aus Satz 351, dass es eine abzählbare Teilmenge D_i von A_i gibt, so dass $\emptyset \neq D_i \cap U$.
Wir weisen nun gemäß Bedingung (3) aus Satz 351 nach, dass $\bigcup_{i \in I} A_i$ separabel ist. Zunächst ist $D := \bigcup_{i \in I} D_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ und D ist als abzählbare Vereinigung abzählbarer Teilmengen von Mengen selbst abzählbar. Sei nun $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$, etwa $a \in A_j$, und sei eine $\mathcal{X}$-Umgebung U von a gegeben. Dann ist $\emptyset \neq U \cap D_j$, und wegen $U \cap D_j \subseteq U \cap D$ ist auch $\emptyset \neq U \cap D$.

Zu (3). Nach Voraussetzung (und gemäß Bedingung (3) aus Satz 351) gibt es eine abzählbare Teilmenge D von A (und somit von $\overline{A}$), so dass für jede $\mathcal{X}$-Umgebung U eines jeden $a^* \in A$ gemäß Bedingung (3) aus Satz 351 gilt $\emptyset \neq D \cap U$. Wenn wir also zeigen, dass jede $\mathcal{X}$-Umgebung eines $a \in \overline{A}$ auch $\mathcal{X}$-Umgebung eines $a^* \in A$ ist, sind wir fertig.
Sei nun $a \in \overline{A}$ und U eine $\mathcal{X}$-Umgebung von a. Zu U gibt es eine offene Menge O mit $a \in O \subseteq U$. Auch O ist Umgebung von a. Da a in $\overline{A}$, also in der Menge der Berührungspunkte von A liegt, gibt es in jeder Umgebung von a ein Element von A, also gilt es ein $a^* \in O \cap A$. Wegen $a^* \in O \subseteq U$ ist unsere Umgebung U von a auch eine Umgebung von a^*.

Zu (4). Ist $\mathcal{X}$ halbmetrischer separabler Raum, so ist jeder Unterraum $\mathcal{U}$ ebenfalls halbmetrischer Raum. Nun gilt für halbmetrische Räume $\mathcal{X}$ gilt bekanntlich:

$\mathcal{X}$ ist separabel $\Leftrightarrow$ $\mathcal{X}$ erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom (d.h. besitzt eine abzählbare Basis)

(Beweis zu $\Rightarrow$: ist $\mathcal{B}$ abzählbare Basis von $\mathcal{X}$, so erhält man eine abzählbare dichte Menge, wenn man aus jeder nichtleeren Basismenge einen Punkt aussucht;
Beweis zu $\Leftarrow$: ist D eine abzählbare dichte Menge, so bilden die Bälle $\mathbb{B}_r(x)$ mit $x \in D$ und rationalem $r > 0$ eine abzählbare Basis).

Der Satz folgt also aus der trivialen Tatsache, dass der Unterraum $\mathcal{U}$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, wenn $\mathcal{X}$ dieses Axiom erfüllt. ■

(Halb)metrische und topologische Vektorräume

Nr. 353 (Def) topologischer Vektorraum

$(V, +, \cdot, \mathfrak{O})$ heißt *topologischer* $\mathbb{K}$-*Vektorraum*
$:\Leftrightarrow$ $(V, +, \cdot)$ ist $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(V, \mathfrak{O})$ topologischer Raum und

1. Die Additionsfunktion add vom topologischen Produktraum $V \times V$ in V mit $\forall\ (v, w) \in V^2$ $\operatorname{add}((v, w)) := v + w$ ist stetig
2. Die Skalarmultiplikationsfunktion scal vom topologischen Produktraum $\mathbb{K} \times V$ in V mit $\forall\ (\lambda, v) \in \mathbb{K} \times V$ $\operatorname{scal}((\lambda, v)) := \lambda v$ ist stetig

Beispiele Beispielsweise sind *halbnormierte* Vektorräume topologische Räume, da die Addition und die Skalarmultiplikation eines halbnormierten Raumes bekanntlich (in der vom halbnormierten Vektorraum induzierten Topologie) stetig sind. Als weitere Beispiele topologischer Vektorräume sollen diejenigen vorgestellt werden, die von einer Halbmetrik induziert werden. Ist ein Vektorraum und eine *Halbmetrik* mit gleichem Träger gegeben, so lässt sich die Stetigkeit der beiden Vektorraum-Operationen beweisen, wenn drei Zusatzaxiome erfüllt sind, welche die Halbmetrik mit der Addition und der Skalarmultiplikation in Beziehung setzen (vgl. [Kel 63, Problem C(a), S. 51-52]). Es ist zweckmäßig, diese Voraussetzungen in einem eigenen Begriff („halbmetrischer Vektorraum") zusammenzufassen:

Nr. 354 (Def) (halb)metrischer $\mathbb{K}$-Vektorraum

$(V, +, \cdot, d)$ heißt *halbmetrischer* $\mathbb{K}$-*Vektorraum* bzw. *metrischer* $\mathbb{K}$-*Vektorraum* $:\Leftrightarrow$
$(V, +, \cdot)$ ist $\mathbb{K}$-Vektorraum, (V, d) halbmetrischer bzw. metrischer Raum und es gilt

1. (Translationsinvarianz) $\forall\ u, v, w \in V\ d(u, v) = d(u + w, v + w)$
2. (Stauchungsbedingung) $\forall\ \lambda \in \mathbb{K}, v \in V\ |\lambda| \leq 1 \ \Rightarrow\ d(\lambda v, 0) \leq d(v, 0)$
3. (Konvergenzbedingung) $\forall\ v \in V\ \lim_{k\to\infty} d(\frac{1}{k}v, 0) = 0$

Nr. 355 (Satz) Eigenschaften halbmetrischer Vektorräume

Sei $\mathcal{V} := (V, +, \cdot, d)$ *halbmetrischer* $\mathbb{K}$-*Vektorraum.*

1. $\forall\ u, v \in V\ \ d(u \pm v, 0) \leq d(u, 0) + d(v, 0)$
2. $\forall\ u, v \in V\ \ d(u, v) \leq d(u, 0) + d(v, 0)$ *und* $\forall\ k \in \mathbb{N}\ d(nv, 0) \leq kd(v, 0)$
3. $\forall\ v \in V\ \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}\ \ |\lambda| \leq |\mu| \ \Rightarrow\ d(\lambda v) \leq d(\mu v)$

Beweis. Zu (1). $d(a + c, 0)$ ist per Dreiecksungleichung $\leq d(a + c, a) + d(a, 0)$, das ist per Translationsinvarianz $\leq d(a, 0) + d(c, 0)$. Daher ist auch $d(a - c, 0) \leq d(a, 0) + d(-c, 0) = d(a, 0) + d((-1)c, 0)$, das ist per Stauchungsbedingung $\leq d(a, 0) + d(c, 0)$.
Zu (2). Per Translationsinvarianz und (1) folgt $d(u, v) = d(u - v, 0) \leq d(u, 0) + d(v, 0)$. Die zweite Behauptung $\forall\ k \in \mathbb{N}\ d(kv, 0) \leq kd(v, 0)$ folgt dann durch vollständige Induktion.
Zu (3). Klar, wenn $|\lambda| = |mu|$; ist $|\lambda| < |\mu|$, so $|\frac{\lambda}{\mu}| \leq 1$ und $d(\lambda v) = d(\frac{\lambda}{\mu}\mu v) \underset{Stauchungsbedingung}{\leq} d(\mu v)$.
■

Nr. 356 (Satz und Def) (halb)normierter als (halb)metrischer Vektorraum

Ist $\mathcal{V} := (V, +, \cdot, n)$ (halb)normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum mit induzierter Metrik d,
so ist $(V, +, \cdot, d)$ (halb)metrischer $\mathbb{K}$-Vektorraum, der *von $\mathcal{V}$ induziert* heißt.
WkM identifizieren wir diese beiden Räume miteinander.

Beweis. Sei $u, v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.
Zur Translationsinvarianz. $d(u, v) = n(u - v) = n(u + w - (v + w)) = d(u + w, v + w)$.
Zur Stauchungsbedingung. $|\lambda| \leq 1$ *ji* $d(\lambda u, 0) = n(\lambda u - 0) = |\lambda| n(u) \leq n(u - 0) = d(u, 0)$.
Zur Konvergenzbedingung. $\lim_{k\to\infty} d(\frac{1}{k}v, 0) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} n(v) = n(v) \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = n(v)0 = 0$. ∎

Nr. 357 (Satz und Def) halbmetrischer als topologischer Vektorraum

Sei $\mathcal{V} := (V, +, \cdot, d)$ halbmetrischer $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathfrak{O}$ die Topologie von (V, d).
Dann ist $(V, +, \cdot, \mathfrak{O})$ ein topologischer Vektorraum und heißt *von $\mathcal{V}$ induziert*.
Wir identifizieren wkM $\mathcal{V}$ mit dem induzierten topologischen Vektorraum.

Beweis. Zur Stetigkeit der Addition. Für $(v, w), (x, y) \in V^2$ gilt per Translationsinvarianz $d(v + w, x + y) = d((v - x) + (w - y), 0)$, das ist nach Satz 355(1) $\leq d(v - x, 0) + d(w - y, 0)$, also wieder per Translationsinvarianz $= d(v, x) + d(w, y) \leq 2 \max\{d(v, x), d(w, y)\}$, wobei das letztere Maximum der Abstand zwischen (v, w) und (x, y) im Produktraum $V \times V$ ist. Daher ist die Addition Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 2.

Zur Stetigkeit der Skalarmultiplikation. Sei $(\lambda, v) \in \mathbb{K} \times V$ und $\varepsilon > 0$. Gesucht ist ein $\delta > 0$, so dass für alle $u \in V$ und $\mu \in \mathbb{K}$ mit $|\mu - \lambda| < \delta$ und $d(u, v) < \delta$ gilt $d(\lambda v, \mu u) < \varepsilon$.
Zunächst gilt für beliebiges $\mu \in \mathbb{K}$ und $u \in V$ per Translationsinvarianz, dass $d(\mu u, \lambda v) = d((\mu - \lambda)u + \lambda u, \lambda v) = d((\mu - \lambda)u, \lambda(v - u))$, also folgt wegen Satz 355(2), dass

(A) $d(\mu u, \lambda v) \leq d((\mu - \lambda)u, 0) + d(\lambda(v - u), 0)$.

Wir wählen nun eine beliebige natürliche Zahl $\ell \in \mathbb{N}^{\odot}$ mit $|\lambda| \leq \ell$. Wegen $|\lambda| \leq |\ell|$ gilt dann $d(\lambda(v - u), 0) \underset{Satz\ 355(3)}{\leq} d(\ell(v - u), 0) \underset{Satz 355(2)}{\leq} \ell d(v - u, 0)$. Aus (A) folgt daher

(B) $d(\mu u, \lambda v) \leq d((\mu - \lambda)u, 0) + \ell d(v - u, 0)$.

Wegen der Konvergenzbedingung gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}^{\odot}$ mit für alle $n \geq n_0$: $d(\frac{1}{n}u, 0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Nehmen wir also ein positives δ, das $\leq \frac{1}{n_0}$ ist, so folgt für alle Skalare α mit $|\alpha| < \delta$, dass $|\alpha| < |\frac{1}{n_0}|$ und darum $d(\alpha u, 0) \underset{Satz 355(3)}{\leq} d(\frac{1}{n_0}u, 0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Insbesondere gilt für alle Skalare μ mit $|\mu - \lambda| < \delta$, dass $d((\mu - \lambda)u, 0) < \frac{\varepsilon}{2}$, und aus (B) folgt

(C) $d(\mu u, \lambda v) < \frac{\varepsilon}{2} + \ell d(v - u, 0)$.

Schließlich wählen wir als δ konkret die Zahl $\min\{\frac{1}{n_0 \ell}, \frac{\varepsilon}{2\ell}\}$. Dann ist $\delta \leq \frac{1}{n_0}$, also gilt (C). Außerdem ist $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2\ell}$. Für v mit $d(v, u) < \delta$ gilt dann per Translationsinvarianz, dass $d(v - u, 0) < \delta \leq \frac{\varepsilon}{2\ell}$, also $\ell d(v - u, 0) < \frac{\varepsilon}{2}$ und zusammen mit (C) folgt $d(\mu u, \lambda v) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. ∎

Literaturverzeichnis

[Ama 98] Amann, Herbert, und Escher, Joachim: Analysis I. Birkhäuser, Basel, 1998

[Ama 99] Amann, Herbert, und Escher, Joachim, Analysis II, Birkhäuser Basel, 1999

[Aul 90] Aulbach, Bernd: Analysis auf Zeitmengen. Skript zu einem Proseminar, durchgeführt vom 26. Februar bis 5. März 1989 in Sion/Schweiz. Augsburg, 1990.

[Bau 89] Bauer, Heinz: Maß- und Integrationstheorie. Springer, Berlin, 2. Auflage 1992

[Boc 33] Bochner, Salomon: Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraums sind. In: Fundamenta Mathematicae 20(1933), S.262–276

[Boh 00] Bohner, Martin und Peterson, Allan: Linear Differential Equations on Measure Chains (Buch in Vorbereitung). Internet-Version vom 22. August 2000.

[Cra 82] Craven, Bruce D.: Lebesgue Measure & Integral. Pitman, Boston, 1982

[Coh 80] Cohn, Donald L.: Measure Theory. Birkhäuser, Boston, 1980

[Die 85] Dieudonné, Jean A.: Grundzüge der modernen Analysis, Band 1. Vieweg, Braunschweig, 1985

[Els 99] Elstrodt, Jürgen: Maß- und Integrationstheorie. Springer, Berlin, 2. Auflage 1999

[Heu 89] Heuser, Harro: Lehrbuch der Analysis. Teil 1. Teubner, Stuttgart, 5. Auflage, 1989

[Hil 88] Hilger, Stefan: Ein Maßkettenkalkül mit Anwendungen auf Zentrumsmannigfaltigkeiten. Dissertation zur Erlangung des naturwissenschaftlichen Doktorgrades der Bayrischen Julius-Maximilians-Universität Würzburg. 1988.

[Hil 90] Hilger, Stefan: Analysis on Measure Chains. A Unified Approach to Continuous and Discrete Calculus. In: Results in Mathematics 10 (1990), S. 18-56.

[Kel 63] Kelley, John L. und Namioka, Isaac: Linear Topological Spaces. Springer, New York, 1963

[Köt 66] Köthe, Gottfried: Topologische Lineare Räume. Springer, Berlin, 1966

[Lak 96] Lakshmikantham, V., Sivasundaram, S., und Kaymakcalan, B.: Dynamic Systems on Measure Chains. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996

[Lang 93] Lang, Serge: Real and Functional Analysis. Springer, New York, 3. Auflage, 1993

[Mik 78] Mikusinski, Jan: The Bochner Integral. Birkhäuser, Basel, Stuttgart, 1978

[Obe 94] Oberschelp, Arnold: Allgemeine Mengenlehre. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994