Unendlichkeit als Schlüssel zur Metaphysik

Dr. Ludwig Neidhart

Altenberg, 22.02.2020

(Cusanuswerk, Ferienakademie VIII / 2019–2020)

Die tiefsten Rätsel der Philosophie ...

... haben mit dem Unendlichen zu tun.

Mit diesen Rätseln befasst sich vorwiegend die so genante Metaphysik.

Einteilung der Metaphysik

allgemeine	Metaphysik
spezielle	Metaphysik

Einteilung der Metaphysik

allgemeine Metaphysik = Ontologie:

spezielle Metaphysik

Einteilung der Metaphysik

allgemeine Metaphysik = Ontologie: **Lehre vom Sein im Allgemeinen**

spezielle Metaphysik

Einteilung der Metaphysik

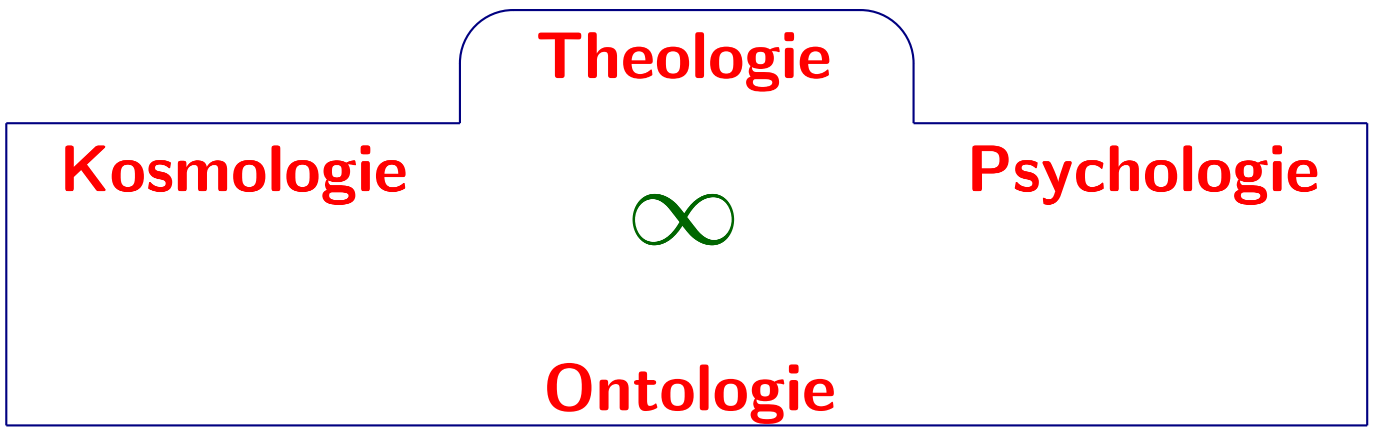
allgemeine	Metaphysik	= Ontologie:	Lehre vom Sein im Allgemeinen
		1. Theologie:	
spezielle	Metaphysik	2. Psychologie:	
		3. Kosmologie:	

Einteilung der Metaphysik

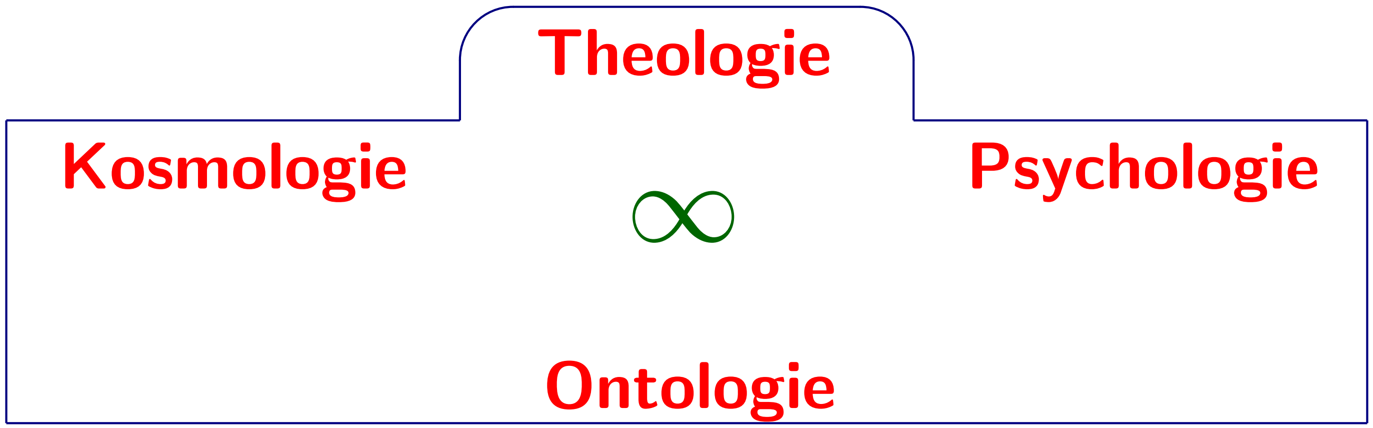
allgemeine	Metaphysik	= Ontologie:	Lehre vom Sein im Allgemeinen
		1. Theologie:	Lehre vom höchsten Sein
spezielle	Metaphysik	2. Psychologie:	Lehre vom Wesen des Menschen
		3. Kosmologie:	Lehre vom Weltganzen

Einteilung der Metaphysik

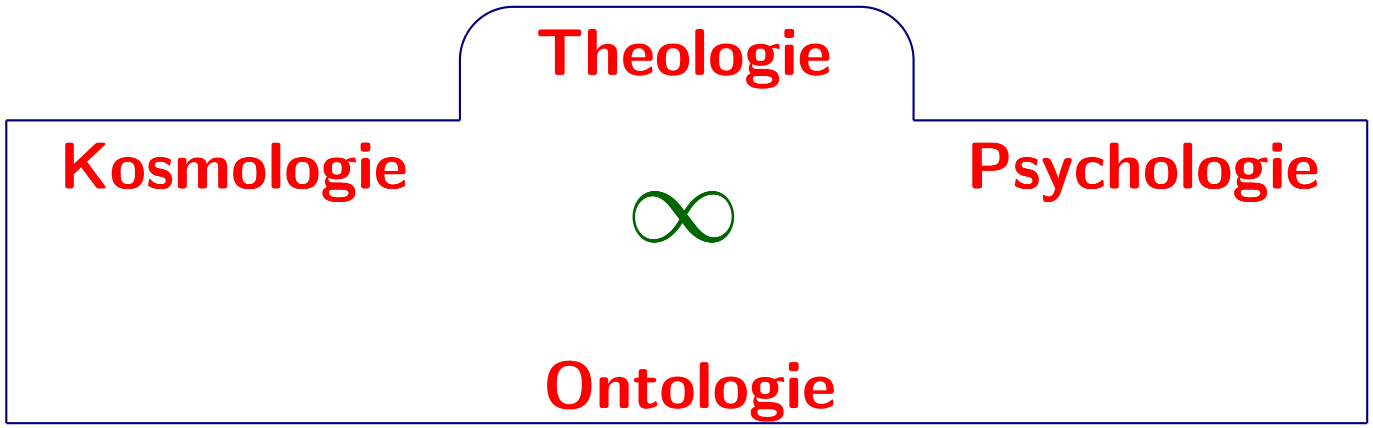
allgemeine	Metaphysik	= Ontologie:	Lehre vom Sein im Allgemeinen
		1. Theologie:	Lehre vom höchsten Sein
spezielle	Metaphysik	2. Psychologie:	Lehre vom Wesen des Menschen
		3. Kosmologie:	Lehre vom Weltganzen



Der Tempel der Wissenschaften



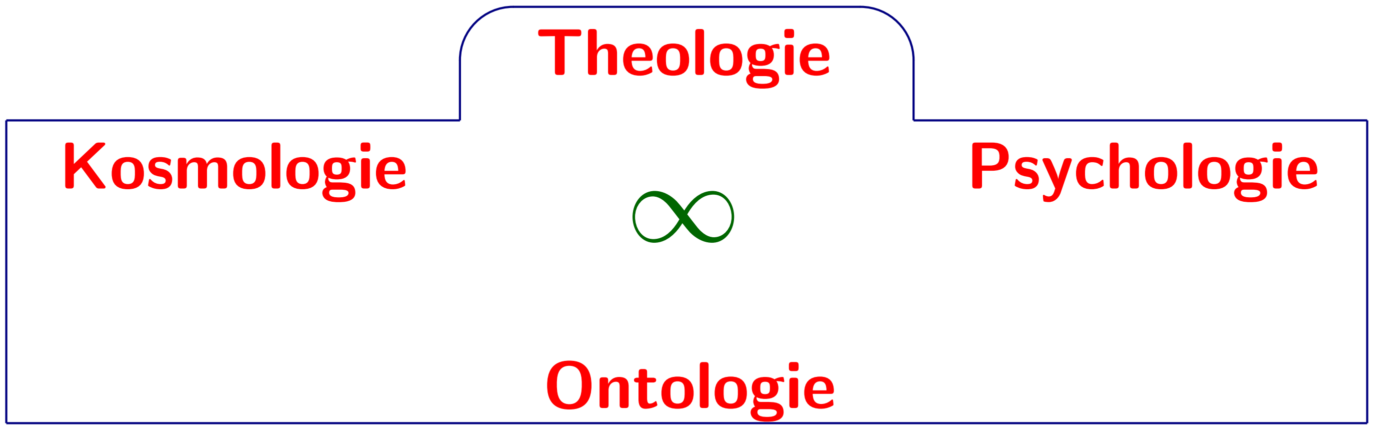
Der Tempel der Wissenschaften



Unendlichkeitsfragen:

Theologie: Gibt es ein absolut Unendliches jenseits der Welt?

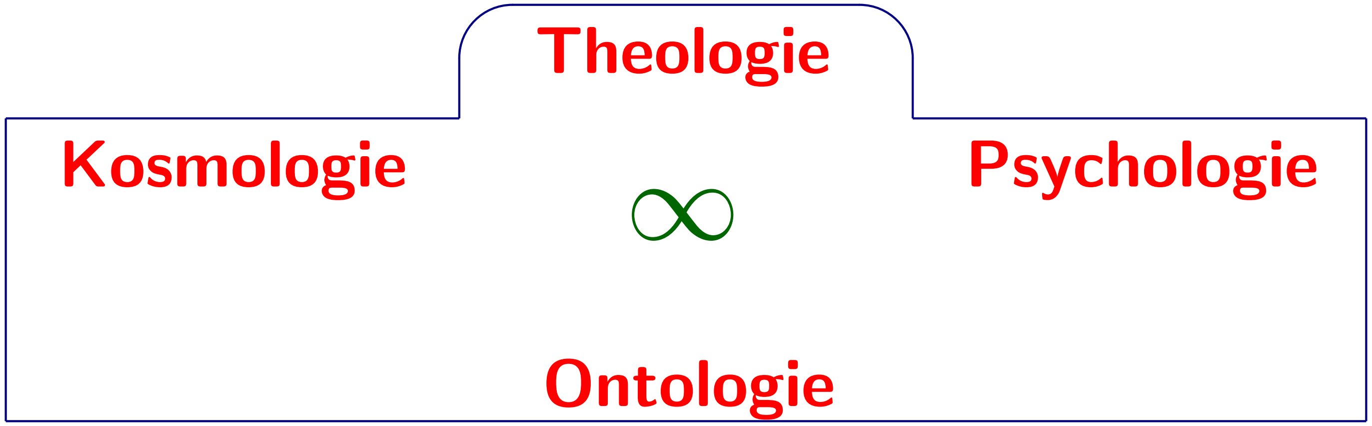
Der Tempel der Wissenschaften



Unendlichkeitsfragen:

Theologie:	**Gibt es ein absolut Unendliches jenseits der Welt?**
Psychologie:	**Kann der Mensch am Unendlichen teilnehmen?**

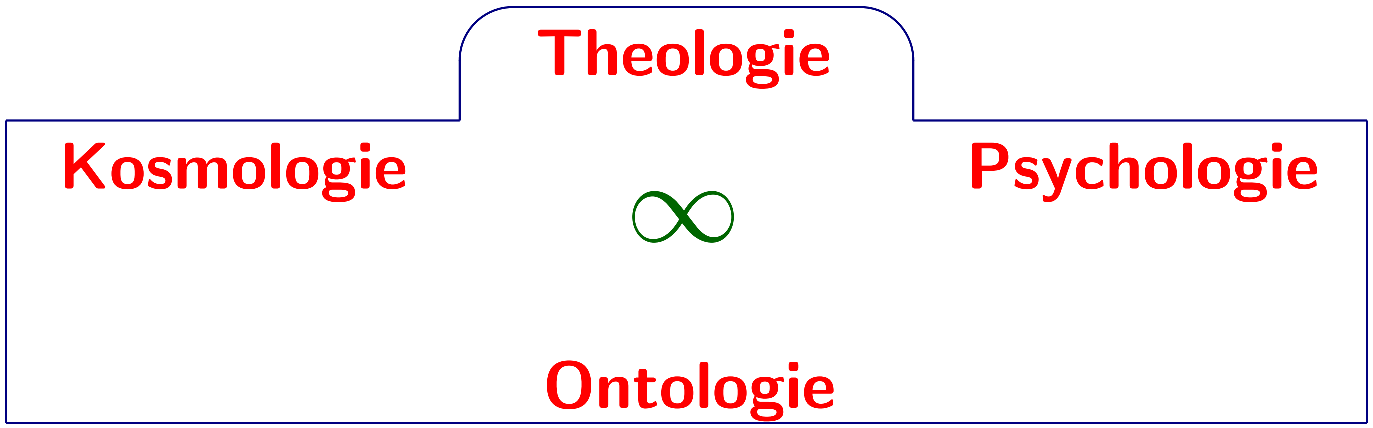
Der Tempel der Wissenschaften



Unendlichkeitsfragen:

Theologie:	**Gibt es ein absolut Unendliches jenseits der Welt?**
Psychologie:	**Kann der Mensch am Unendlichen teilnehmen?**
Kosmologie:	**Ist das Weltall räumlich oder zeitlich unendlich?**

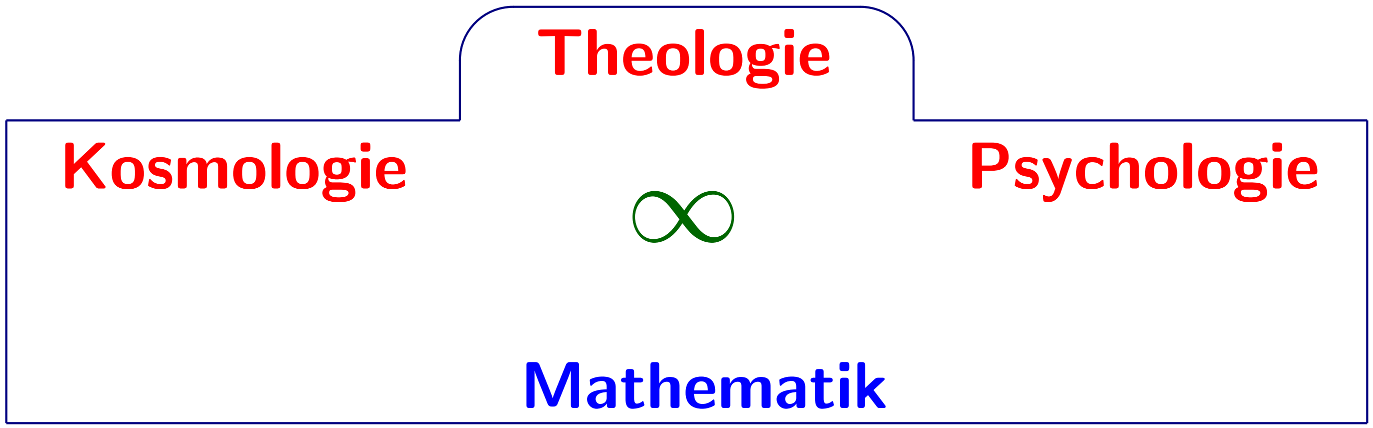
Der Tempel der Wissenschaften



Unendlichkeitsfragen:

Theologie:	Gibt es ein absolut Unendliches jenseits der Welt?
Psychologie:	Kann der Mensch am Unendlichen teilnehmen?
Kosmologie:	Ist das Weltall räumlich oder zeitlich unendlich?
Ontologie:	Ist das Unendliche widersprüchlich oder nicht?
	Wie ist es zu definieren und was sind seine Eigenschaften?

Der Tempel der Wissenschaften



Unendlichkeitsfragen:

Theologie:	Gibt es ein absolut Unendliches jenseits der Welt?
Psychologie:	Kann der Mensch am Unendlichen teilnehmen?
Kosmologie:	Ist das Weltall räumlich oder zeitlich unendlich?
Mathematik:	Ist das Unendliche widersprüchlich oder nicht?
	Wie ist es zu definieren und was sind seine Eigenschaften?

Der Tempel der Wissenschaften

Theologie

Kosmologie ∞ Psychologie

Mathematik

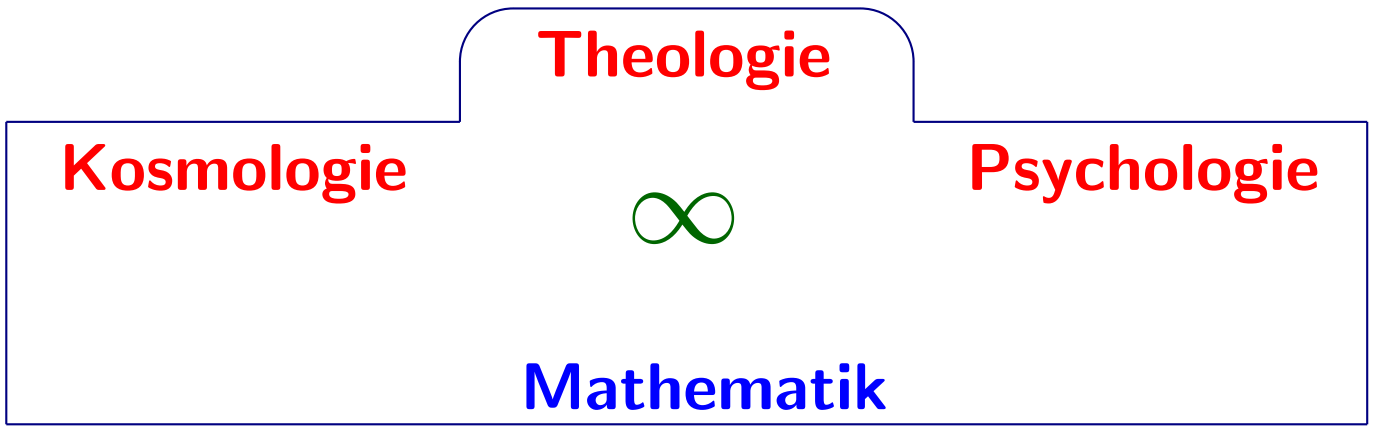
H. Weyl (1926): Mathematik ist die „Wissenschaft vom Unendlichen“.

Theologie

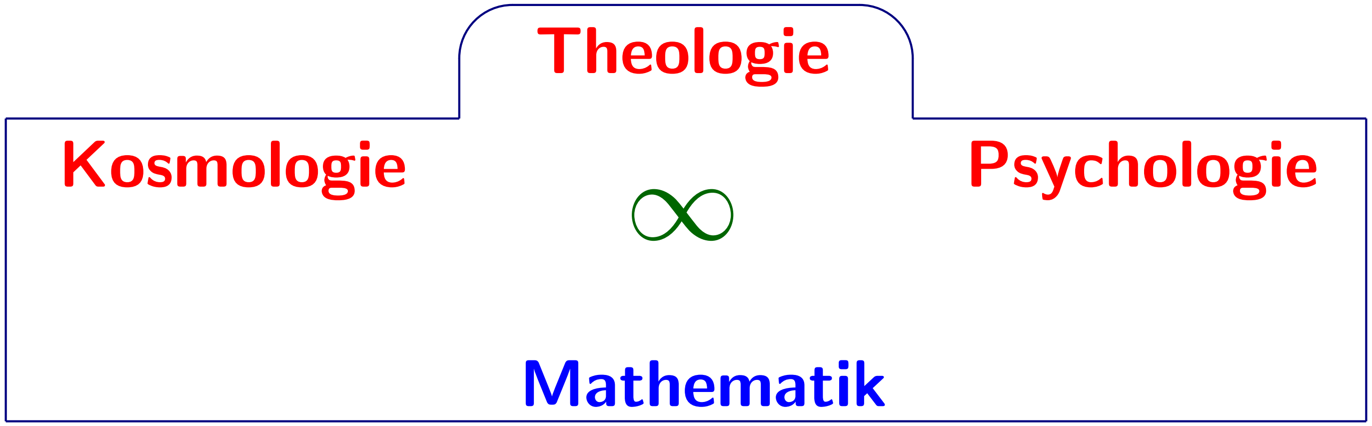
Kosmologie ∞ Psychologie

Mathematik

			Anstoß/Kernthema	
Erste Epoche	der Metaphysik:	Griechische Philosophie	Welt	(Kosmologie)
Niedergang	in der Zeit nach	Aristoteles (347 v. Chr.)		



				Anstoß/Kernthema	
Erste Epoche	der Metaphysik:	Griechische Philosophie		Welt	(Kosmologie)
Niedergang	in der Zeit nach	Aristoteles (347 v. Chr.)			
Zweite Epoche	der Metaphysik:	Christliche Philosphie		Gott	(Theologie)
Niedergang	in der Zeit nach	Thomas v. Aquin (1274)			



			Anstoß/Kernthema	
Erste Epoche	der Metaphysik:	Griechische Philosophie	Welt	(Kosmologie)
Niedergang	in der Zeit nach	Aristoteles (347 v. Chr.)		
Zweite Epoche	der Metaphysik:	Christliche Philosphie	Gott	(Theologie)
Niedergang	in der Zeit nach	Thomas v. Aquin (1274)		
Dritte Epoche	der Metaphysik:	Neuzeitliche Philosphie	Mensch	(Psychologie)
Niedergang	in der Zeit nach	Hegel (1831)		

Theologie

Kosmologie

∞

Psychologie

Mathematik

			Anstoß/Kernthema	
Erste Epoche	der Metaphysik:	Griechische Philosophie	Welt	(Kosmologie)
Niedergang	in der Zeit nach	Aristoteles (347 v. Chr.)		
Zweite Epoche	der Metaphysik:	Christliche Philosphie	Gott	(Theologie)
Niedergang	in der Zeit nach	Thomas v. Aquin (1274)		
Dritte Epoche	der Metaphysik:	Neuzeitliche Philosphie	Mensch	(Psychologie)
Niedergang	in der Zeit nach	Hegel (1831)		
Vierte Epoche	der Metaphysik:	Zukünftige Philosophie?	Mathematik?	(Ontologie?)

Berührungspunkte zwischen Mathematik/Logik und Philosophie ausloten!

1. Beide beschäftigen sich mit Dingen, die über diese Welt hinausgehen.
2. Beide rechnen mit der Existenz des Unendlichen.

$$\infty$$

II. Mathematische Erschließung

II.1. PARADOXIEN des Unendlichen

II.1. PARADOXIEN des Unendlichen

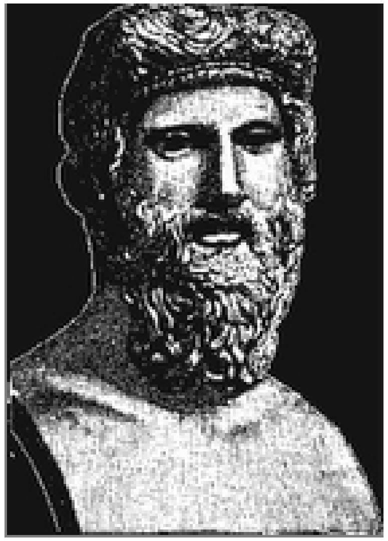
„paradox“: an der Meinung / Erwartung vorbei

II.1. PARADOXIEN des Unendlichen

„paradox“: an der Meinung / Erwartung vorbei,

unerwartet, seltsam, (anscheinend oder wirklich) widersprüchlich

Die drei Unendlichkeits-Krisen in der Mathematik

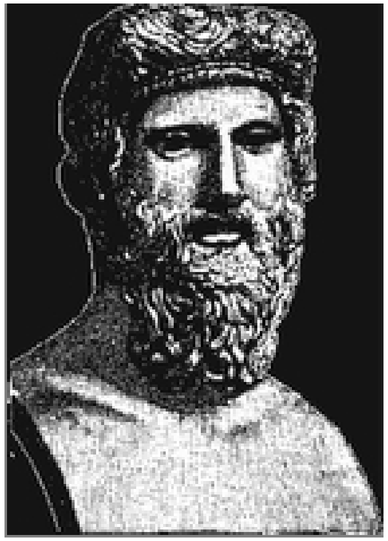


Hippasos von Metapont
(um 500 v.Chr.)

Newton und Leibniz
(1687 bzw. 1684)

Georg Cantor
(1874)

Die drei Unendlichkeits-Krisen in der Mathematik



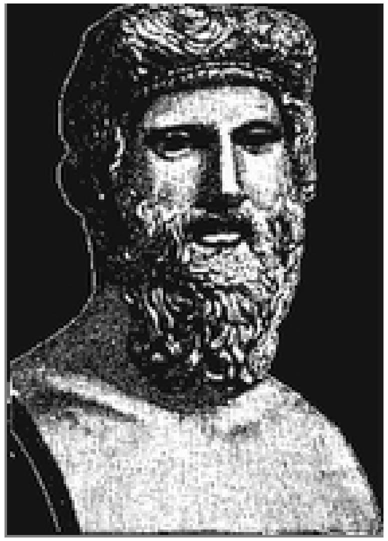
Hippasos von Metapont
(um 500 v.Chr.)

Newton und Leibniz
(1687 bzw. 1684)

Georg Cantor
(1874)

1. Hippasos: Notwendigkeit irrationaler Zahlen
$\Rightarrow$ unendliche Kettenbrüche oder nichtperiodische Dezimalzahlen

Die drei Unendlichkeits-Krisen in der Mathematik



Hippasos von Metapont
(um 500 v.Chr.)

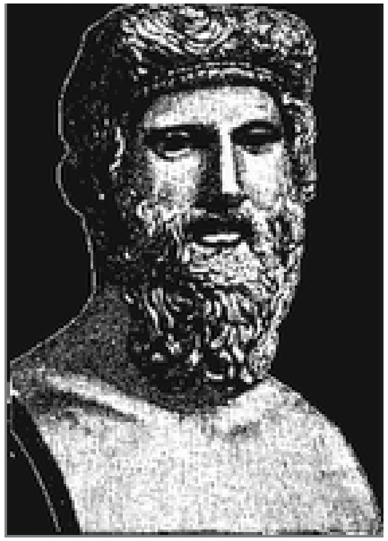
Newton und Leibniz
(1687 bzw. 1684)

Georg Cantor
(1874)

1. **Hippasos: Notwendigkeit irrationaler Zahlen**
   $\Rightarrow$ unendliche Kettenbrüche oder nichtperiodische Dezimalzahlen

2. **Newton und Leibniz: Einführung der Infinitesimalrechnung**
   $\Rightarrow$ Rechnen mit unendlich kleinen Größen

Die drei Unendlichkeits-Krisen in der Mathematik



Hippasos von Metapont
(um 500 v.Chr.)

Newton und Leibniz
(1687 bzw. 1684)

Georg Cantor
(1874)

1. Hippasos: Notwendigkeit irrationaler Zahlen
   $\Rightarrow$ unendliche Kettenbrüche oder nichtperiodische Dezimalzahlen

2. Newton und Leibniz: Einführung der Infinitesimalrechnung
   $\Rightarrow$ Rechnen mit unendlich kleinen Größen

3. Cantor: Konzeption der Mengenlehre
   $\Rightarrow$ Rechnen mit aktual unendlich großen Mengen und Zahlen

PARADOXIEN des Unendlichen

Carl-Friedrich Gauss (1777-1855)
„Fürst der Mathematiker“

“So protestiere ich ... gegen den Gebrauch einer unendlichen Größe als einer Vollendeten, welcher in der Mathematik niemals erlaubt ist.“

PARADOXIEN des Unendlichen

Bernhard Bolzano
(1781-1848)

DR. BERNARD BOLZANOS

PARADOXIEN
DES UNENDLICHEN

HERAUSGEGEBEN AUS DEM SCHRIFT-
LICHEN NACHLASSE DES VERFASSERS

VON

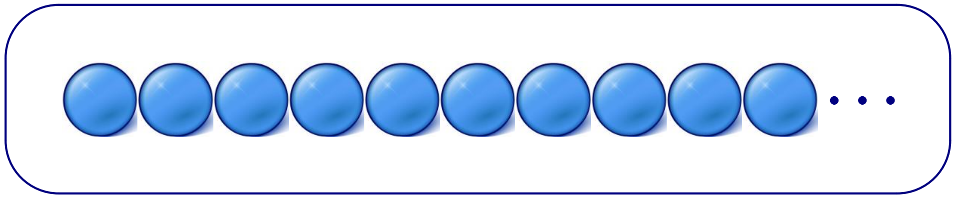
DR. FR. PŘIHONSKY

Je suis tellement pour l'infini actuel, qu'au lieu d'admettre, que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte par-tout, pour mieux marquer les perfections de son Auteur. (*Leibniz, Opera omnia studio Ludov. Dutens. Tom. II, part* 1, *p.* 243.)

LEIPZIG
BEI C. H. RECLAM SEN.
1851

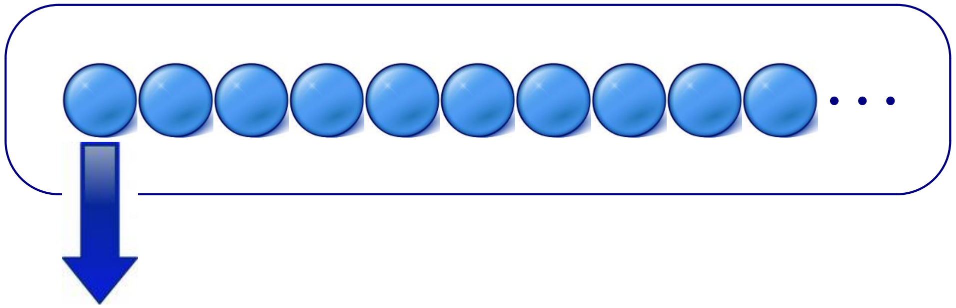
PARADOXIEN des Unendlichen

Das Unendliche ist unerschöpflich.
Es kann abgeben, ohne abzunehmen!
Der Teil ist nicht immer kleiner als das Ganze!



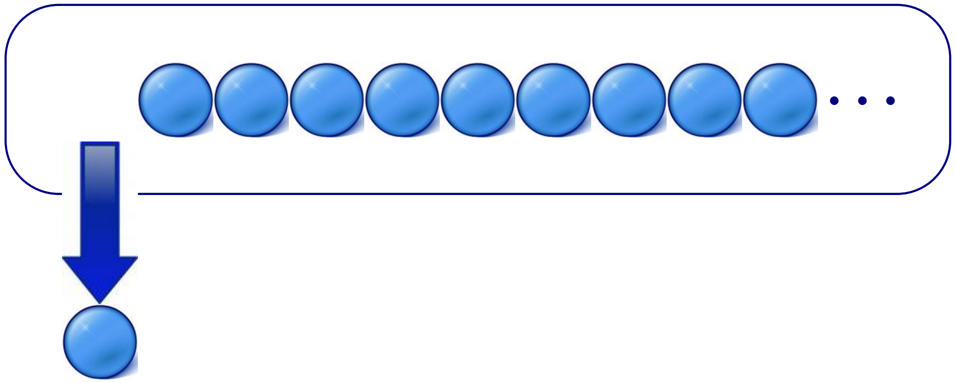
PARADOXIEN des Unendlichen

Das Unendliche ist unerschöpflich.
Es kann abgeben, ohne abzunehmen!
Der Teil ist nicht immer kleiner als das Ganze!



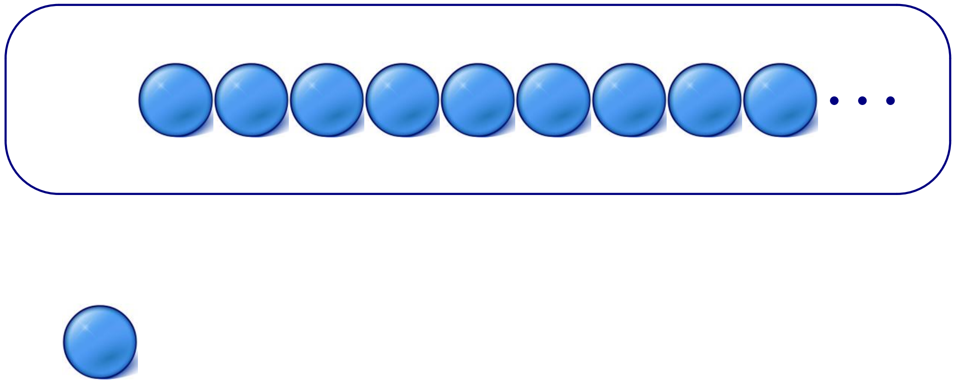
PARADOXIEN des Unendlichen

Das Unendliche ist unerschöpflich.
Es kann abgeben, ohne abzunehmen!
Der Teil ist nicht immer kleiner als das Ganze!



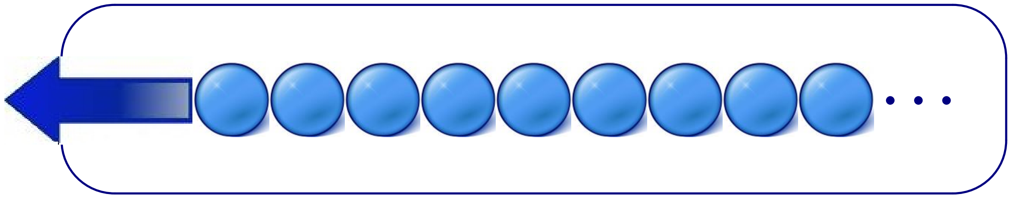
PARADOXIEN des Unendlichen

Das Unendliche ist unerschöpflich.
Es kann abgeben, ohne abzunehmen!
Der Teil ist nicht immer kleiner als das Ganze!



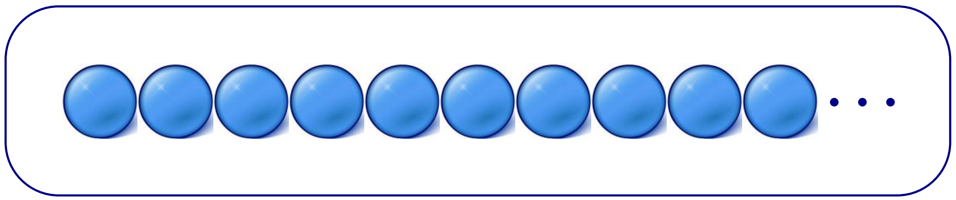
PARADOXIEN des Unendlichen

Das Unendliche ist unerschöpflich.
Es kann abgeben, ohne abzunehmen!
Der Teil ist nicht immer kleiner als das Ganze!



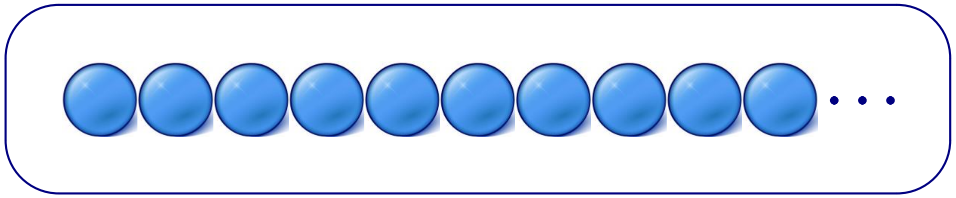
PARADOXIEN des Unendlichen

Das Unendliche ist unerschöpflich.
Es kann abgeben, ohne abzunehmen!
Der Teil ist nicht immer kleiner als das Ganze!



PARADOXIEN des Unendlichen

Das Unendliche ist unerschöpflich.
Es kann abgeben, ohne abzunehmen!
Der Teil ist nicht immer kleiner als das Ganze!

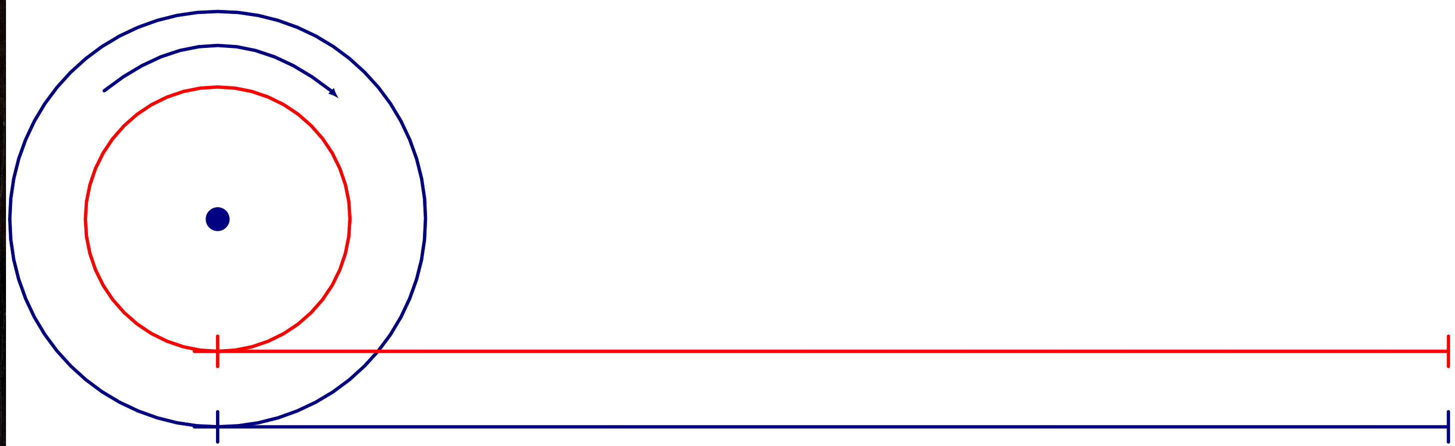


Diese Eigenschaft hat auch das Wissen und die Liebe.

PARADOXIEN des Unendlichen

Das Rad des Aristoteles / Rad des Galilei

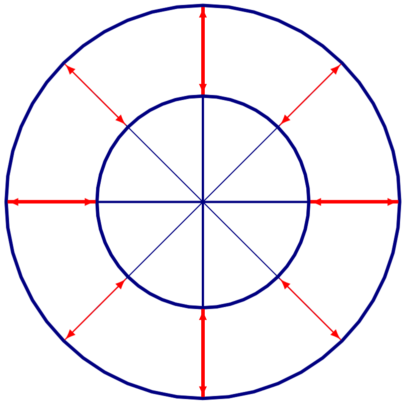
Galileo Galilei (564-1642)

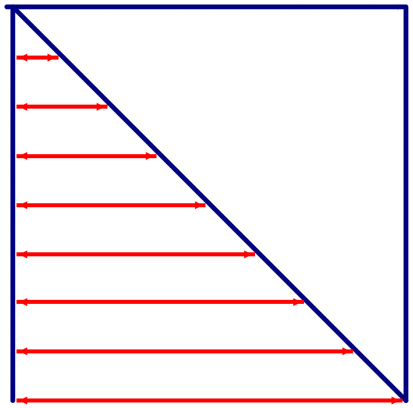


PARADOXIEN des Unendlichen

Die Beobachtungen von Duns Scotus

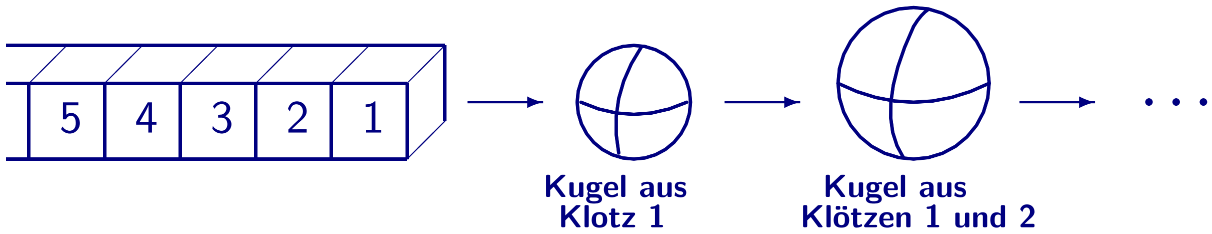
Duns Scotus (1266-1308)



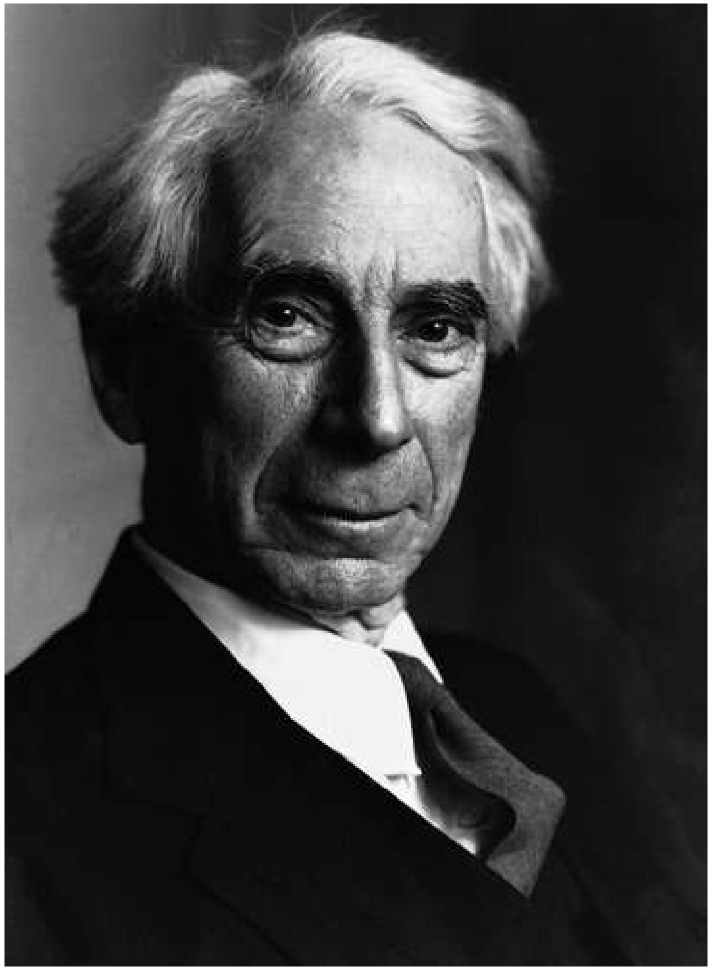


PARADOXIEN des Unendlichen

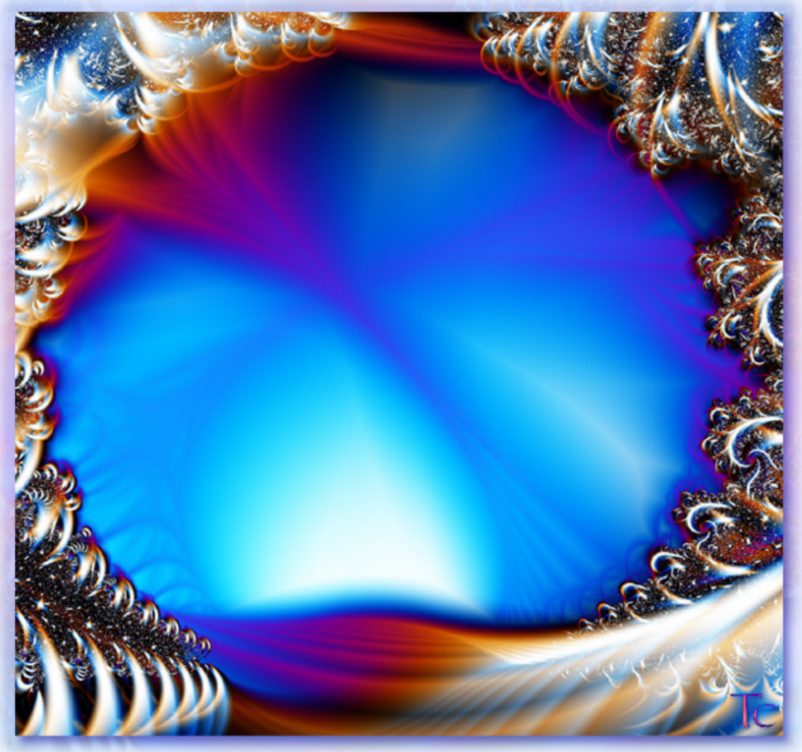
Albert von Sachsen (1316-1390): Ein unendlich langer Körper kann den ganzen unendlichen Raum ausfüllen.



PARADOXIEN des Unendlichen

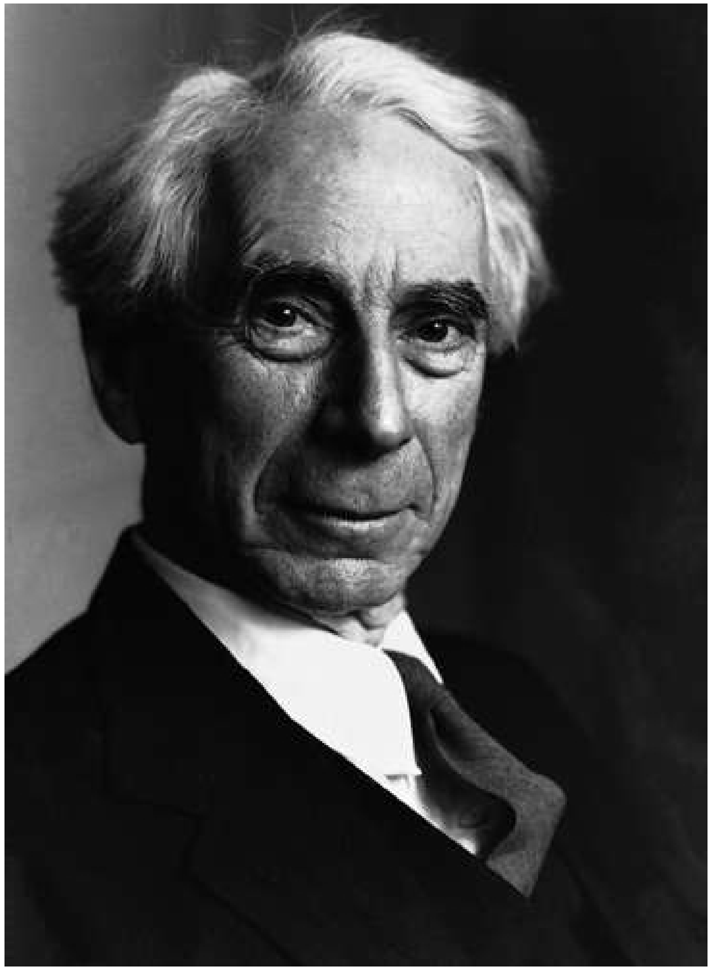


Bertrand Russell (1872-1970)

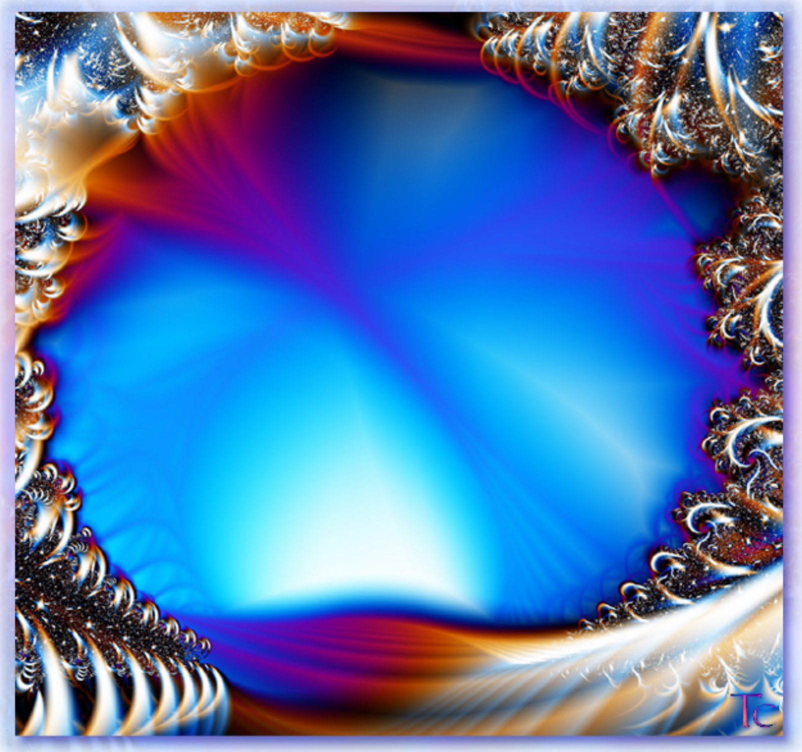


Die Russellsche Menge: sie enthält
„alle Mengen, die sich nicht selbst enthalten.“

PARADOXIEN des Unendlichen

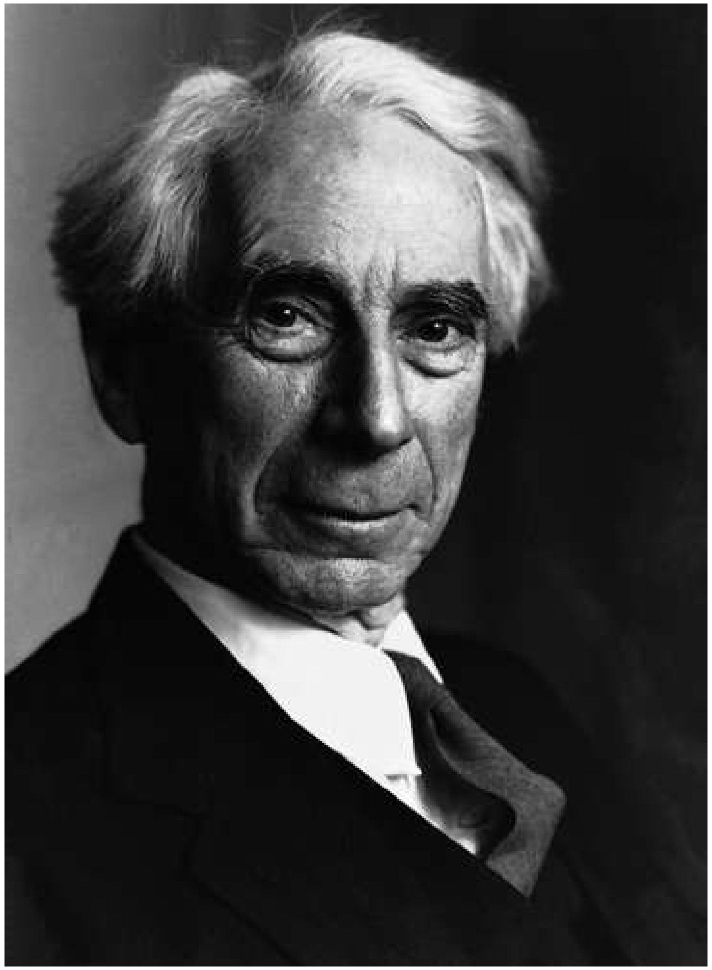


Bertrand Russell (1872-1970)

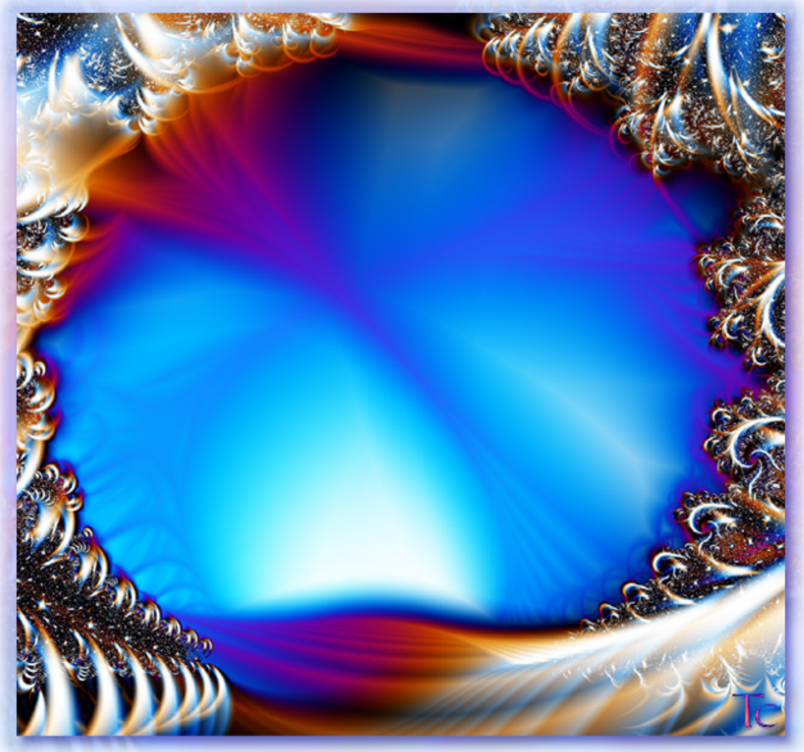


Die Russellsche Menge: sie enthält
„alle Mengen, die sich nicht selbst enthalten.“
Enthält die Russelsche Menge sich selber?

PARADOXIEN des Unendlichen

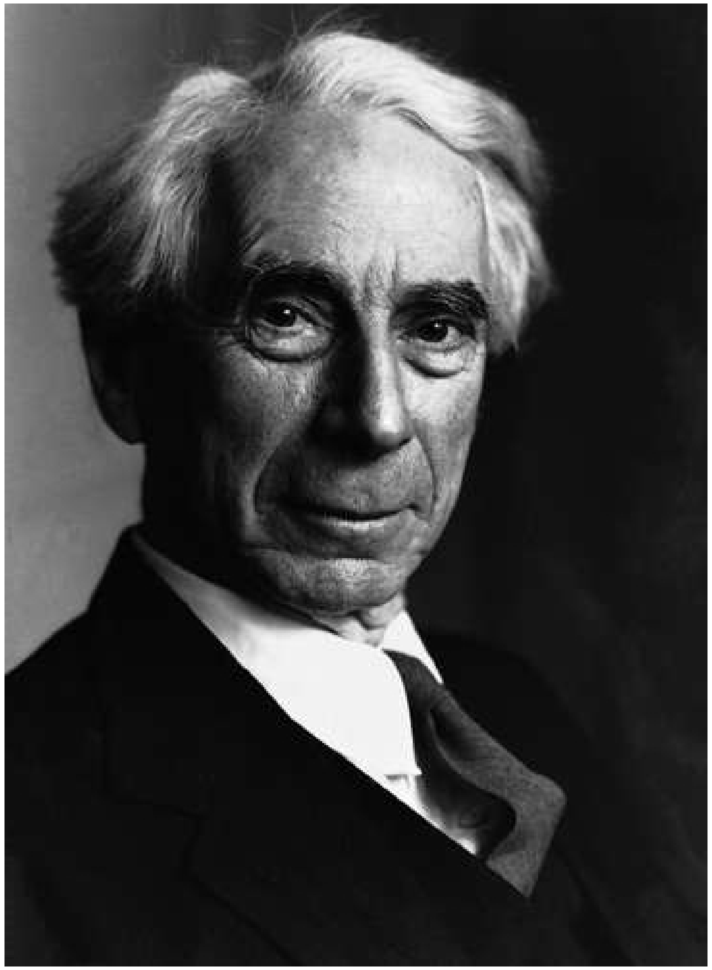


Bertrand Russell (1872-1970)

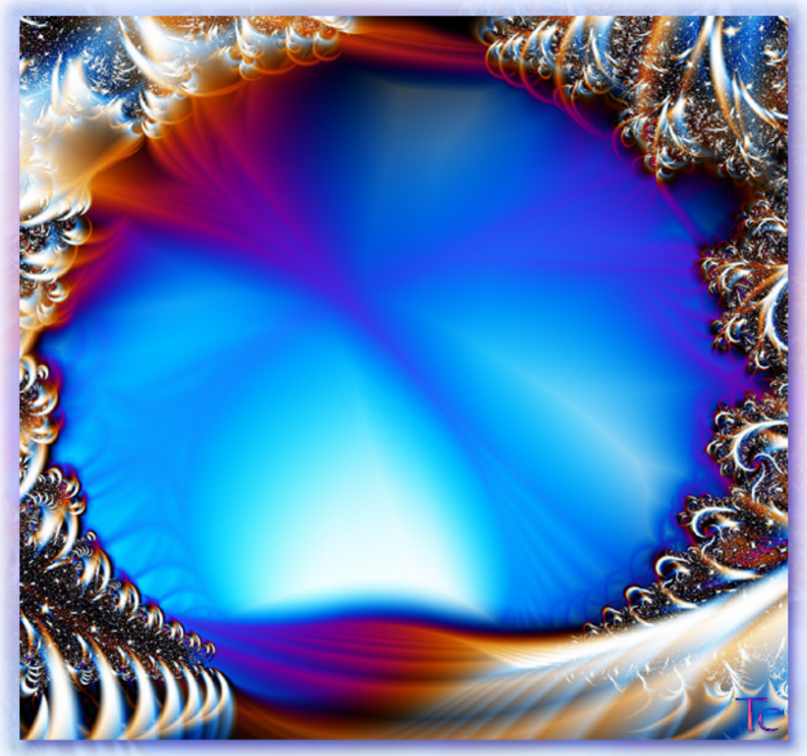


Die Russellsche Menge: sie enthält
„alle Mengen, die sich nicht selbst enthalten.“
Enthält die Russelsche Menge sich selber?
Wenn ja, dann nein. Wenn nein, dann ja!

PARADOXIEN des Unendlichen



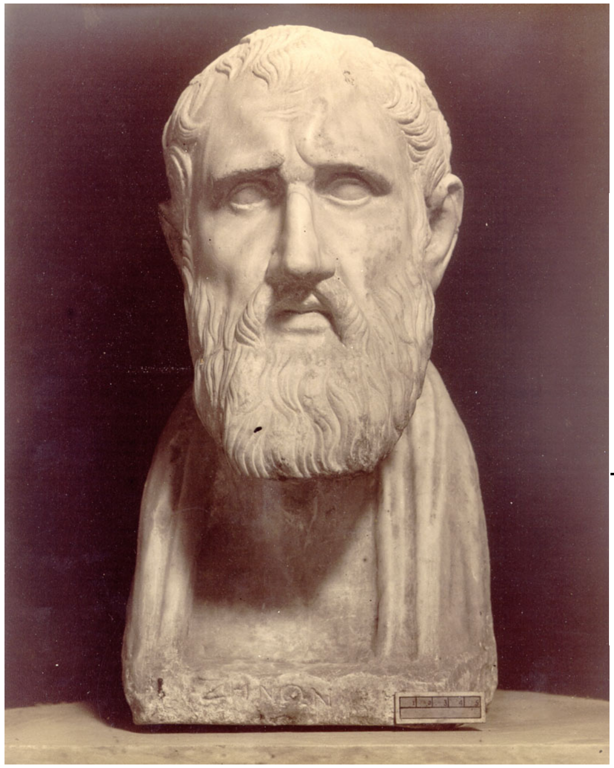
Bertrand Russell (1872-1970)



Die Russellsche Menge: sie enthält
„alle Mengen, die sich nicht selbst enthalten.“
Enthält die Russelsche Menge sich selber?
Wenn ja, dann nein. Wenn nein, dann ja!

Dies ist keine gewöhnliche unendliche Menge, sondern
die vollkommen unvorstellbare absolut unendliche Unmenge aller Mengen!

PARADOXIEN des Unendlichen



Zenon von Elea
(490-430 v. Chr.)

Achilles und die Schildkröte

PARADOXIEN des Unendlichen

Ein Supertask: unendlich viele Prozesse in endlicher Zeit

0 Uhr 1 Uhr

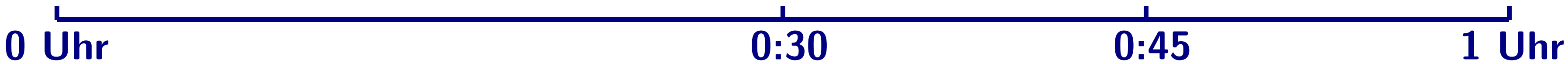
PARADOXIEN des Unendlichen

Ein Supertask: unendlich viele Prozesse in endlicher Zeit

0 Uhr 0:30 1 Uhr

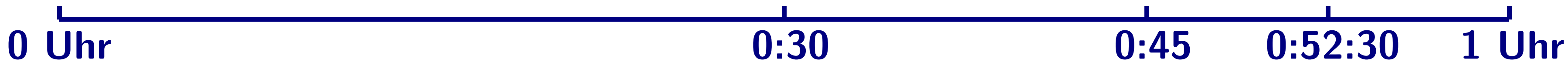
PARADOXIEN des Unendlichen

Ein Supertask: unendlich viele Prozesse in endlicher Zeit



PARADOXIEN des Unendlichen

Ein Supertask: unendlich viele Prozesse in endlicher Zeit



PARADOXIEN des Unendlichen

Ein Supertask: unendlich viele Prozesse in endlicher Zeit

0 Uhr 0:30 0:45 0:52:30 1 Uhr

Beispiel 1: Das Lampen-Paradoxon (James F. Thomson, 1954)

PARADOXIEN des Unendlichen

Ein Supertask: unendlich viele Prozesse in endlicher Zeit

0 Uhr — 0:30 — 0:45 — 0:52:30 — 1 Uhr

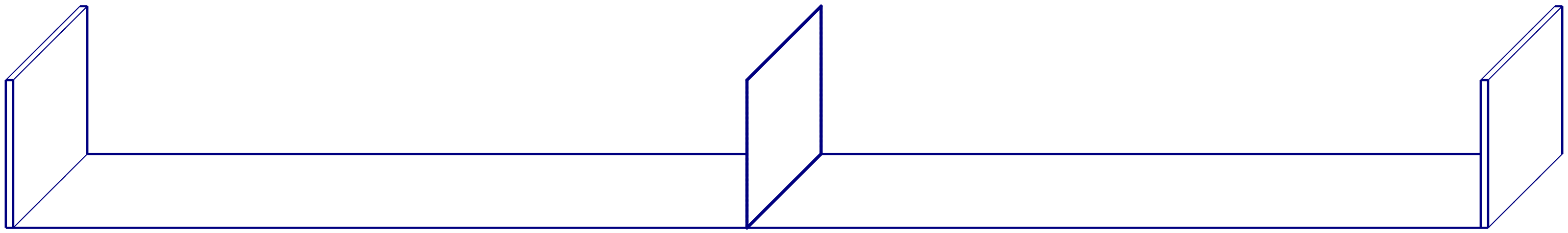
Beispiel 2: Die Unendlichkeits-Maschine (Max Black, 1951)

PARADOXIEN des Unendlichen

Richard Fitzralph (1295-1360)
Bischof von Armagh / Irland

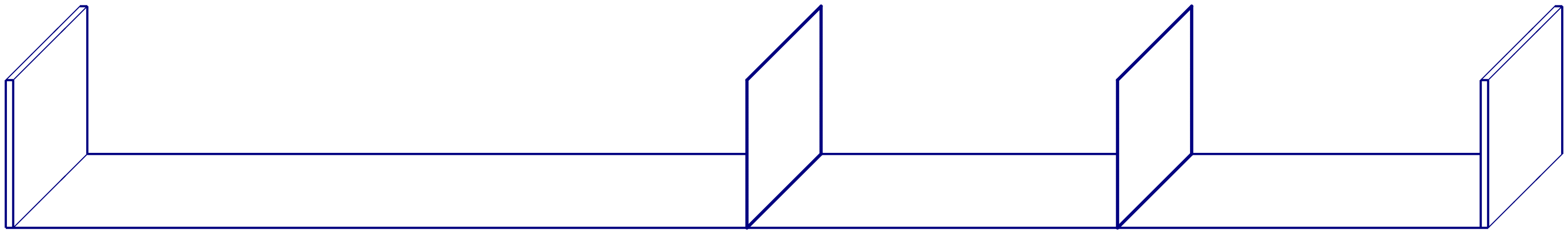
PARADOXIEN des Unendlichen

Richard Fitzralph (1295-1360)
Bischof von Armagh / Irland



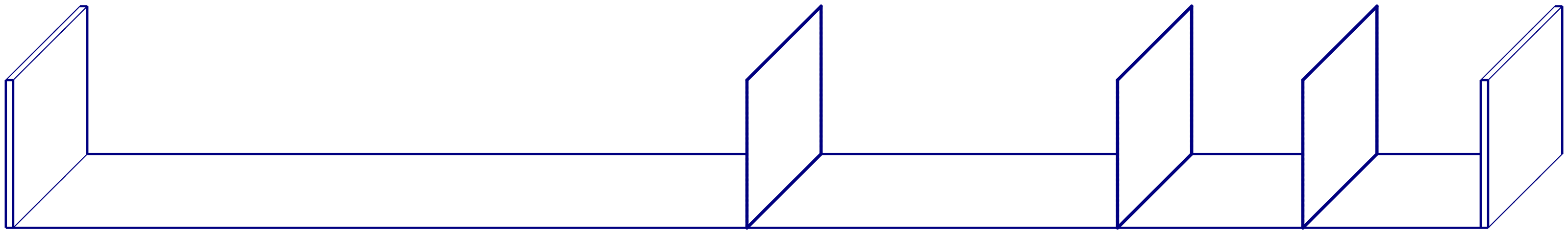
PARADOXIEN des Unendlichen

Richard Fitzralph (1295-1360)
Bischof von Armagh / Irland



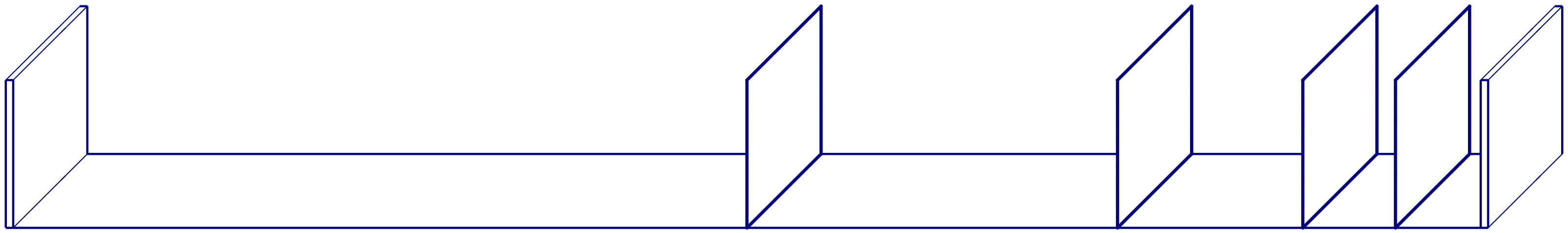
PARADOXIEN des Unendlichen

Richard Fitzralph (1295-1360)
Bischof von Armagh / Irland



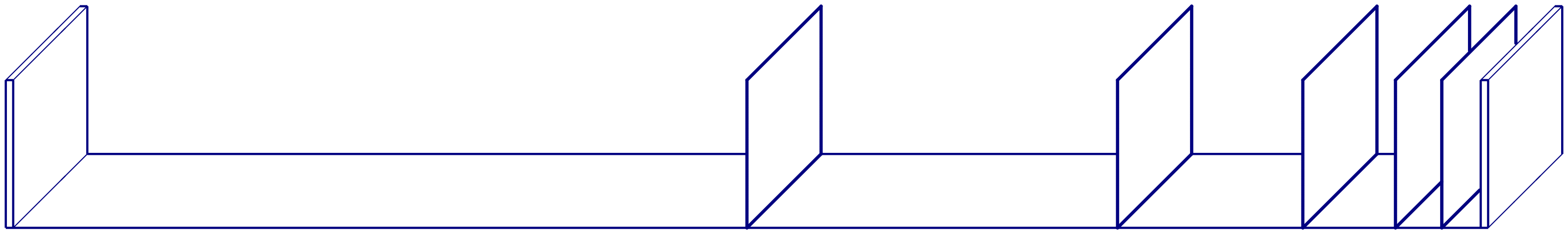
PARADOXIEN des Unendlichen

Richard Fitzralph (1295-1360)
Bischof von Armagh / Irland



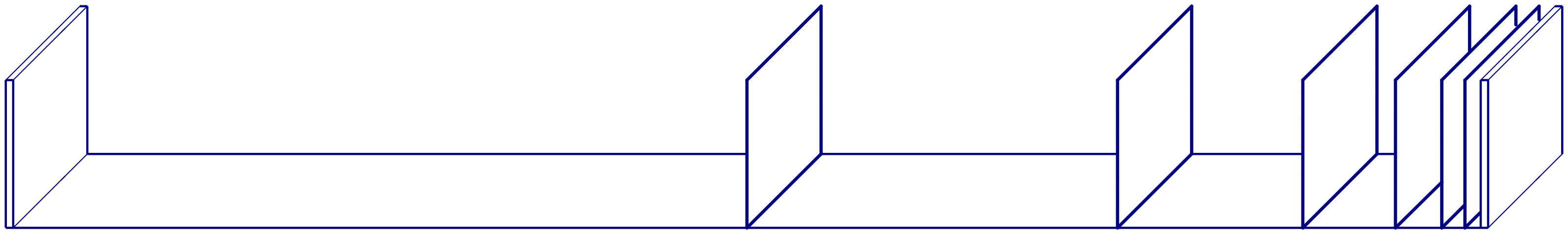
PARADOXIEN des Unendlichen

Richard Fitzralph (1295-1360)
Bischof von Armagh / Irland



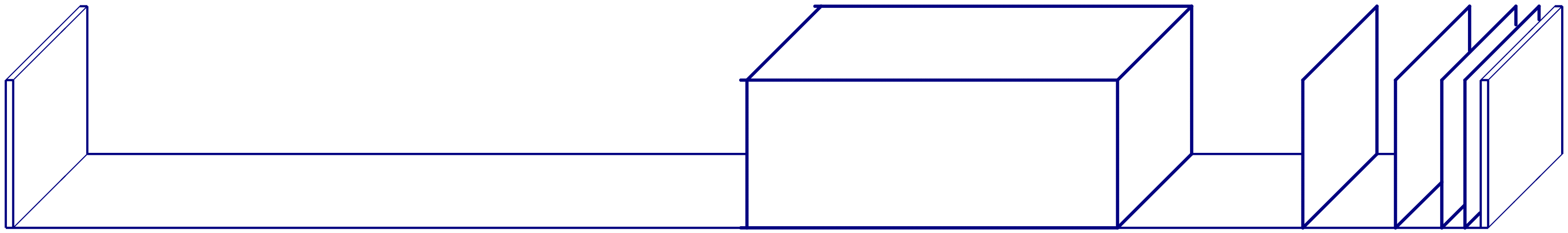
PARADOXIEN des Unendlichen

Richard Fitzralph (1295-1360)
Bischof von Armagh / Irland



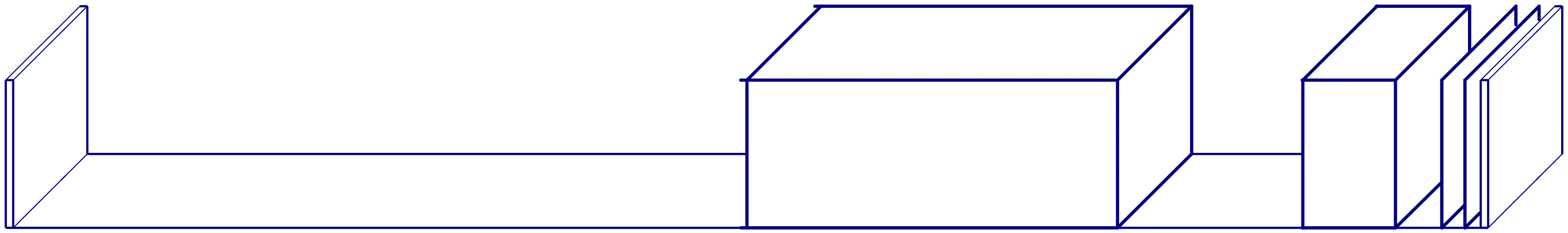
PARADOXIEN des Unendlichen

Richard Fitzralph (1295-1360)
Bischof von Armagh / Irland



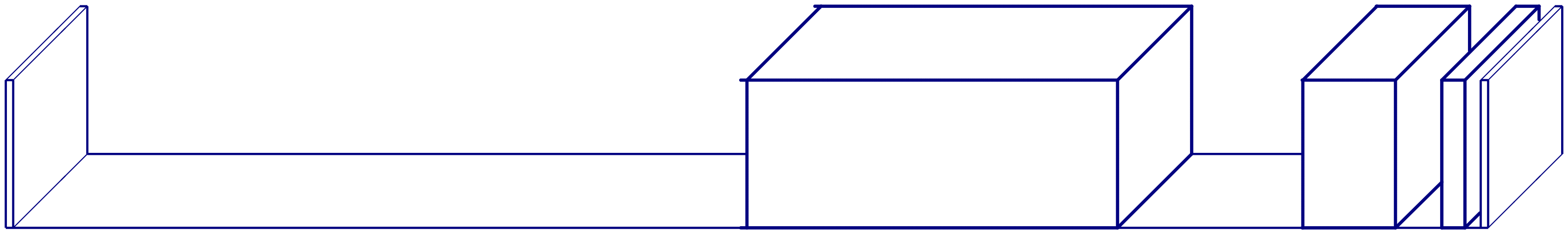
PARADOXIEN des Unendlichen

Richard Fitzralph (1295-1360)
Bischof von Armagh / Irland



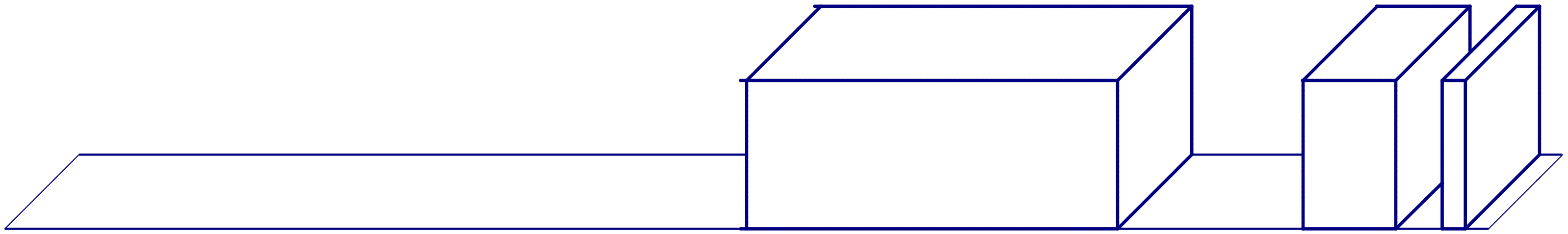
PARADOXIEN des Unendlichen

Richard Fitzralph (1295-1360)
Bischof von Armagh / Irland



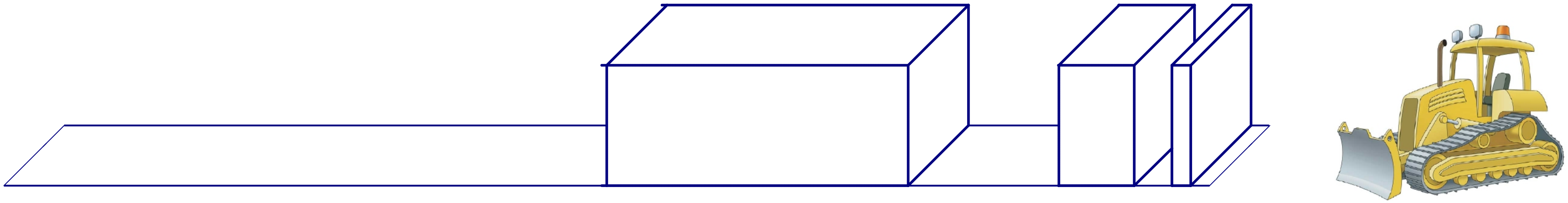
PARADOXIEN des Unendlichen

Richard Fitzralph (1295-1360)
Bischof von Armagh / Irland



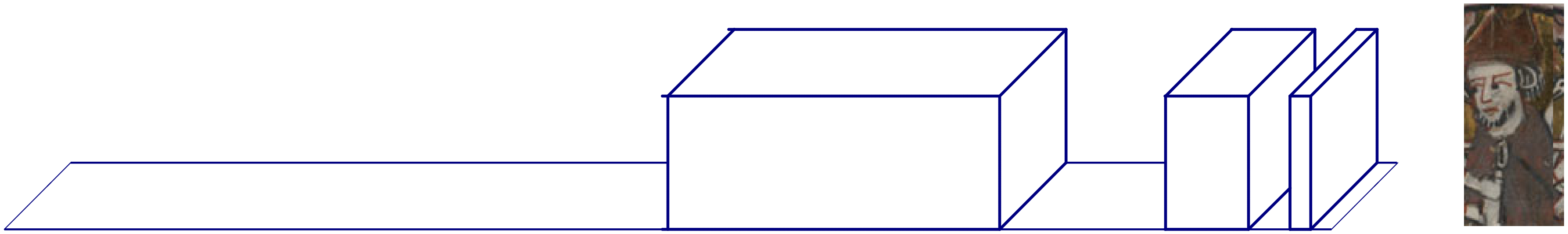
PARADOXIEN des Unendlichen

Richard Fitzralph (1295-1360)
Bischof von Armagh / Irland



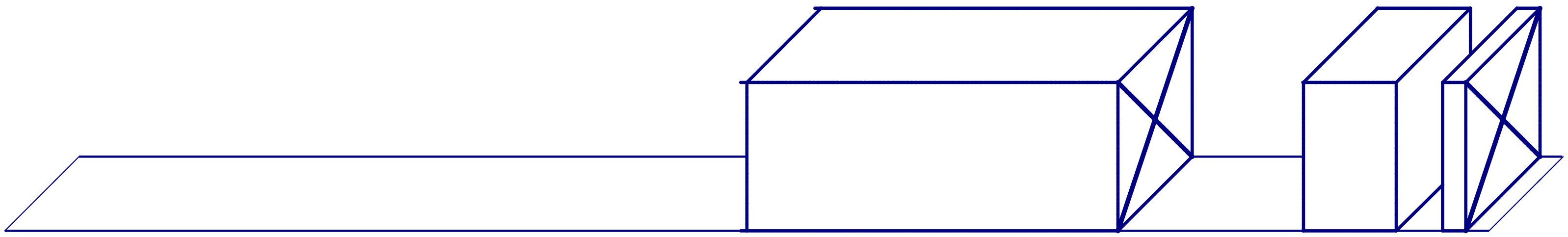
PARADOXIEN des Unendlichen

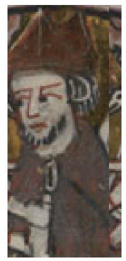
Richard Fitzralph (1295-1360)
Bischof von Armagh / Irland



PARADOXIEN des Unendlichen

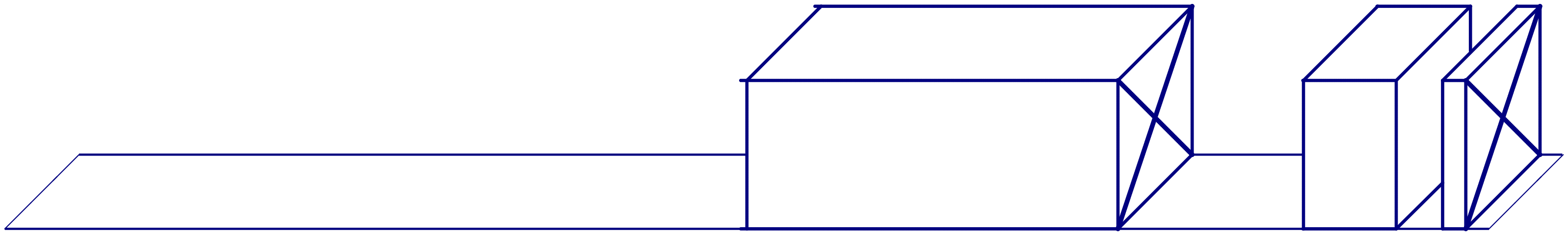
Richard Fitzralph (1295-1360)
Bischof von Armagh / Irland





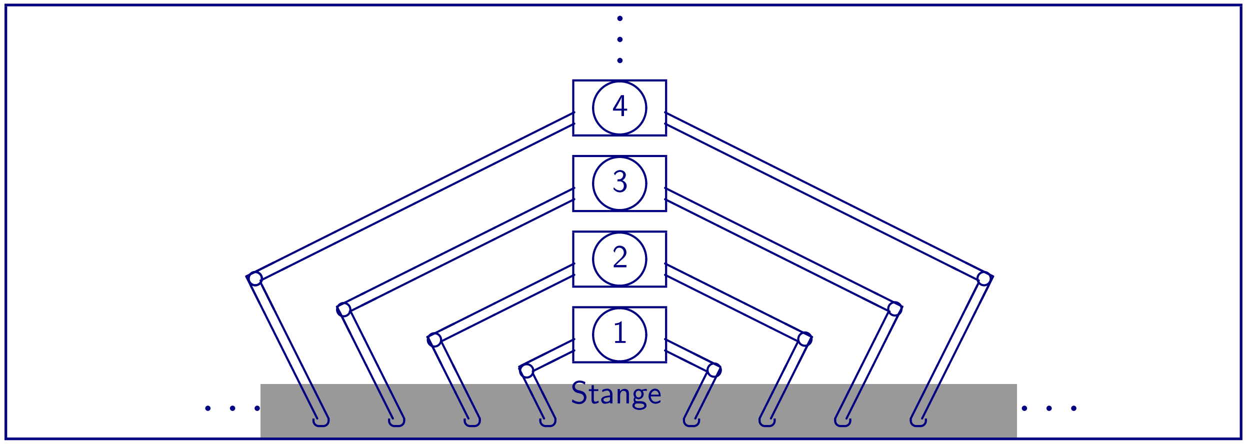
PARADOXIEN des Unendlichen

Richard Fitzralph (1295-1360)
Bischof von Armagh / Irland



PARADOXIEN des Unendlichen

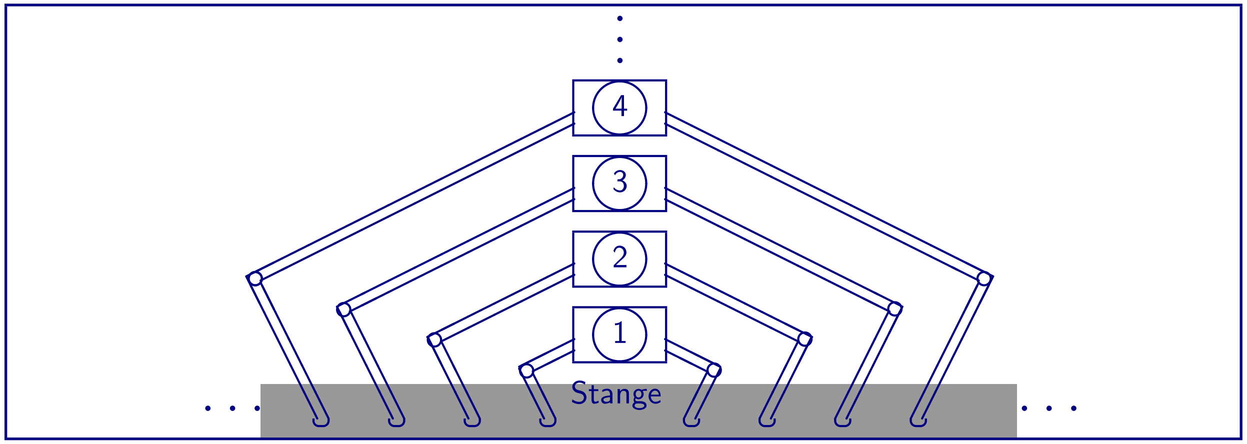
Transport eines Körpers in unendliche Ferne (Neidhart, 2005)



unendlich viele Roboter tragen eine Stange

PARADOXIEN des Unendlichen

Transport eines Körpers in unendliche Ferne (Neidhart, 2005)



unendlich viele Roboter tragen eine Stange

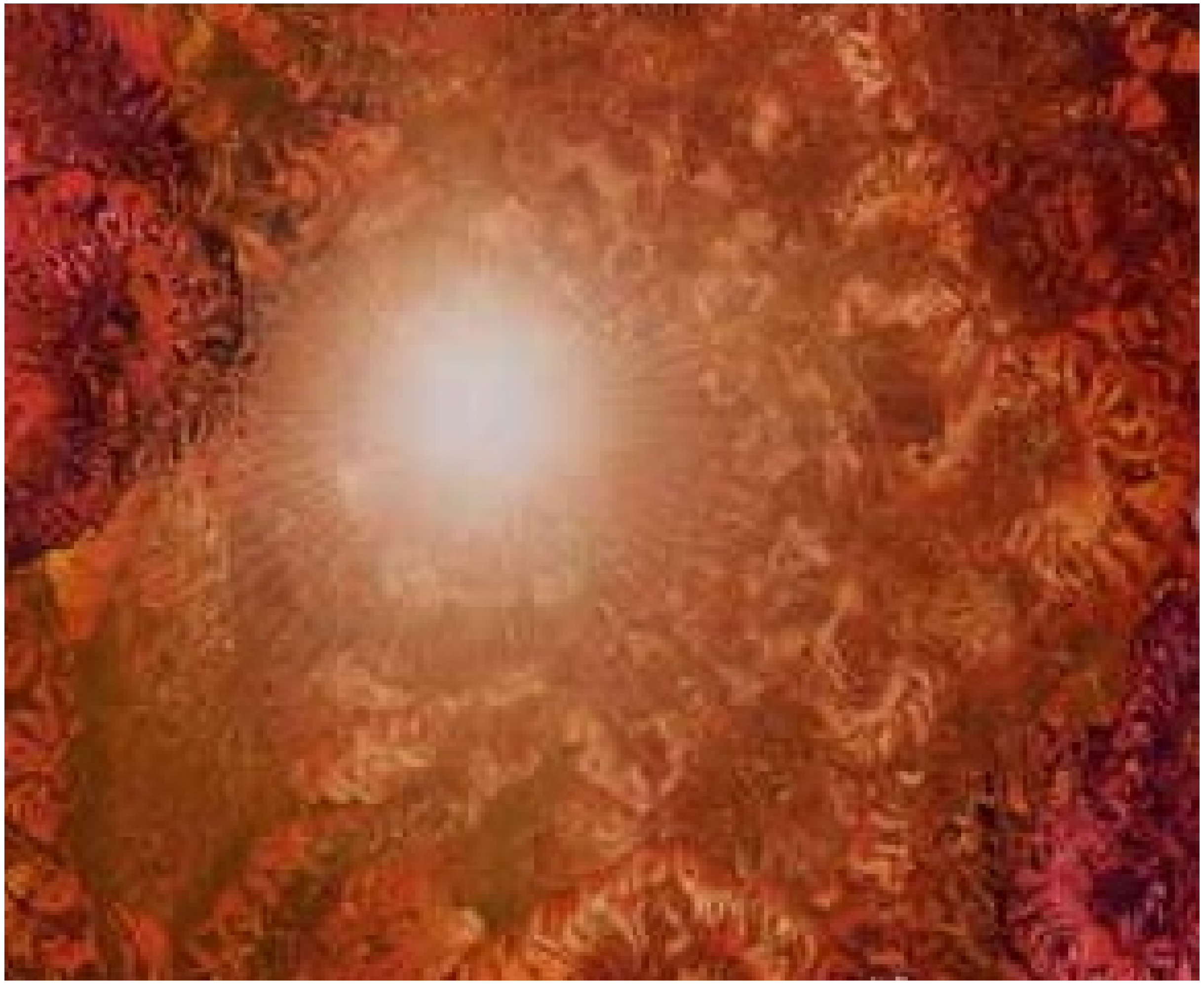
Befehl: Hände hoch!

PARADOXIEN des Unendlichen

Carl-Friedrich Gauss (1777-1855)
„Fürst der Mathematiker“

“So protestiere ich ... gegen den Gebrauch einer unendlichen Größe als einer Vollendeten, welcher in der Mathematik niemals erlaubt ist.“

PARADOXIEN des Unendlichen



Gott ordnet das Chaos des Unendlichen

PARADOXIEN des Unendlichen

Gott ordnet das Chaos des Unendlichen

PARADOXIEN des Unendlichen

Gott ordnet das Chaos des Unendlichen

II.2. Georg Cantors Mengen- und Unendlichkeitslehre

Georg Cantors Mengen- und Unendlichkeitslehre

Georg Cantor (1845-1918)
„Vater der Mengenlehre“

Nach Cantor gibt es drei Bereiche:

1. Das Endliche
2. Das relativ Unendliche oder Transfinite
3. Das absolut Unendliche oder Göttliche

Georg Cantors Mengen- und Unendlichkeitslehre

Georg Cantor (1845-1918)
„Vater der Mengenlehre“

Nach Cantor gibt es drei Bereiche:

1. Das Endliche
2. Das relativ Unendliche oder Transfinite
3. Das absolut Unendliche oder Göttliche

Georg Cantors Mengen- und Unendlichkeitslehre

Georg Cantor (1845-1918)
„Vater der Mengenlehre"

Nach Cantor gibt es drei Bereiche:

1. **Das Endliche**
2. **Das relativ Unendliche oder Transfinite**
3. **Das absolut Unendliche oder Göttliche**

In seinem Brief an Pater Thomas Esser vom 1.2.1886 schreibt Cantor:

„Die allgemeine Mengenlehre . . . gehört durchaus zur Metaphysik."

Georg Cantors Mengen- und Unendlichkeitslehre

Georg Cantor (1845-1918)
„Vater der Mengenlehre“

Nach Cantor gibt es drei Bereiche:

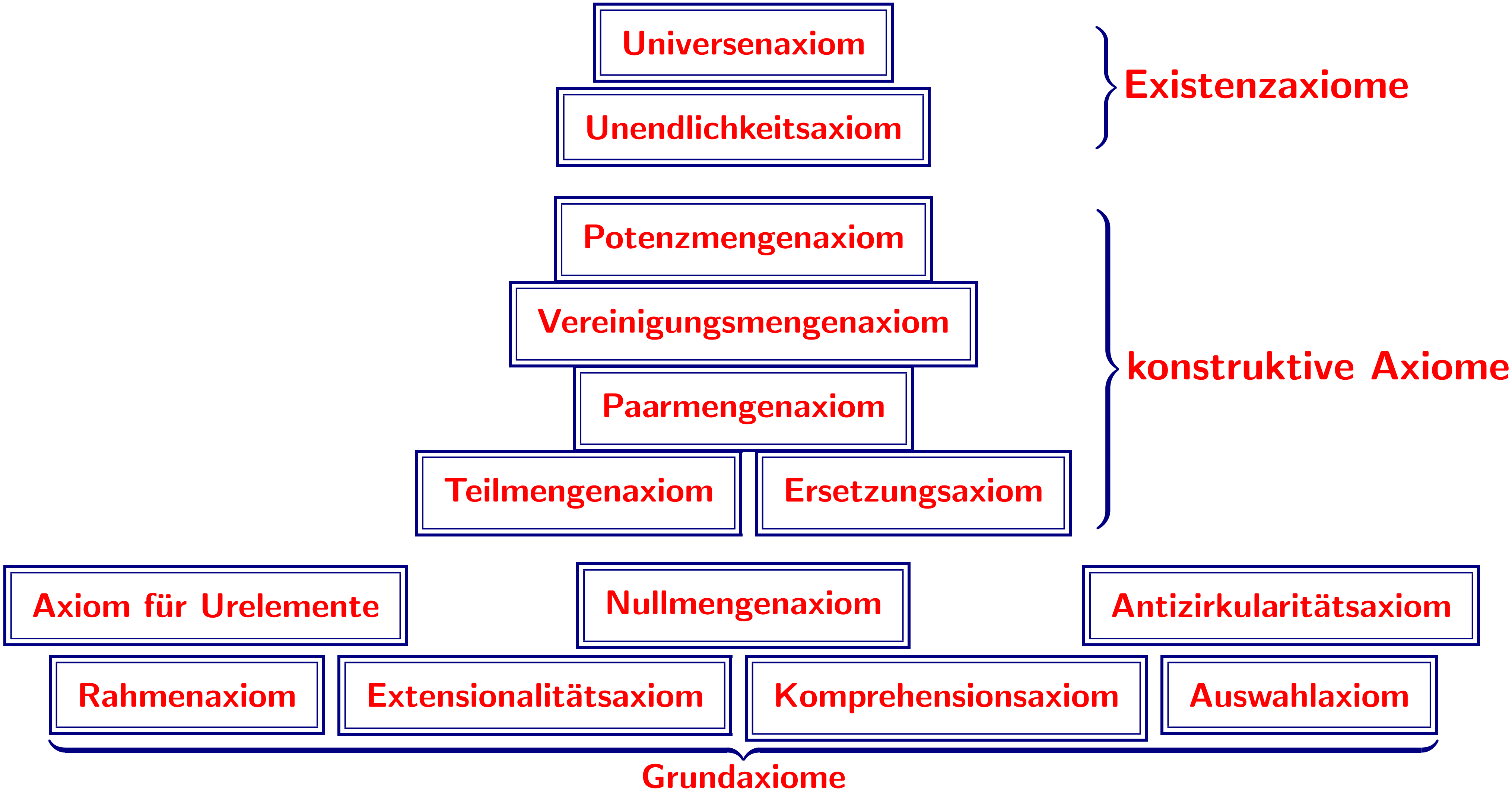
1. **Das Endliche**
2. **Das relativ Unendliche oder Transfinite**
3. **Das absolut Unendliche oder Göttliche**

In seinem Brief an Pater Thomas Esser vom 1.2.1886 schreibt Cantor:

„Die allgemeine Mengenlehre . . . gehört durchaus zur Metaphysik.“

Diese wiederum verbindet ein „unzerreißbares Band“ mit der Theologie.

Georg Cantors Mengen- und Unendlichkeitslehre



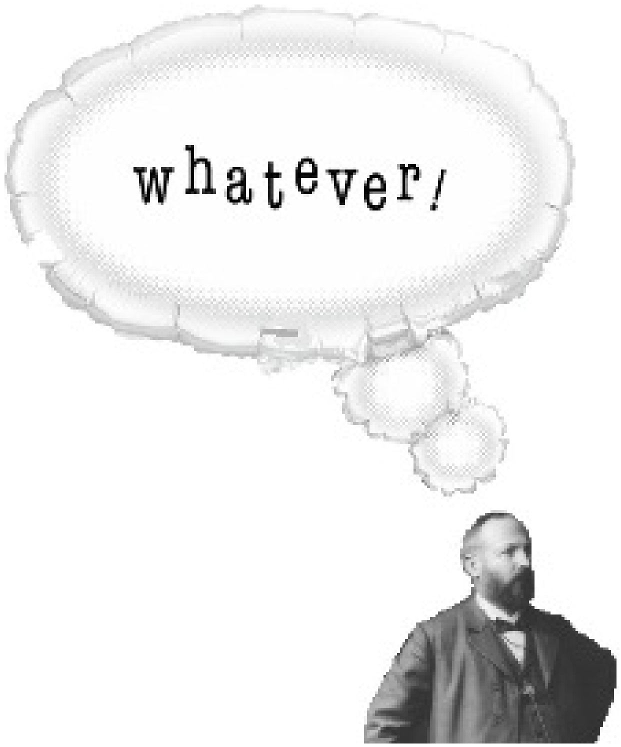
II.3. Mengen

Mengen

Cantor: Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.
Die zusammengefassten Objekte heißen Elemente der Menge.

Mengen

Cantor: Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.
Die zusammengefassten Objekte heißen Elemente der Menge.



Mengen

Cantor: Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.
Die zusammengefassten Objekte heißen **Elemente** der Menge.

Anliegen der Mengenlehre: Vielheiten als Einheiten denken!

Mengen

Cantor: Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.
Die zusammengefassten Objekte heißen **Elemente** der Menge.

Anliegen der Mengenlehre: Vielheiten als Einheiten denken!

Mengen sind Einheiten (Individuen), die Vielheiten repräsentieren.

Mengen

Cantor: Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.
Die zusammengefassten Objekte heißen Elemente der Menge.

Anliegen der Mengenlehre: Vielheiten als Einheiten denken!

Mengen sind Einheiten (Individuen), die Vielheiten repräsentieren.

$a\bullet$

Vielheit $b\bullet$

$c\bullet$

Mengen

Cantor: Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.
Die zusammengefassten Objekte heißen **Elemente** der Menge.

Anliegen der Mengenlehre: Vielheiten als Einheiten denken!

Mengen sind Einheiten (Individuen), die Vielheiten repräsentieren.

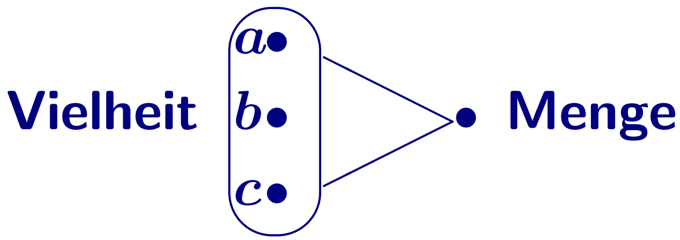
$$\begin{array}{lcl} & a\bullet & \\ \textbf{Vielheit} & b\bullet & \qquad \bullet\ \textbf{Menge} \\ & c\bullet & \end{array}$$

Mengen

Cantor: Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.
Die zusammengefassten Objekte heißen **Elemente** der Menge.

Anliegen der Mengenlehre: Vielheiten als Einheiten denken!

Mengen sind Einheiten (Individuen), die Vielheiten repräsentieren.



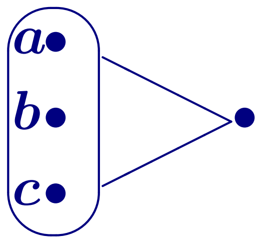
Mengen

Cantor: Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.
Die zusammengefassten Objekte heißen **Elemente** der Menge.

Anliegen der Mengenlehre: Vielheiten als Einheiten denken!

Mengen sind Einheiten (Individuen), die Vielheiten repräsentieren.

Vielheit



Menge $\{a,b,c\}$

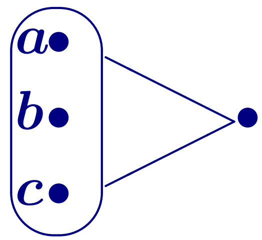
Mengen

Cantor: Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.
Die zusammengefassten Objekte heißen **Elemente** der Menge.

Anliegen der Mengenlehre: Vielheiten als Einheiten denken!

Mengen sind Einheiten (Individuen), die Vielheiten repräsentieren.

Gesamtheit



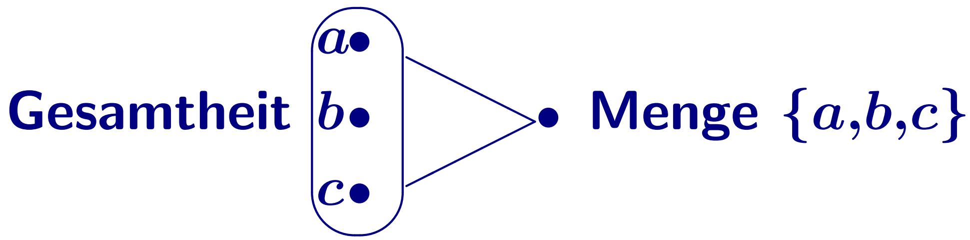
Menge $\{a,b,c\}$

Mengen

Cantor: Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.
Die zusammengefassten Objekte heißen **Elemente** der Menge.

Anliegen der Mengenlehre: Gesamtheiten als Einheiten denken!

Mengen sind Einheiten (Individuen), die Gesamtheiten repräsentieren.



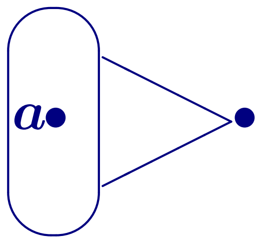
Mengen

Cantor: Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.
Die zusammengefassten Objekte heißen Elemente der Menge.

Anliegen der Mengenlehre: Gesamtheiten als Einheiten denken!

Mengen sind Einheiten (Individuen), die Gesamtheiten repräsentieren.

Gesamtheit



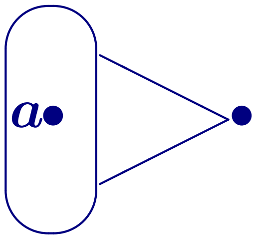
Mengen

Cantor: Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.
Die zusammengefassten Objekte heißen **Elemente** der Menge.

Anliegen der Mengenlehre: Gesamtheiten als Einheiten denken!

Mengen sind Einheiten (Individuen), die Gesamtheiten repräsentieren.

Gesamtheit



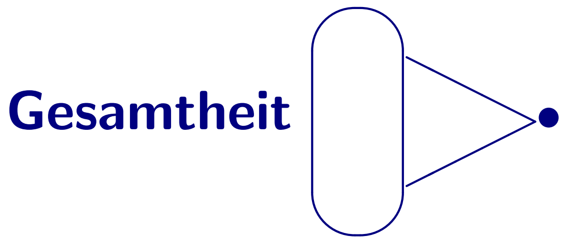
einelementige Menge $\{a\}$

Mengen

Cantor: Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.
Die zusammengefassten Objekte heißen **Elemente** der Menge.

Anliegen der Mengenlehre: Gesamtheiten als Einheiten denken!

Mengen sind Einheiten (Individuen), die Gesamtheiten repräsentieren.

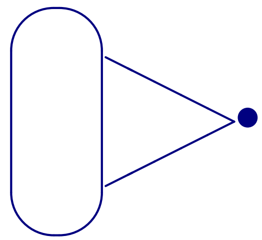


Mengen

Cantor: Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.
Die zusammengefassten Objekte heißen **Elemente** der Menge.

Anliegen der Mengenlehre: Gesamtheiten als Einheiten denken!

Mengen sind Einheiten (Individuen), die Gesamtheiten repräsentieren.

Gesamtheit  leere Menge $\{\}$

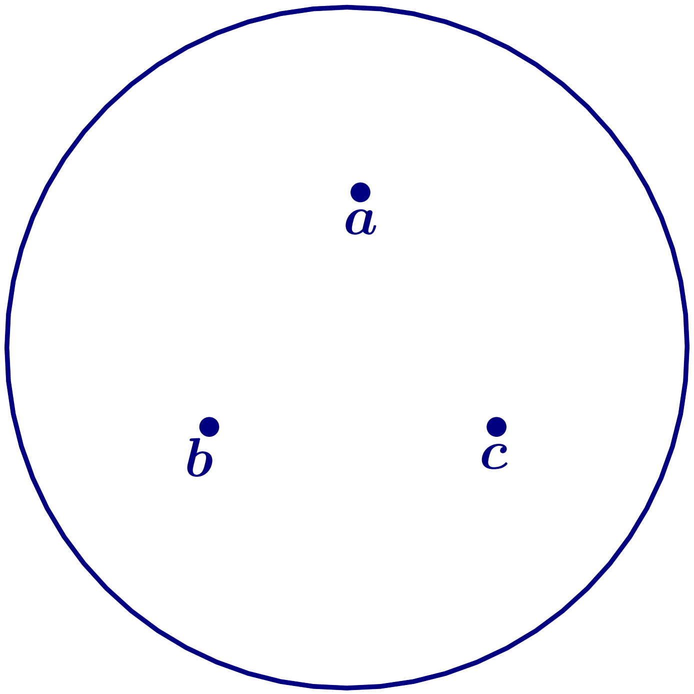
Mengen

Def.: Die **Teilmengen** einer Menge M sind die Mengen, deren Elemente in M liegen.

Mengen

Def.: Die **Teilmengen** einer Menge M sind die Mengen, deren Elemente in M liegen.

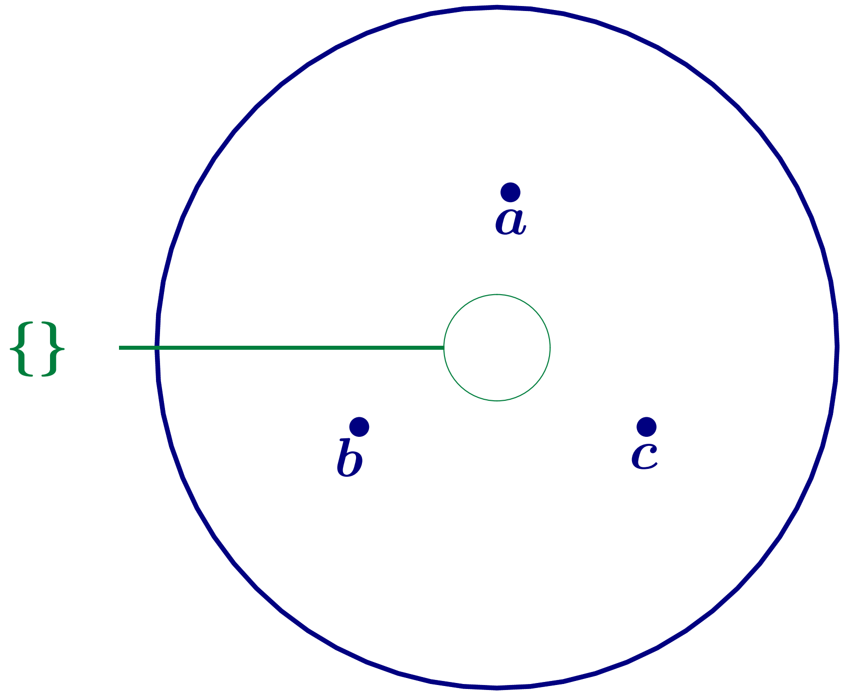
Menge $M = \{a, b, c\}$



Mengen

Def.: Die **Teilmengen** einer Menge M sind die Mengen, deren Elemente in M liegen.

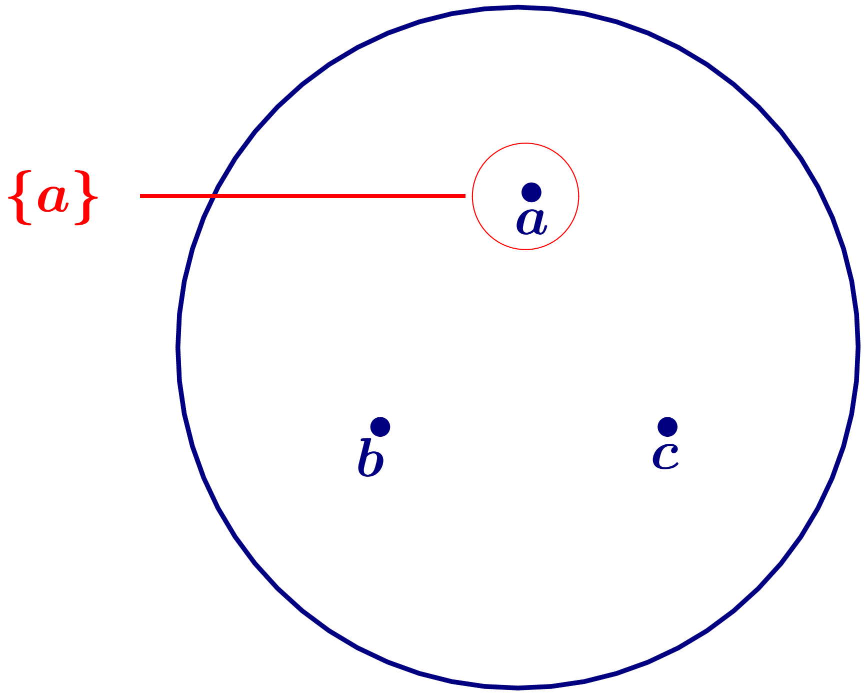
Menge $M = \{a, b, c\}$



Mengen

Def.: Die **Teilmengen** einer Menge M sind die Mengen, deren Elemente in M liegen.

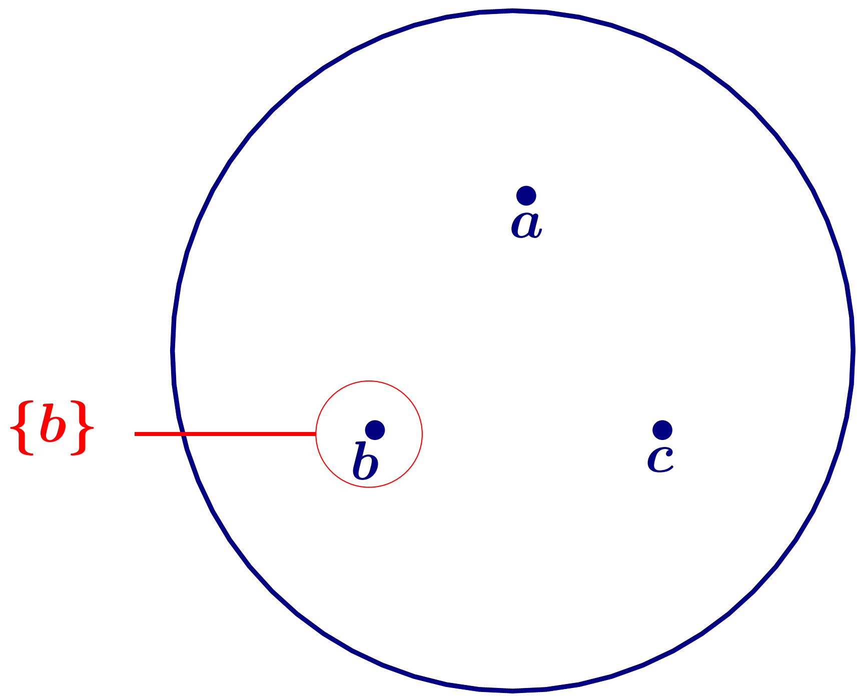
Menge $M = \{a, b, c\}$



Mengen

Def.: Die **Teilmengen** einer Menge M sind die Mengen, deren Elemente in M liegen.

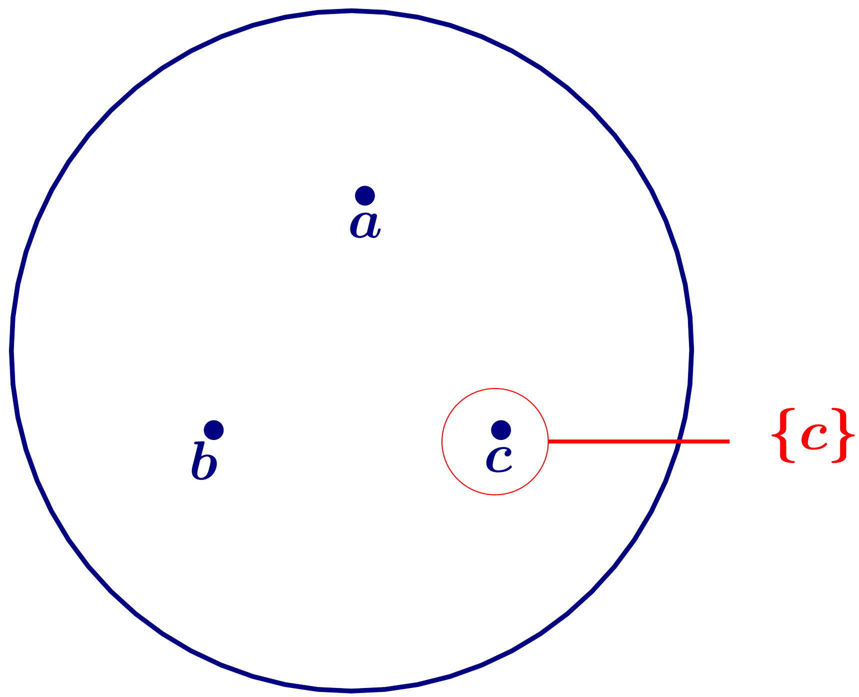
Menge $M = \{a, b, c\}$



Mengen

Def.: Die **Teilmengen** einer Menge M sind die Mengen, deren Elemente in M liegen.

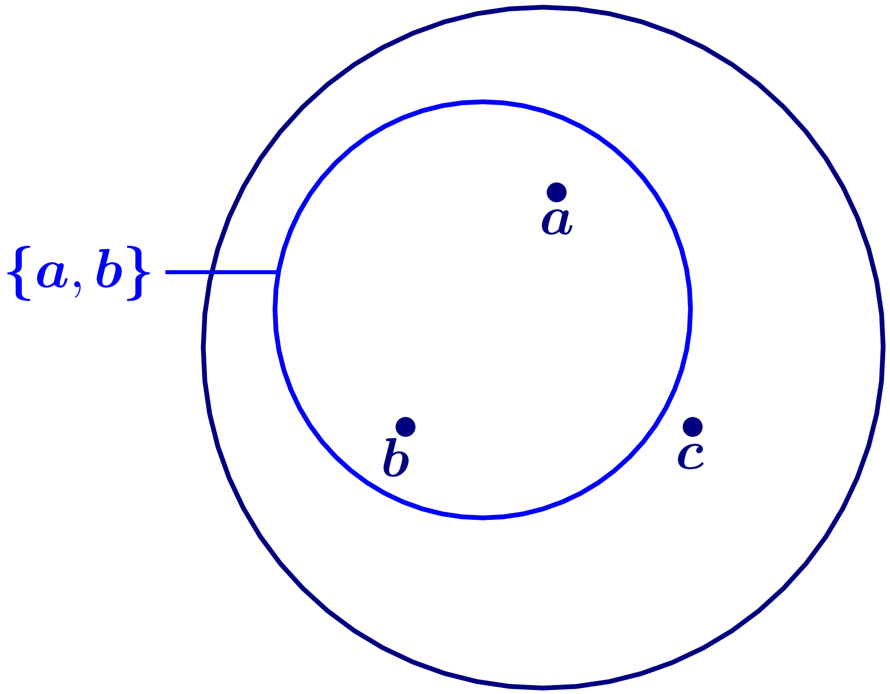
Menge $M = \{a, b, c\}$



Mengen

Def.: **Die Teilmengen einer Menge M sind die Mengen, deren Elemente in M liegen.**

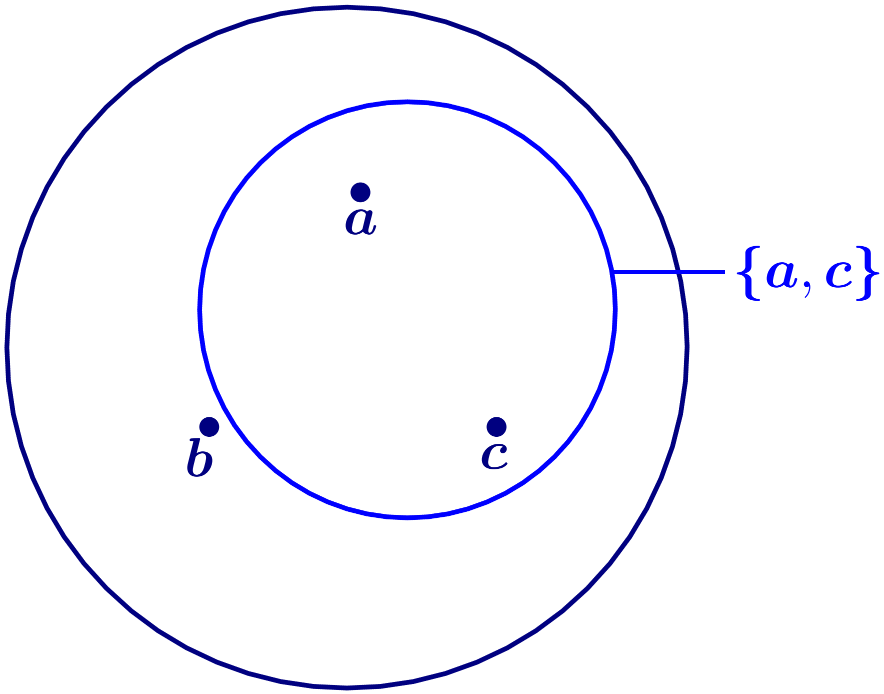
Menge $M = \{a, b, c\}$



Mengen

Def.: Die **Teilmengen** einer Menge M sind die Mengen, deren Elemente in M liegen.

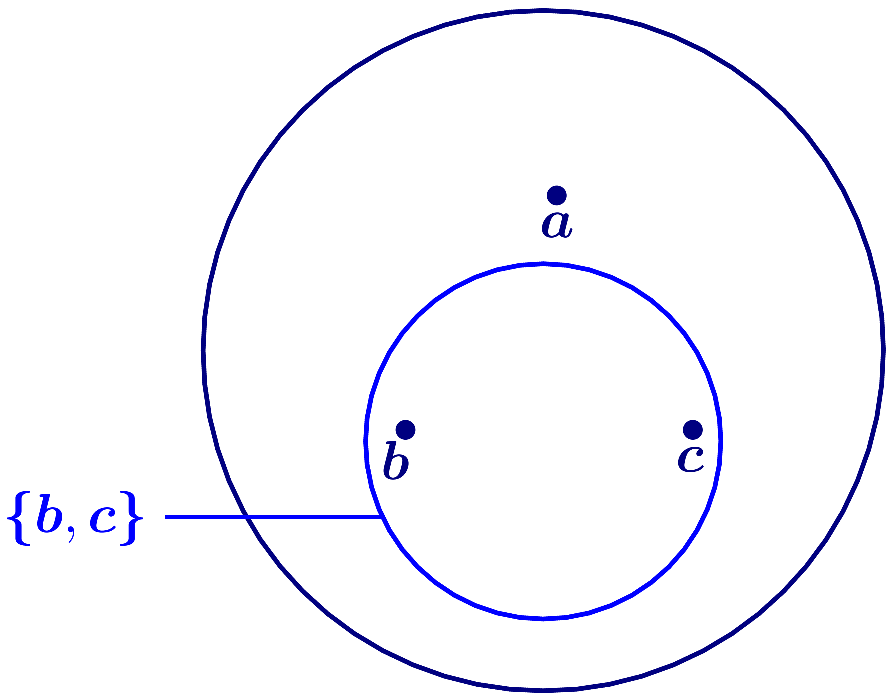
Menge $M = \{a, b, c\}$



Mengen

Def.: Die **Teilmengen** einer Menge M sind die Mengen, deren Elemente in M liegen.

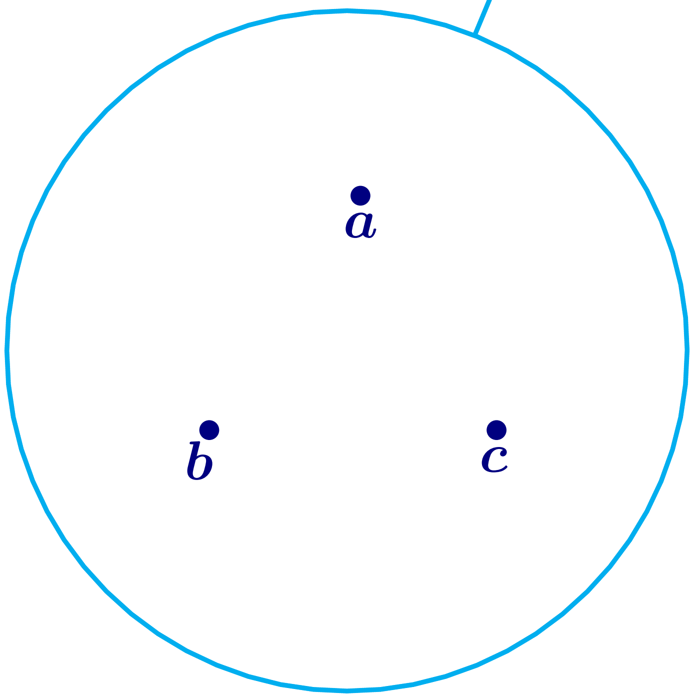
Menge $M = \{a, b, c\}$



Mengen

Def.: Die **Teilmengen** einer Menge M sind die Mengen, deren Elemente in M liegen.

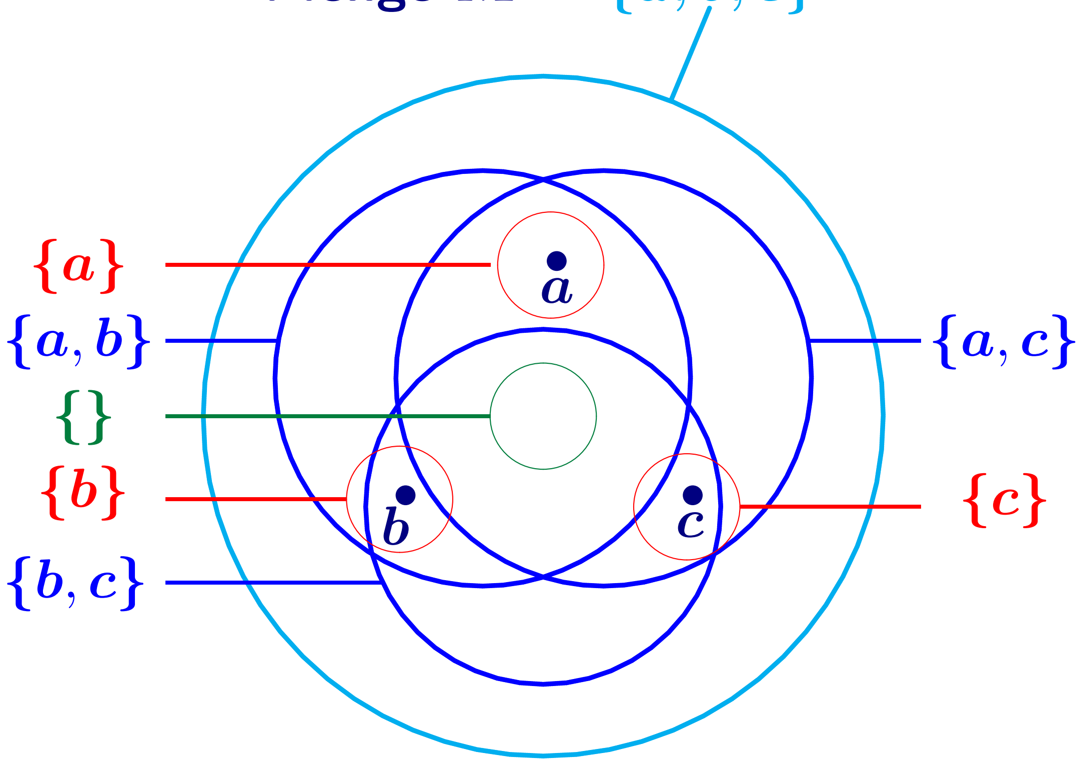
Menge $M = \{a, b, c\}$



Mengen

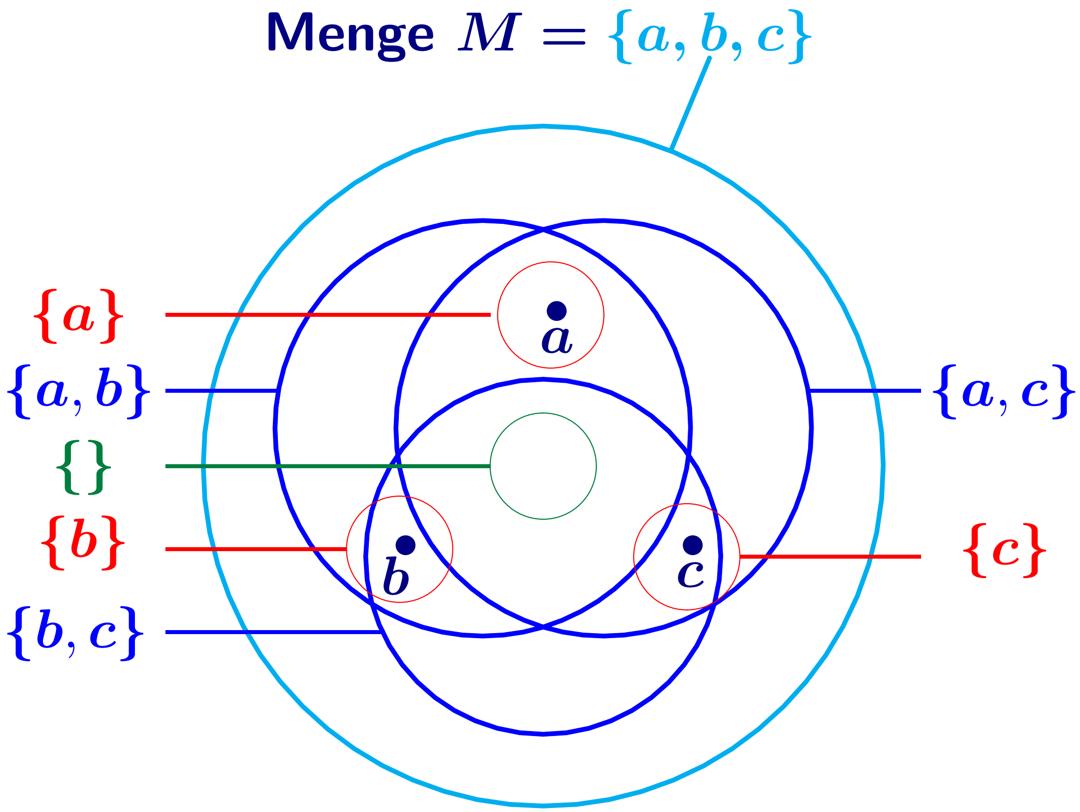
Def.: Die **Teilmengen** einer Menge M sind die Mengen, deren Elemente in M liegen.

Menge $M = \{a, b, c\}$



Mengen

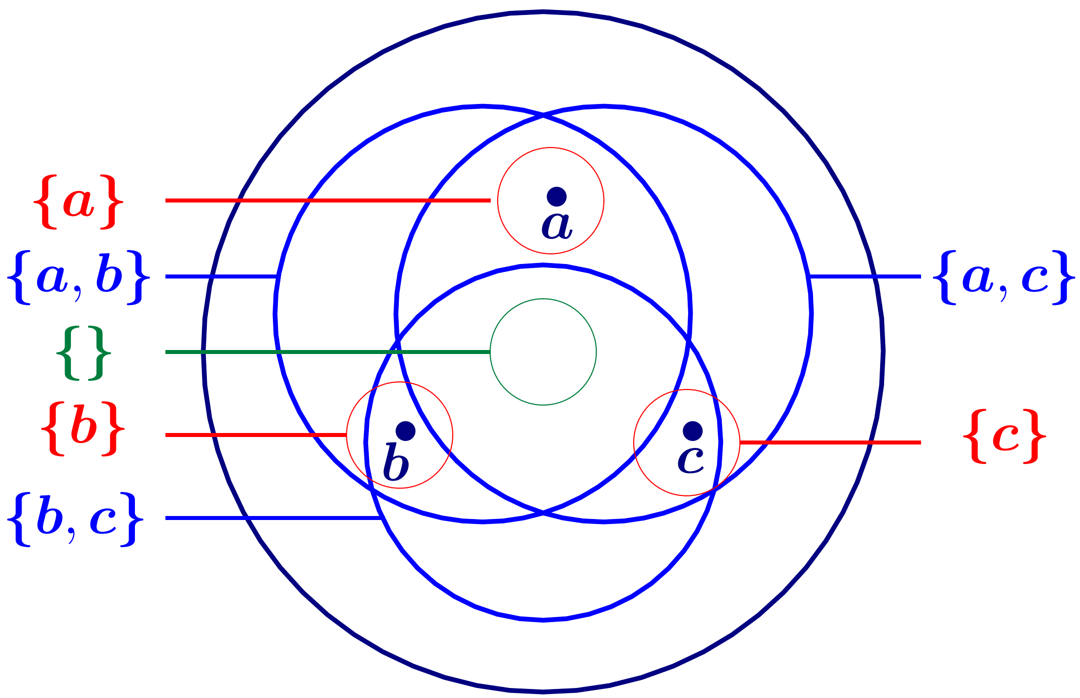
Def.: Die **Teilmengen** einer Menge M sind die Mengen, deren Elemente in M liegen.
Als **echte Teilmengen** bezeichnet man die von M selbst verschiedenen.



Mengen

Def.: Die **Teilmengen** einer Menge M sind die Mengen, deren Elemente in M liegen.
Als **echte Teilmengen** bezeichnet man die von M selbst verschiedenen.

Menge $M = \{a, b, c\}$



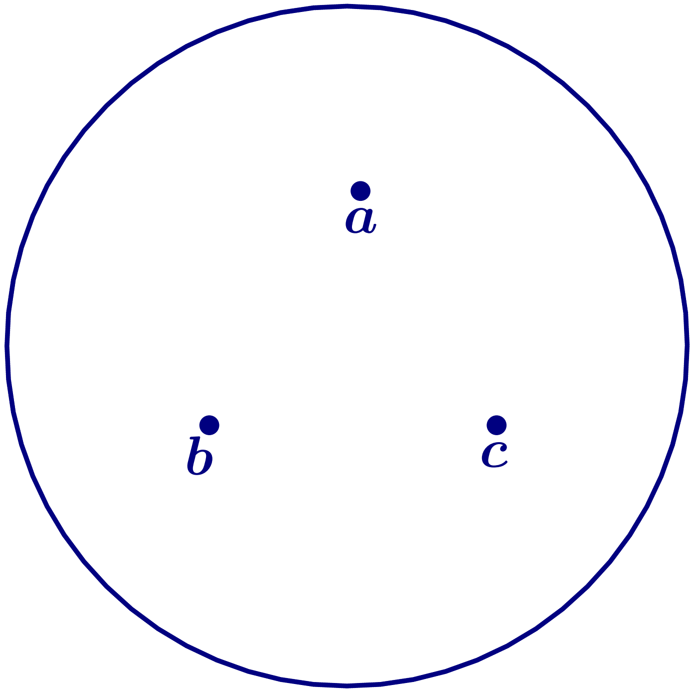
Mengen

Def.: Zu jeder Menge M kann man die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(M)$ bilden,
deren Elemente die Teilmengen von M sind.

Mengen

Def.: Zu jeder Menge M kann man die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ bilden, deren Elemente die Teilmengen von M sind.

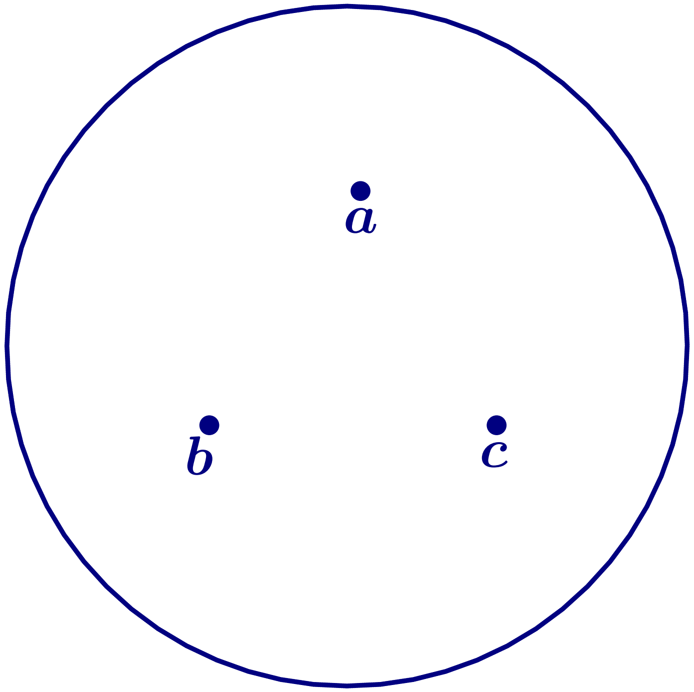
Menge $M = \{a, b, c\}$

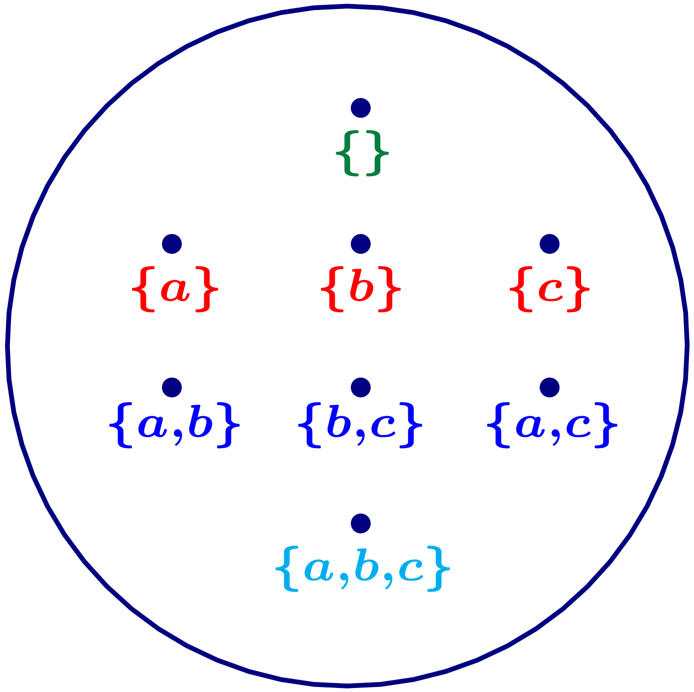


Mengen

Def.: Zu jeder Menge M kann man die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ bilden, deren Elemente die Teilmengen von M sind.

Menge $M = \{a, b, c\}$ $\Rightarrow$ **Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$**





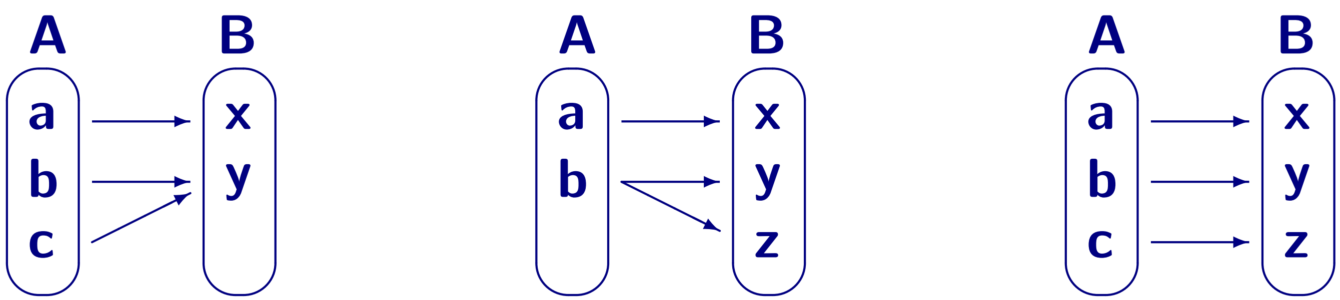
II.4. Unendlichkeit

Unendlichkeit

Def.: Eine Relation zwischen Mengen A und B ist eine Zuordnung zwischen den Elementen von A und B.
Sie wird veranschaulicht durch eine Schar von Pfeilen,
die von Elementen von A ausgehen und auf Elemente von B zeigen.

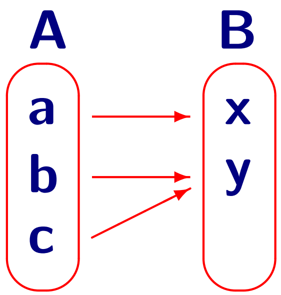
Unendlichkeit

Def.: Eine Relation zwischen Mengen A und B ist eine Zuordnung zwischen den Elementen von A und B.
Sie wird veranschaulicht durch eine Schar von Pfeilen,
die von Elementen von A ausgehen und auf Elemente von B zeigen.

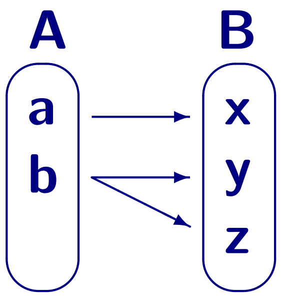


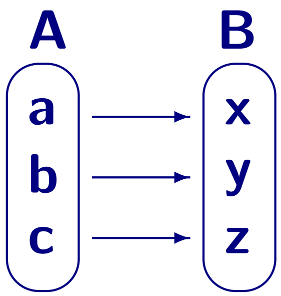
Unendlichkeit

Def.: Eine Relation zwischen Mengen A und B ist eine Zuordnung zwischen den Elementen von A und B.
Sie wird veranschaulicht durch eine Schar von Pfeilen,
die von Elementen von A ausgehen und auf Elemente von B zeigen.



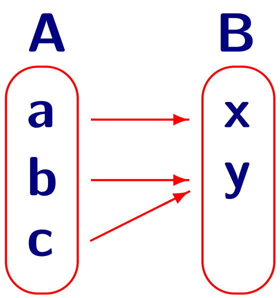
linkseindeutig



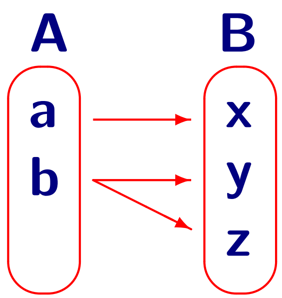


Unendlichkeit

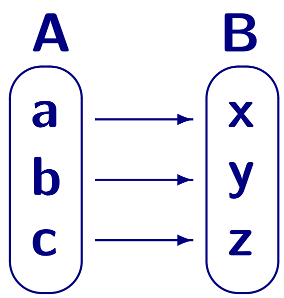
Def.: Eine Relation zwischen Mengen A und B ist eine Zuordnung zwischen den Elementen von A und B.
Sie wird veranschaulicht durch eine Schar von Pfeilen,
die von Elementen von A ausgehen und auf Elemente von B zeigen.



linkseindeutig

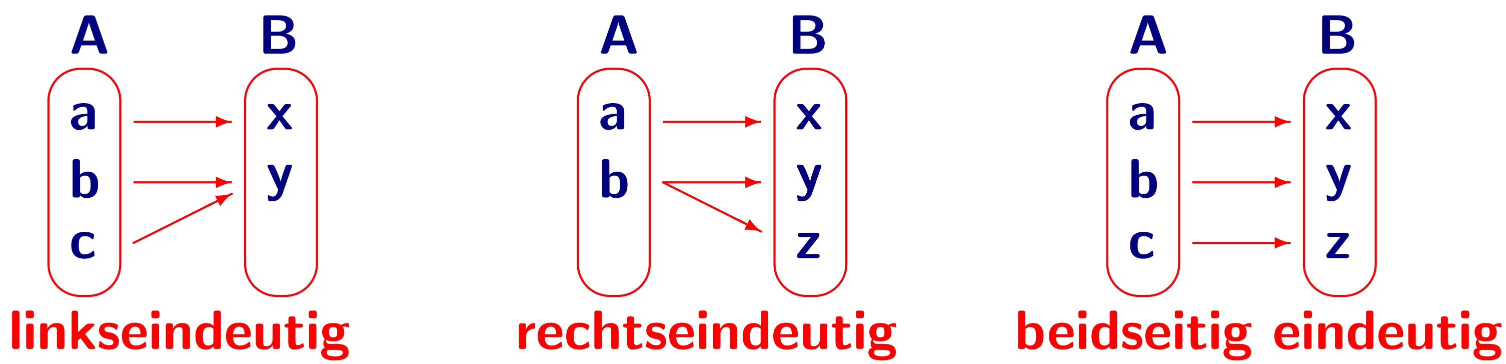


rechtseindeutig



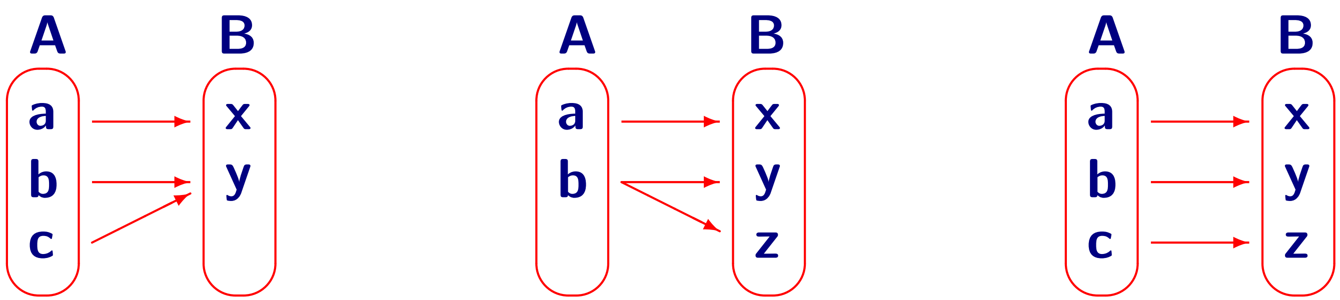
Unendlichkeit

Def.: Eine Relation zwischen Mengen A und B ist eine Zuordnung zwischen den Elementen von A und B.
Sie wird veranschaulicht durch eine Schar von Pfeilen,
die von Elementen von A ausgehen und auf Elemente von B zeigen.



Unendlichkeit

Def.: Eine Relation zwischen Mengen A und B ist eine Zuordnung zwischen den Elementen von A und B.
Sie wird veranschaulicht durch eine Schar von Pfeilen, die von Elementen von A ausgehen und auf Elemente von B zeigen.



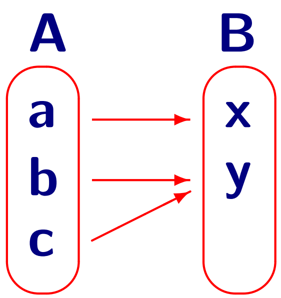
linkseindeutig

rechtseindeutig

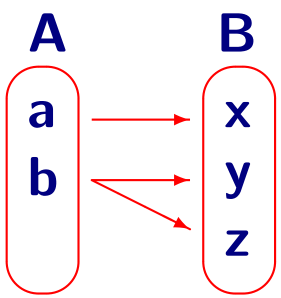
beidseitig eindeutig
(Bijektion)

Unendlichkeit

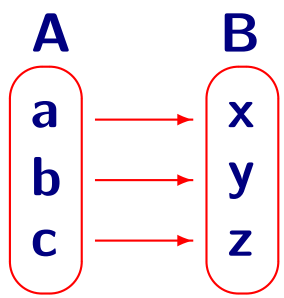
Def.: Eine Relation zwischen Mengen A und B ist eine Zuordnung zwischen den Elementen von A und B.
Sie wird veranschaulicht durch eine Schar von Pfeilen,
die von Elementen von A ausgehen und auf Elemente von B zeigen.



linkseindeutig



rechtseindeutig

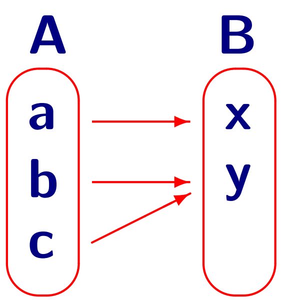


beidseitig eindeutig
(Bijektion)

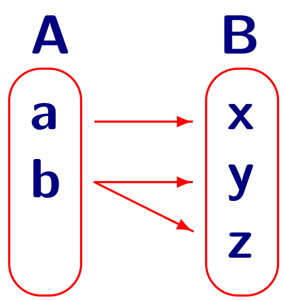
Def.: Mengen A und B heißen relationstheoretisch gleich groß oder gleichmächtig, wenn es eine Bijektion zwischen A und B gibt.

Unendlichkeit

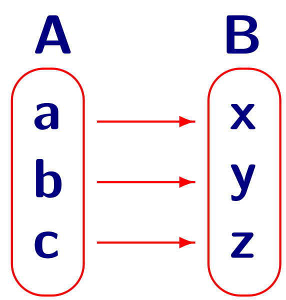
Def.: Eine Relation zwischen Mengen A und B ist eine Zuordnung zwischen den Elementen von A und B.
Sie wird veranschaulicht durch eine Schar von Pfeilen,
die von Elementen von A ausgehen und auf Elemente von B zeigen.



linkseindeutig



rechtseindeutig



beidseitig eindeutig
(Bijektion)

Def.: Mengen A und B heißen relationstheoretisch gleich groß oder gleichmächtig, wenn es eine Bijektion zwischen A und B gibt.
Gibt es keine Bijektion, wohl aber eine links– bzw. rechtseindeutige Relation, heißt A relationstheoretisch größer bzw. kleiner als B.

Unendlichkeit

Def.: Mengen A und B heißen **relationstheoretisch gleich groß** oder **gleichmächtig**, wenn es eine Bijektion zwischen A und B gibt.
Gibt es keine Bijektion, wohl aber eine links– bzw. rechtseindeutige Relation, heißt A **relationstheoretisch größer bzw. kleiner als** B.

Unendlichkeit

Def.: Mengen A und B heißen **relationstheoretisch gleich groß** oder **gleichmächtig**, wenn es eine Bijektion zwischen A und B gibt.
Gibt es keine Bijektion, wohl aber eine links– bzw. rechtseindeutige Relation, heißt A **relationstheoretisch größer bzw. kleiner als** B.

Def.: Eine Menge A heißt **ergänzungstheoretisch kleiner bzw. größer** als B, wenn A Teilmenge von B bzw. umgekehrt B Teilmenge von A ist.

Unendlichkeit

Def.: Mengen A und B heißen relationstheoretisch gleich groß oder gleichmächtig, wenn es eine Bijektion zwischen A und B gibt.
Gibt es keine Bijektion, wohl aber eine links– bzw. rechtseindeutige Relation, heißt A relationstheoretisch größer bzw. kleiner als B.

Def.: Eine Menge A heißt ergänzungstheoretisch kleiner bzw. größer als B, wenn A Teilmenge von B bzw. umgekehrt B Teilmenge von A ist.

Bei endlichen Mengen fallen beide Begriffe zusammen:

Unendlichkeit

Def.: Mengen A und B heißen relationstheoretisch gleich groß oder gleichmächtig, wenn es eine Bijektion zwischen A und B gibt.
Gibt es keine Bijektion, wohl aber eine links– bzw. rechtseindeutige Relation, heißt A relationstheoretisch größer bzw. kleiner als B.

Def.: Eine Menge A heißt ergänzungstheoretisch kleiner bzw. größer als B, wenn A Teilmenge von B bzw. umgekehrt B Teilmenge von A ist.

Bei endlichen Mengen fallen beide Begriffe zusammen:
Ergänzungstheoretisch kleinere Mengen sind stets auch relationstheoretisch kleiner!

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

1. Beispiel:

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

1. Beispiel:

Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen: $\mathbf{0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad \ldots}$

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

1. Beispiel:

Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen: $\boxed{\mathbf{0}\ \boxed{\mathbf{1}\ \ \mathbf{2}\ \ \mathbf{3}\ \ \mathbf{4}\ \ \mathbf{5}\ \ \mathbf{6}\ \ \mathbf{7}\ \ \mathbf{8}\ \ \mathbf{9}\ \ \ldots}}$

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

1. Beispiel:

Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen: $\boxed{0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad \ldots}$

$\boxed{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad \ldots}$

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

1. Beispiel:

Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen: $\quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad \ldots$

Menge $\mathbb{N}^*$ der natürlichen Zahlen ohne 0: $\quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad \ldots$

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

1. Beispiel:

Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen:	$\mathbf{0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad \ldots}$
Menge $\mathbb{N}^*$ der natürlichen Zahlen ohne 0:	$\mathbf{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \ldots}$

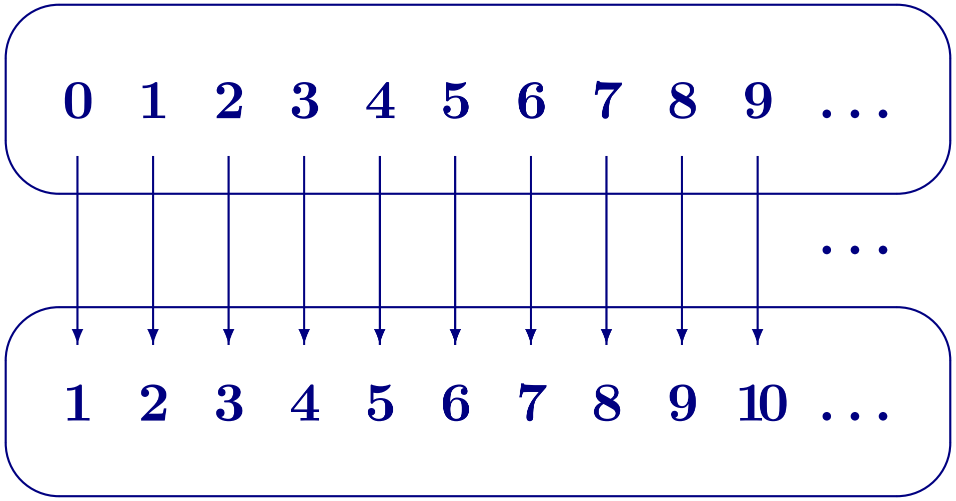
Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

1. Beispiel:

Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen:

Menge $\mathbb{N}^*$ der natürlichen Zahlen ohne 0:



Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

2. Beispiel:

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

2. Beispiel:

Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen: $\mathbf{0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad \ldots}$

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

2. Beispiel:

Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen: $\quad \mathbf{0} \; \mathbf{1} \; \mathbf{2} \; \mathbf{3} \; \mathbf{4} \; \mathbf{5} \; \mathbf{6} \; \mathbf{7} \; \mathbf{8} \; \mathbf{9} \; \ldots$

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

2. Beispiel:

Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen:	$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad \ldots$
Menge $\mathbb{N}_g$ der geraden Zahlen:	$0 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad \ldots$

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

2. Beispiel:

Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen: $\mathbf{0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad \ldots}$

Menge $\mathbb{N}_g$ der geraden Zahlen: $\mathbf{0 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \quad 12 \quad 14 \quad 16 \quad 18 \quad \ldots}$

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

2. Beispiel:

Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen:	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{5}$	$\mathbf{6}$	$\mathbf{7}$	$\mathbf{8}$	$\mathbf{9}$	$\ldots$
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
Menge $\mathbb{N}_g$ der geraden Zahlen:	$\mathbf{0}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{6}$	$\mathbf{8}$	$\mathbf{10}$	$\mathbf{12}$	$\mathbf{14}$	$\mathbf{16}$	$\mathbf{18}$	$\ldots$

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

3. Beispiel:

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

3. Beispiel:

Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen

$$\ldots \quad -9 \; -8 \; -7 \; -6 \; -5 \; -4 \; -3 \; -2 \; -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad \ldots$$

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

3. Beispiel:

Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen

$$\ldots \quad -9 \; -8 \; -7 \; -6 \; -5 \; -4 \; -3 \; -2 \; -1 \; \boxed{0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad \ldots}$$

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

3. Beispiel:

Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen

$$\ldots \quad -9 \;\; -8 \;\; -7 \;\; -6 \;\; -5 \;\; -4 \;\; -3 \;\; -2 \;\; -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad \ldots$$

$$\boxed{0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad \ldots}$$

Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

3. Beispiel:

Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen

$$\ldots \quad -9 \; -8 \; -7 \; -6 \; -5 \; -4 \; -3 \; -2 \; -1 \quad 0 \qquad 1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad 4 \qquad \ldots$$

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad \ldots$$

Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

3. Beispiel:

Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen

$$0 \quad -1 \quad 1 \quad -2 \quad 2 \quad -3 \quad 3 \quad -4 \quad 4 \quad -5 \quad \ldots$$

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad \ldots$$

Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

3. Beispiel:

Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen

$$0 \quad -1 \quad 1 \quad -2 \quad 2 \quad -3 \quad 3 \quad -4 \quad 4 \quad -5 \quad \ldots$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad \ldots$$

Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

Auch die Menge $\mathbb{Q}$ aller Bruchzahlen ist mit $\mathbb{N}$ gleichmächtig!

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

Auch die Menge $\mathbb{Q}$ aller Bruchzahlen ist mit $\mathbb{N}$ gleichmächtig!

Aber der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist mit $\mathbb{N}$ nicht gleichmächtig!

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

4. Beispiel:

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

4. Beispiel:
Die Menge $\mathbb{R}$ aller Punkte einer Geraden

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

4. Beispiel:
Die Menge $\mathbb{R}$ aller Punkte einer Geraden

ist gleichmächtig mit der Menge der Punkte eines begrenzten Intervalls AB:

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

4. Beispiel:
Die Menge $\mathbb{R}$ aller Punkte einer Geraden

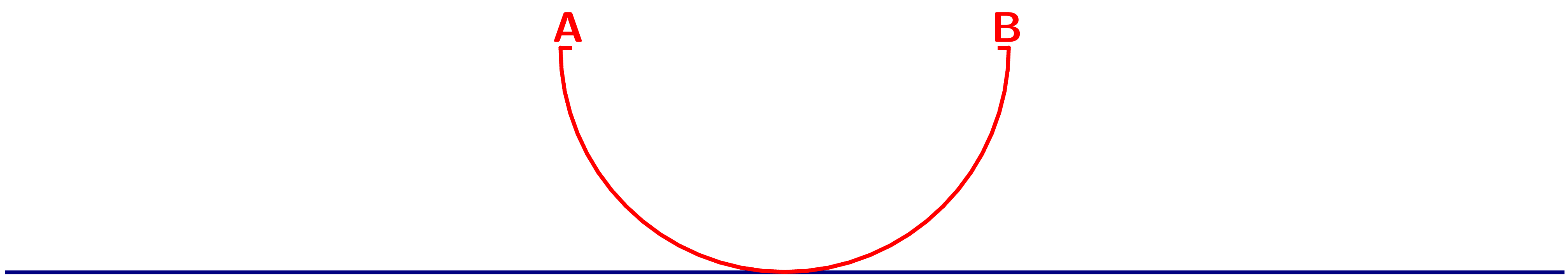
ist gleichmächtig mit der Menge der Punkte eines begrenzten Intervalls AB:

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

4. Beispiel:
Die Menge $\mathbb{R}$ aller Punkte einer Geraden

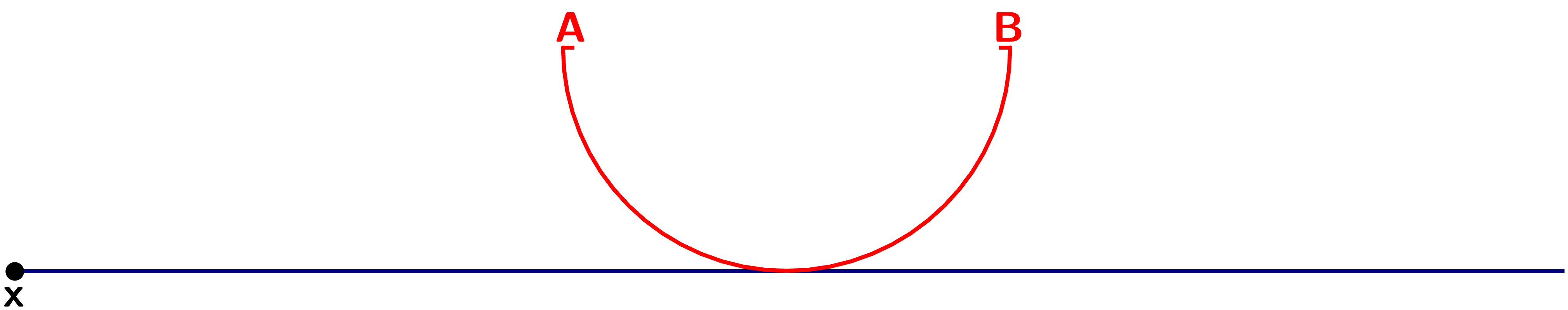
ist gleichmächtig mit der Menge der Punkte eines begrenzten Intervalls AB:



Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

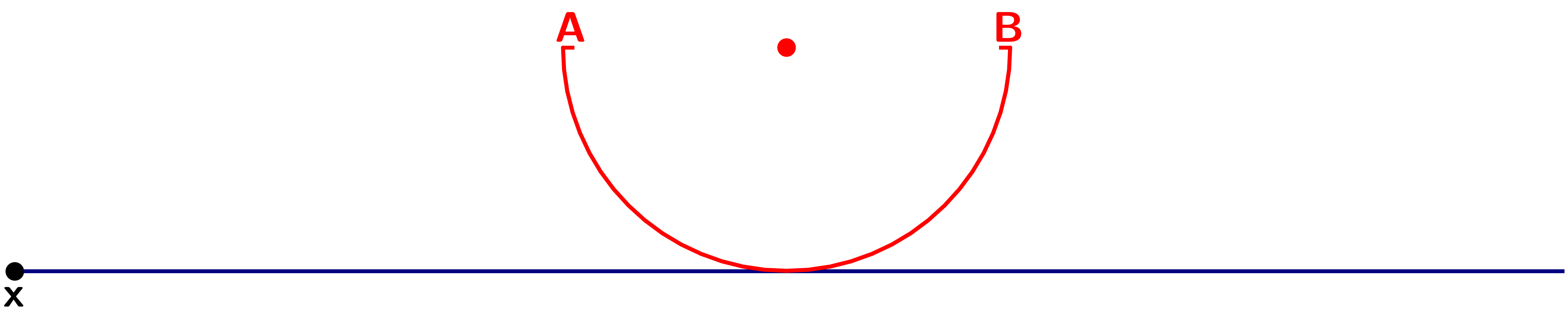
4. Beispiel:
Die Menge $\mathbb{R}$ aller Punkte einer Geraden
ist gleichmächtig mit der Menge der Punkte eines begrenzten Intervalls AB:



Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

4. Beispiel:
Die Menge $\mathbb{R}$ aller Punkte einer Geraden
ist gleichmächtig mit der Menge der Punkte eines begrenzten Intervalls AB:

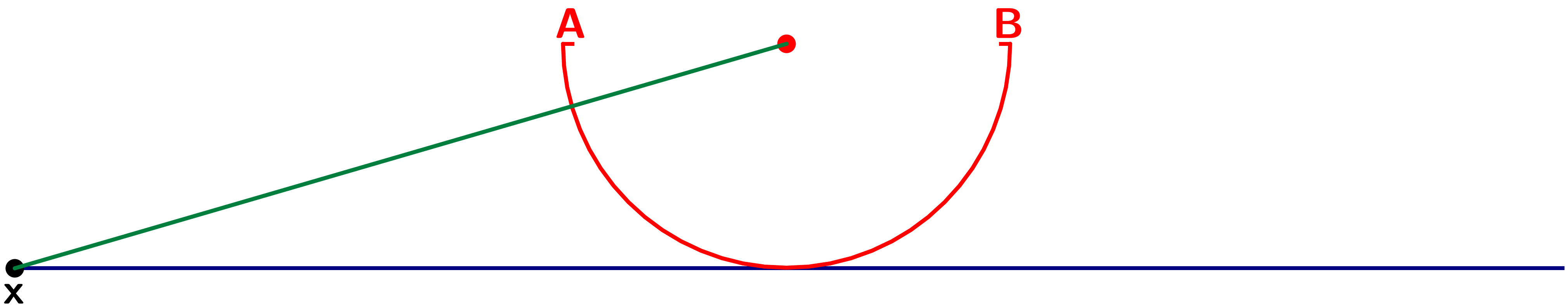


Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

4. Beispiel:
Die Menge $\mathbb{R}$ aller Punkte einer Geraden

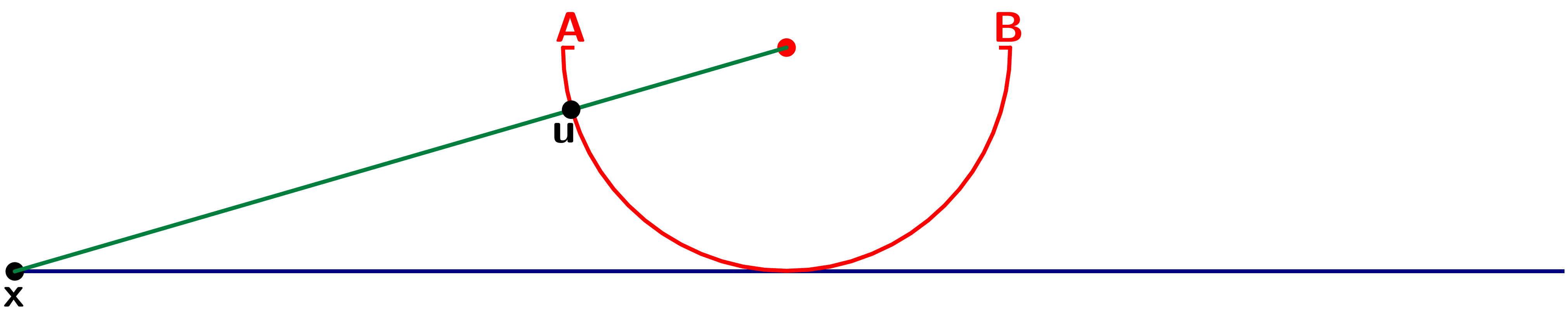
ist gleichmächtig mit der Menge der Punkte eines begrenzten Intervalls AB:



Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

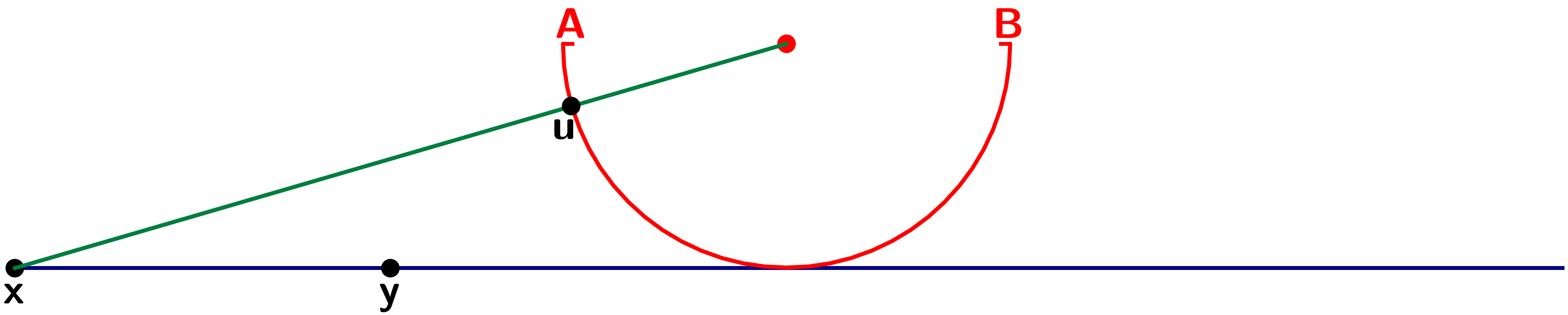
4. Beispiel:
Die Menge $\mathbb{R}$ aller Punkte einer Geraden
ist gleichmächtig mit der Menge der Punkte eines begrenzten Intervalls AB:



Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

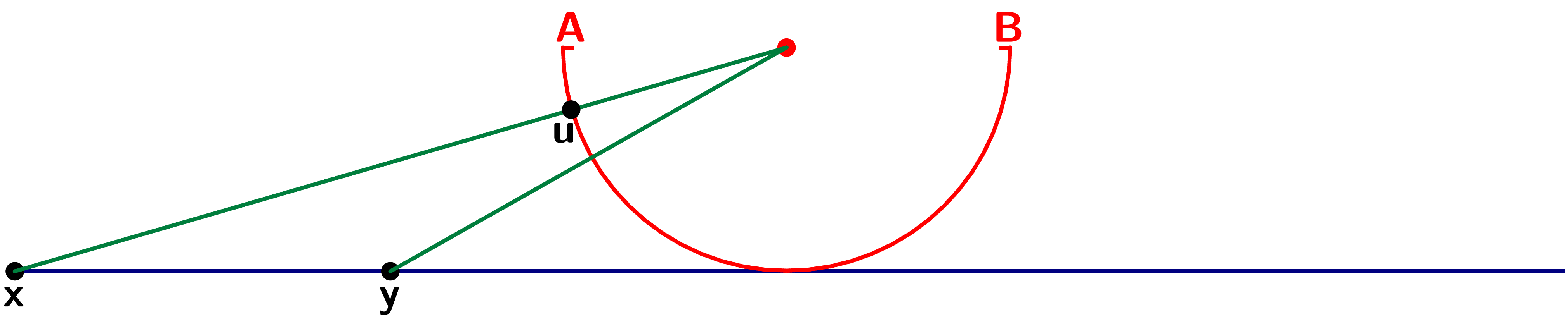
4. Beispiel:
Die Menge $\mathbb{R}$ aller Punkte einer Geraden
ist gleichmächtig mit der Menge der Punkte eines begrenzten Intervalls AB:



Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

4. Beispiel:
Die Menge $\mathbb{R}$ aller Punkte einer Geraden
ist gleichmächtig mit der Menge der Punkte eines begrenzten Intervalls AB:

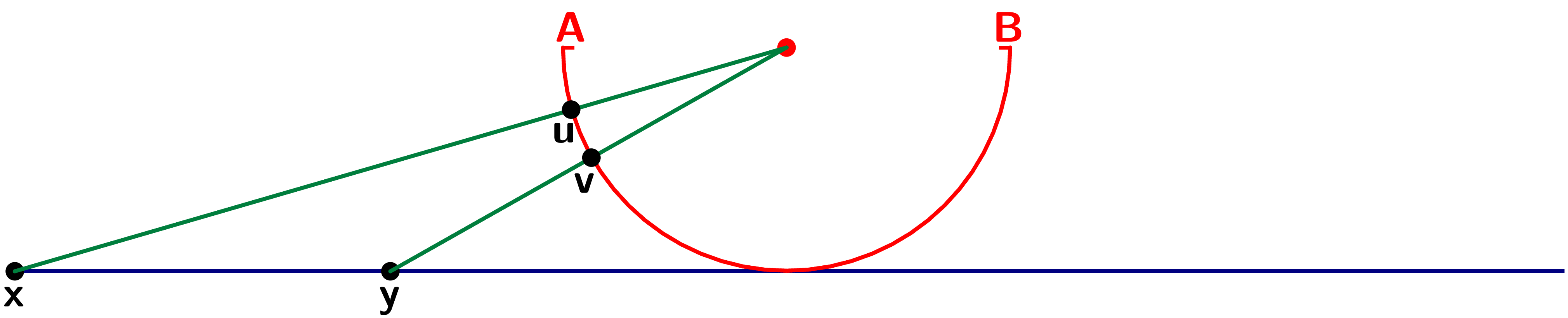


Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

4. Beispiel:
Die Menge $\mathbb{R}$ aller Punkte einer Geraden

ist gleichmächtig mit der Menge der Punkte eines begrenzten Intervalls AB:

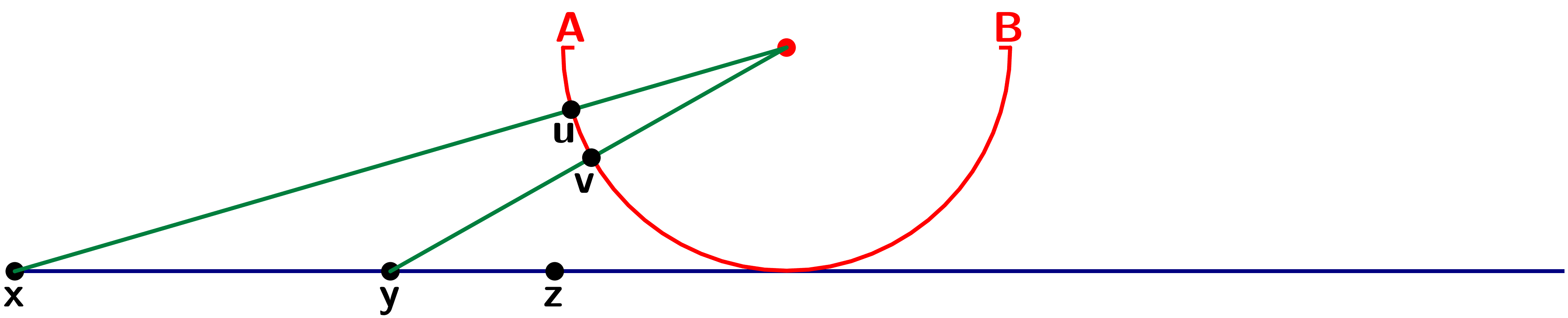


Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

4. Beispiel:
Die Menge $\mathbb{R}$ aller Punkte einer Geraden

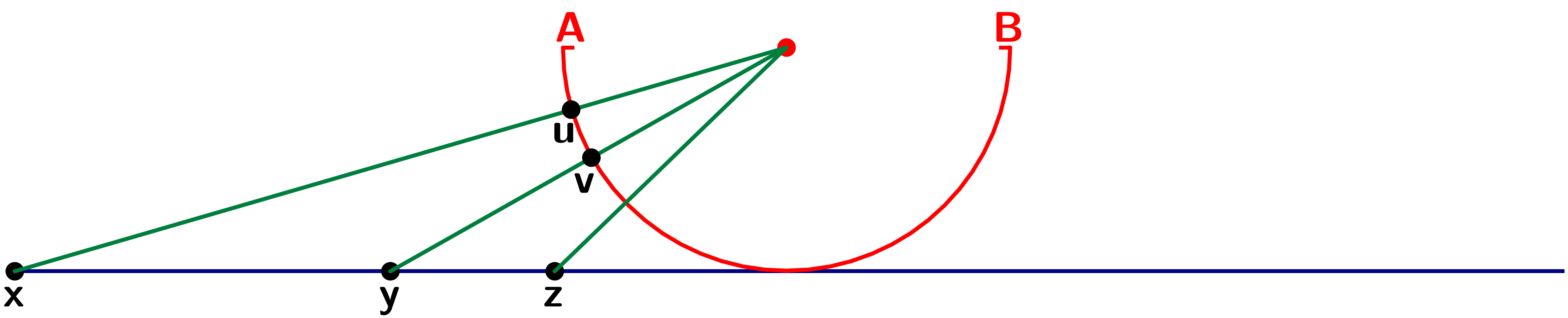
ist gleichmächtig mit der Menge der Punkte eines begrenzten Intervalls AB:



Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

4. Beispiel:
Die Menge $\mathbb{R}$ aller Punkte einer Geraden
ist gleichmächtig mit der Menge der Punkte eines begrenzten Intervalls AB:

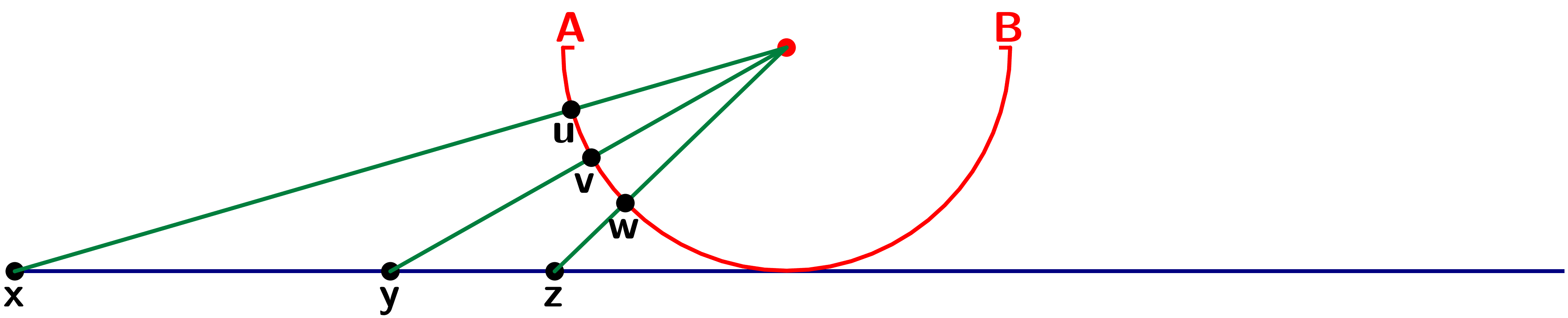


Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

4. Beispiel:
Die Menge $\mathbb{R}$ aller Punkte einer Geraden

ist gleichmächtig mit der Menge der Punkte eines begrenzten Intervalls AB:

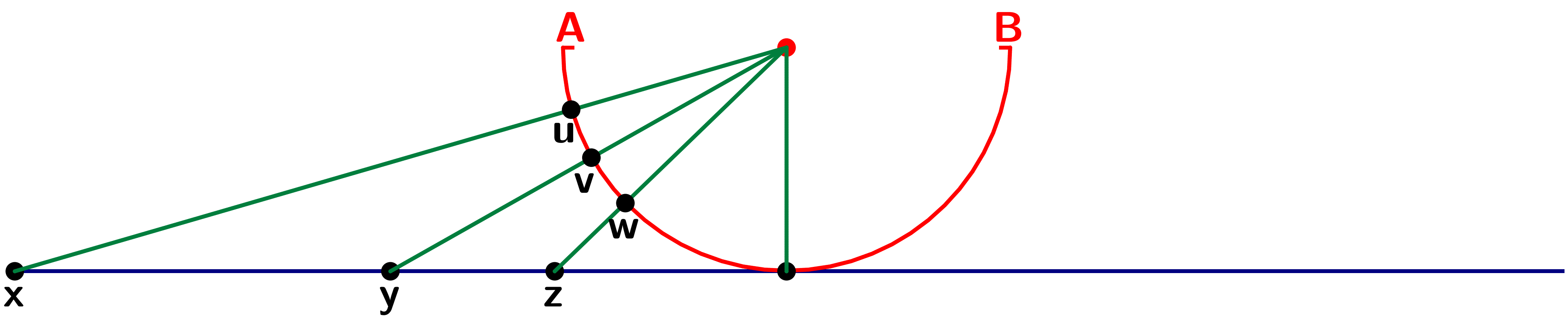


Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

4. Beispiel:
Die Menge $\mathbb{R}$ aller Punkte einer Geraden

ist gleichmächtig mit der Menge der Punkte eines begrenzten Intervalls AB:

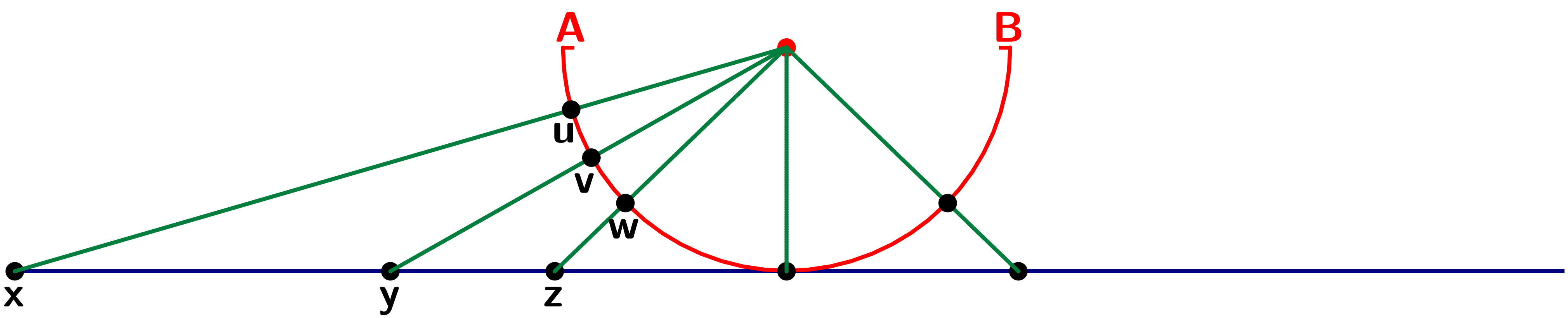


II.3. Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

4. Beispiel:
Die Menge $\mathbb{R}$ aller Punkte einer Geraden

ist gleichmächtig mit der Menge der Punkte eines begrenzten Intervalls AB:

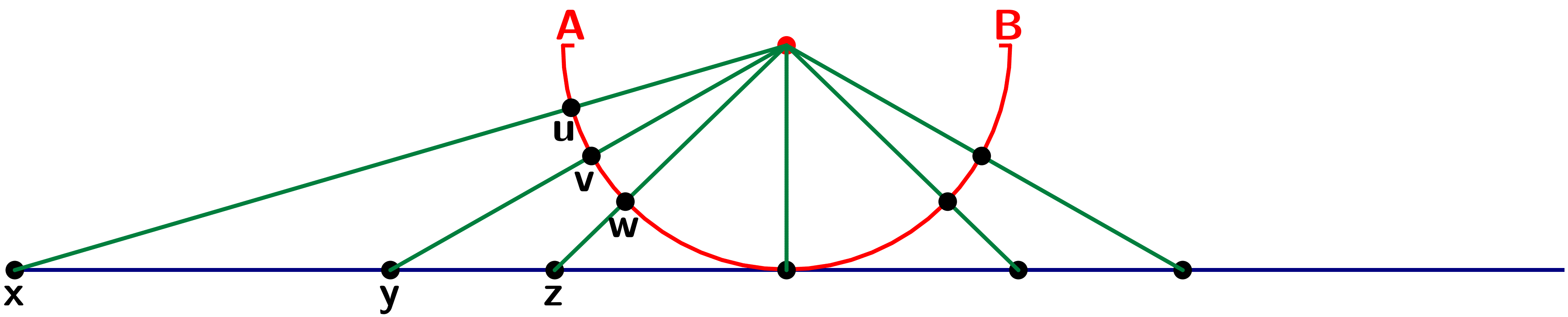


Unendlichkeit

**Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!**

4. Beispiel:
Die Menge $\mathbb{R}$ aller Punkte einer Geraden

ist gleichmächtig mit der Menge der Punkte eines begrenzten Intervalls AB:

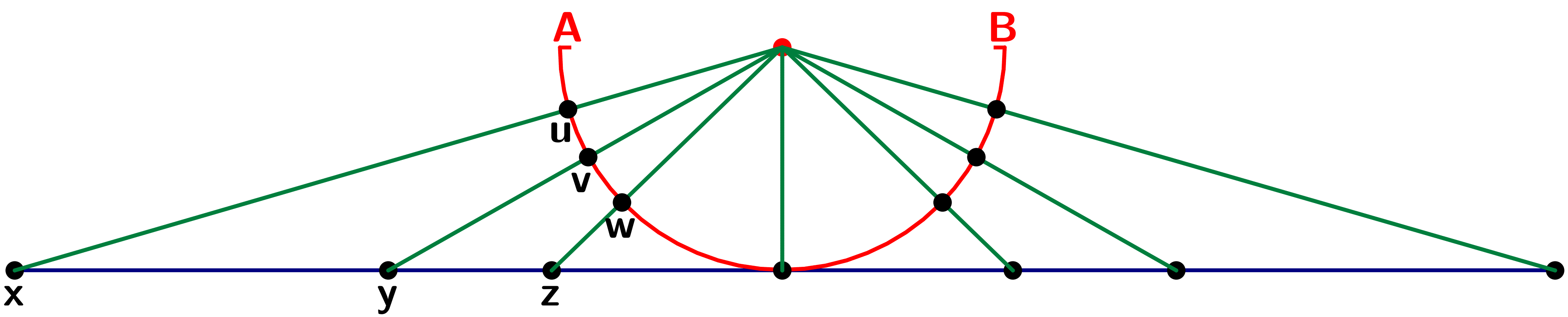


Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

4. Beispiel:
Die Menge $\mathbb{R}$ aller Punkte einer Geraden

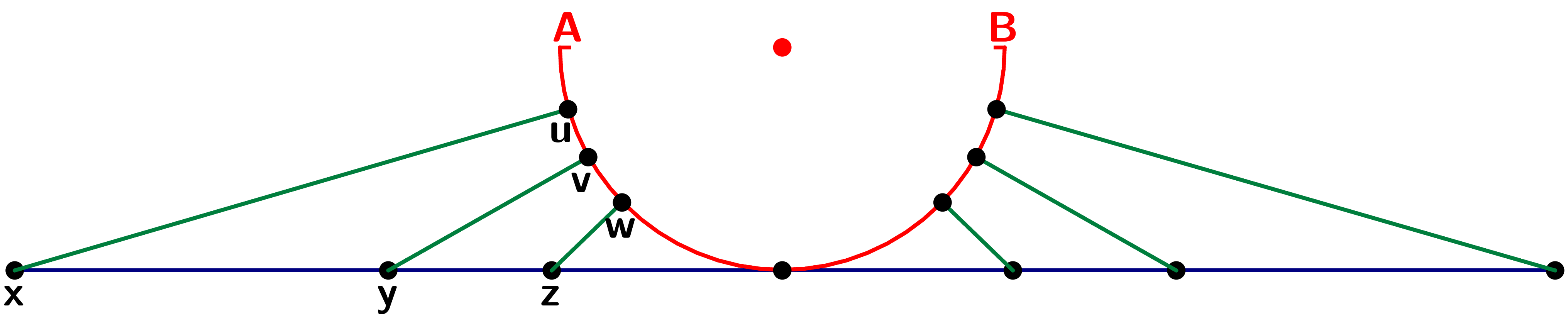
ist gleichmächtig mit der Menge der Punkte eines begrenzten Intervalls AB:



Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

4. Beispiel:
Die Menge $\mathbb{R}$ aller Punkte einer Geraden
ist gleichmächtig mit der Menge der Punkte eines begrenzten Intervalls AB:



Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

Dieses Phänomen ist für die Unendlichkeit charakteristisch und wird zur Definition des Unendlichen verwendet (Cantor 1878):

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

Dieses Phänomen ist für die Unendlichkeit charakteristisch und wird zur Definition des Unendlichen verwendet (Cantor 1878):

Def.: Eine Menge heißt unendlich, wenn sie mit einer echten Teilmenge (also einer ergänzungstheoretisch kleineren Menge) gleichmächtig ist.

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

Dieses Phänomen ist für die Unendlichkeit charakteristisch und wird zur Definition des Unendlichen verwendet (Cantor 1878):

Def.: Eine Menge heißt unendlich, wenn sie mit einer echten Teilmenge (also einer ergänzungstheoretisch kleineren Menge) gleichmächtig ist.

Frühere Definitionen waren dagegen falsch oder unklar:

Unendlichkeit

Im Unendlichen fallen beide Begriffe auseinander:
Für unendliches A kann eine ergänzungstheoretisch größere oder kleinere Menge relationstheoretisch die gleiche Größe wie A haben!

Dieses Phänomen ist für die Unendlichkeit charakteristisch und wird zur Definition des Unendlichen verwendet (Cantor 1878):

Def.: Eine Menge heißt unendlich, wenn sie mit einer echten Teilmenge (also einer ergänzungstheoretisch kleineren Menge) gleichmächtig ist.

Frühere Definitionen waren dagegen falsch oder unklar:

- **unendlich = nicht zählbar**
- **unendlich = was nicht durchlaufen werden kann**
- **unendlich = unbegrenzt, nicht begreifbar, nicht überschaubar**

II.5. Unendliche Zahlen

Unendliche Zahlen

Mengen-Definition der natürlichen Zahlen:

Unendliche Zahlen

Mengen-Definition der natürlichen Zahlen:

$$\mathbf{0} \underset{\text{Def}}{=} \{\}$$

II.4. Unendliche Zahlen

Mengen-Definition der natürlichen Zahlen:

$$\mathbf{0} \underset{\text{Def}}{=} \{\}$$

$$\mathbf{1} \underset{\text{Def}}{=} \{0\}$$

Unendliche Zahlen

Mengen-Definition der natürlichen Zahlen:

$$\mathbf{0} \underset{\text{Def}}{=} \{\}$$

$$\mathbf{1} \underset{\text{Def}}{=} \{0\}$$

$$\mathbf{2} \underset{\text{Def}}{=} \{0, 1\}$$

Unendliche Zahlen

Mengen-Definition der natürlichen Zahlen:

$$\mathbf{0} \underset{\text{Def}}{=} \{\}$$

$$\mathbf{1} \underset{\text{Def}}{=} \{\mathbf{0}\}$$

$$\mathbf{2} \underset{\text{Def}}{=} \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

$$\mathbf{3} \underset{\text{Def}}{=} \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}$$

Unendliche Zahlen

Mengen-Definition der natürlichen Zahlen:

$$\mathbf{0} \underset{\text{Def}}{=} \{\}$$

$$\mathbf{1} \underset{\text{Def}}{=} \{\mathbf{0}\}$$

$$\mathbf{2} \underset{\text{Def}}{=} \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

$$\mathbf{3} \underset{\text{Def}}{=} \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}$$

Unendliche Zahlen

Mengen-Definition der natürlichen Zahlen:

$$\mathbf{0} \underset{\text{Def}}{=} \{\}$$

$$\mathbf{1} \underset{\text{Def}}{=} \{0\} = \{\{\}\}$$

$$\mathbf{2} \underset{\text{Def}}{=} \{0, 1\}$$

$$\mathbf{3} \underset{\text{Def}}{=} \{0, 1, 2\}$$

Unendliche Zahlen

Mengen-Definition der natürlichen Zahlen:

$$\mathbf{0} \underset{\text{Def}}{=} \{\}$$

$$\mathbf{1} \underset{\text{Def}}{=} \{0\} = \{\{\}\}$$

$$\mathbf{2} \underset{\text{Def}}{=} \{0, 1\} = \{\{\}, \{\{\}\}\}$$

$$\mathbf{3} \underset{\text{Def}}{=} \{0, 1, 2\}$$

Unendliche Zahlen

Mengen-Definition der natürlichen Zahlen:

$$\mathbf{0} \underset{\text{Def}}{=} \{\}$$

$$\mathbf{1} \underset{\text{Def}}{=} \{0\} = \{\{\}\}$$

$$\mathbf{2} \underset{\text{Def}}{=} \{0, 1\} = \{\{\}, \{\{\}\}\}$$

$$\mathbf{3} \underset{\text{Def}}{=} \{0, 1, 2\} = \{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\}$$

Unendliche Zahlen

Mengen-Definition der natürlichen Zahlen:

$$\mathbf{0} \underset{\text{Def}}{=} \{\}$$

$$\mathbf{1} \underset{\text{Def}}{=} \{\mathbf{0}\}$$

$$\mathbf{2} \underset{\text{Def}}{=} \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

$$\mathbf{3} \underset{\text{Def}}{=} \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}$$

Unendliche Zahlen

Mengen-Definition der natürlichen Zahlen:

$$\mathbf{0} \underset{\textsf{Def}}{=} \{\}$$

$$\mathbf{1} \underset{\textsf{Def}}{=} \{0\}$$

$$\mathbf{2} \underset{\textsf{Def}}{=} \{0, 1\}$$

$$\mathbf{3} \underset{\textsf{Def}}{=} \{0, 1, 2\}$$

Allgemein: $n + 1 \underset{\textsf{Def}}{=} \{0, 1, 2, \ldots, n\}$

Unendliche Zahlen

Mengen-Definition der natürlichen Zahlen:

$$\mathbf{0} \underset{\text{Def}}{=} \{\}$$

$$\mathbf{1} \underset{\text{Def}}{=} \{0\}$$

$$\mathbf{2} \underset{\text{Def}}{=} \{0, 1\}$$

$$\mathbf{3} \underset{\text{Def}}{=} \{0, 1, 2\}$$

Allgemein: Jede „neue“ Zahl ist die Menge ihrer Vorgänger.

Unendliche Zahlen

Cantors Idee: auch im Unendlichen immer weiterzählen!

Unendliche Zahlen

Cantors Idee: auch im Unendlichen immer weiterzählen!

$\omega \underset{\text{Def}}{=} \mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$

Unendliche Zahlen

Cantors Idee: auch im Unendlichen immer weiterzählen!

$$\omega \underset{\text{Def}}{=} \mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$$

$$\omega + 1 \underset{\text{Def}}{=} \{0, 1, 2 \ldots, \omega\}$$

Unendliche Zahlen

Cantors Idee: auch im Unendlichen immer weiterzählen!

$$\omega \underset{\text{Def}}{=} \mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$$

$$\omega + 1 \underset{\text{Def}}{=} \{0, 1, 2 \ldots, \omega\}$$

$$\omega + 2 \underset{\text{Def}}{=} \{0, 1, 2 \ldots, \omega, \omega + 1\}$$

Unendliche Zahlen

Cantors Idee: auch im Unendlichen immer weiterzählen!

$$\omega \underset{\text{Def}}{=} \mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$$

$$\omega + 1 \underset{\text{Def}}{=} \{0, 1, 2 \ldots, \omega\}$$

$$\omega + 2 \underset{\text{Def}}{=} \{0, 1, 2 \ldots, \omega, \omega + 1\}$$

$$\omega + 3 \underset{\text{Def}}{=} \{0, 1, 2 \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2\}$$

Unendliche Zahlen

Cantors Idee: auch im Unendlichen immer weiterzählen!

$$\omega \underset{\text{Def}}{=} \mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$$

$$\omega + 1 \underset{\text{Def}}{=} \{0, 1, 2 \ldots, \omega\}$$

$$\omega + 2 \underset{\text{Def}}{=} \{0, 1, 2 \ldots, \omega, \omega + 1\}$$

$$\omega + 3 \underset{\text{Def}}{=} \{0, 1, 2 \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2\}$$

usw.

Unendliche Zahlen

Cantors Idee: auch im Unendlichen immer weiterzählen!

$$\omega \underset{\text{Def}}{=} \mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$$

$$\omega + 1 \underset{\text{Def}}{=} \{0, 1, 2 \ldots, \omega\}$$

$$\omega + 2 \underset{\text{Def}}{=} \{0, 1, 2 \ldots, \omega, \omega + 1\}$$

$$\omega + 3 \underset{\text{Def}}{=} \{0, 1, 2 \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2\}$$

usw.

$$\omega + \omega \underset{\text{Def}}{=} \{0, 1, 2 \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2 \ldots\}$$

Unendliche Zahlen

Cantors Idee: auch im Unendlichen immer weiterzählen!

$$\omega \underset{\text{Def}}{=} \mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$$

$$\omega + 1 \underset{\text{Def}}{=} \{0, 1, 2 \ldots, \omega\}$$

$$\omega + 2 \underset{\text{Def}}{=} \{0, 1, 2 \ldots, \omega, \omega + 1\}$$

$$\omega + 3 \underset{\text{Def}}{=} \{0, 1, 2 \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2\}$$

usw.

$$2 \cdot \omega \underset{\text{Def}}{=} \{0, 1, 2 \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2 \ldots\}$$

Unendliche Zahlen

Der gestauchte Zahlenstrahl

Unendliche Zahlen

Der gestauchte Zahlenstrahl

Unendliche Zahlen

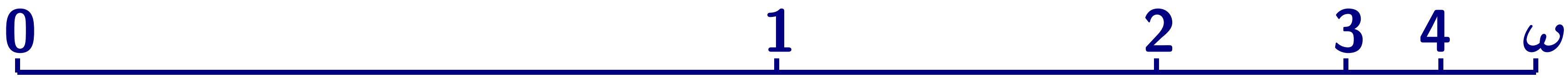
Der gestauchte Zahlenstrahl

Unendliche Zahlen

Der gestauchte Zahlenstrahl

Unendliche Zahlen

Der gestauchte Zahlenstrahl

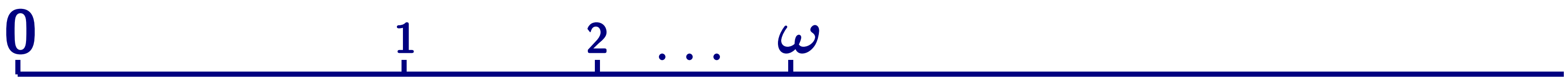


Unendliche Zahlen

Der gestauchte Zahlenstrahl

Unendliche Zahlen

Der noch mehr gestauchte Zahlenstrahl



Unendliche Zahlen

Der noch mehr gestauchte Zahlenstrahl

Unendliche Zahlen

Der noch mehr gestauchte Zahlenstrahl

Unendliche Zahlen

Der noch viel mehr gestauchte Zahlenstrahl

Unendliche Zahlen

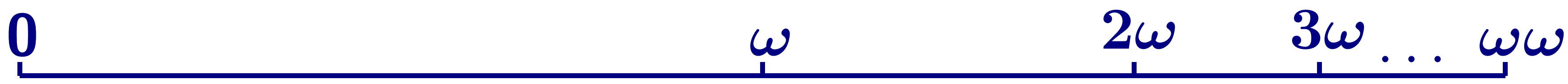
Der noch viel mehr gestauchte Zahlenstrahl

Unendliche Zahlen

Der noch viel mehr gestauchte Zahlenstrahl

Unendliche Zahlen

Der noch viel mehr gestauchte Zahlenstrahl



Unendliche Zahlen

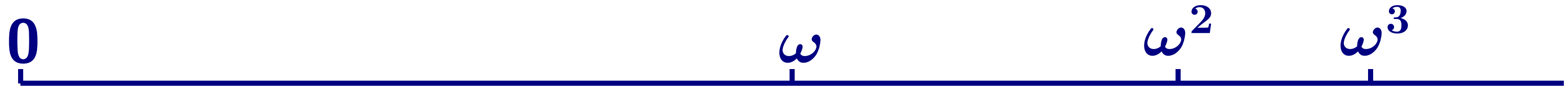
Der noch viel mehr gestauchte Zahlenstrahl

Unendliche Zahlen

Der noch viel viel mehr gestauchte Zahlenstrahl

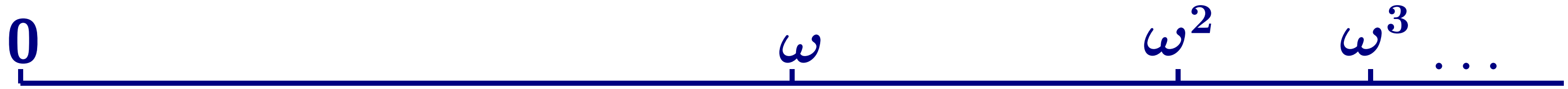
Unendliche Zahlen

Der noch viel viel mehr gestauchte Zahlenstrahl



Unendliche Zahlen

Der noch viel viel mehr gestauchte Zahlenstrahl

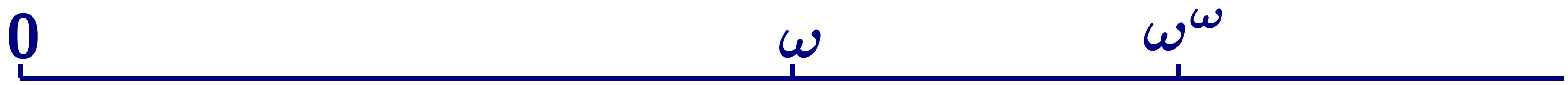


Unendliche Zahlen

Der noch viel viel mehr gestauchte Zahlenstrahl

Unendliche Zahlen

Der noch viel viel viel mehr gestauchte Zahlenstrahl



Unendliche Zahlen

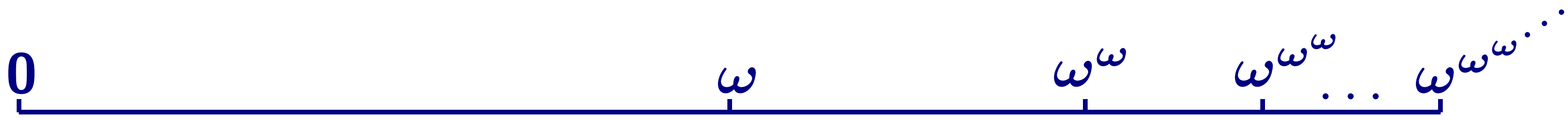
Der noch viel viel viel mehr gestauchte Zahlenstrahl

Unendliche Zahlen

Der noch viel viel viel mehr gestauchte Zahlenstrahl

Unendliche Zahlen

Der noch viel viel viel mehr gestauchte Zahlenstrahl

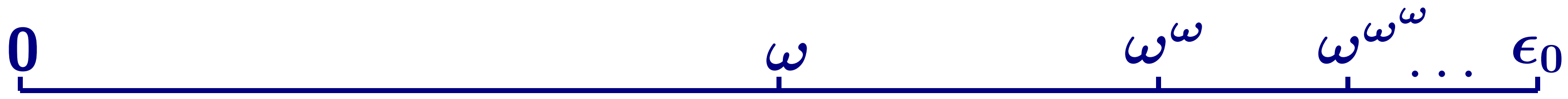


Unendliche Zahlen

Der noch viel viel viel mehr gestauchte Zahlenstrahl

Unendliche Zahlen

Der noch viel viel viel mehr gestauchte Zahlenstrahl



Unendliche Zahlen

Der noch viel viel viel mehr gestauchte Zahlenstrahl

Unendliche Zahlen

Der noch viel viel viel mehr gestauchte Zahlenstrahl

Die unendlichen Zahlen von ω bis ϵ_0

(und weit darüberhinaus)

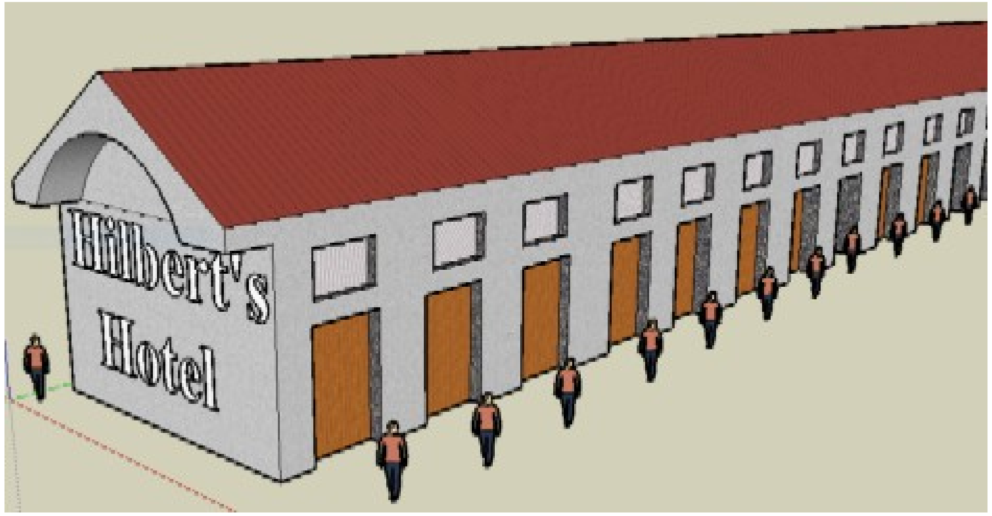
sind jedoch alle gleichmächtig!!

Unendliche Zahlen

David Hilbert (1862-1943)

Unendliche Zahlen

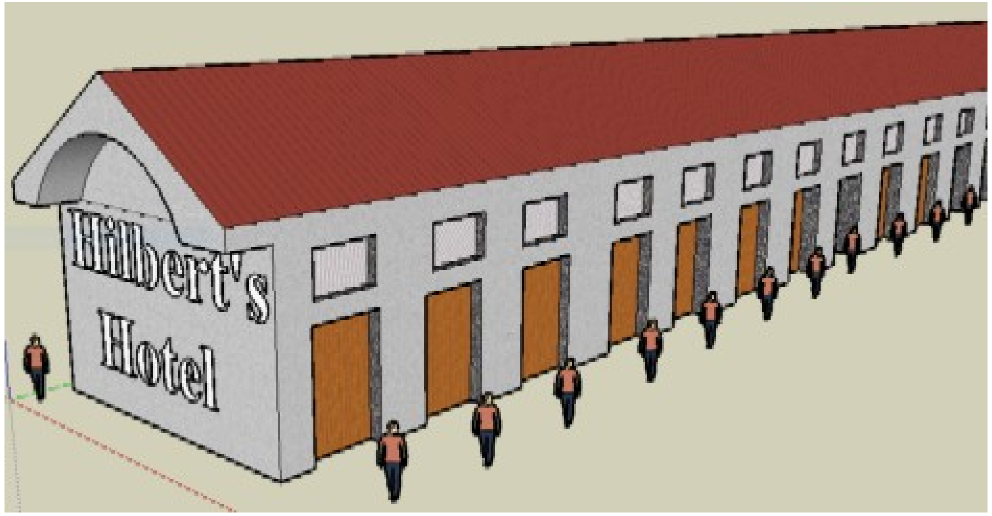
David Hilbert (1862-1943)



Das volle Hotel mit ω Zimmern!

Unendliche Zahlen

David Hilbert (1862-1943)

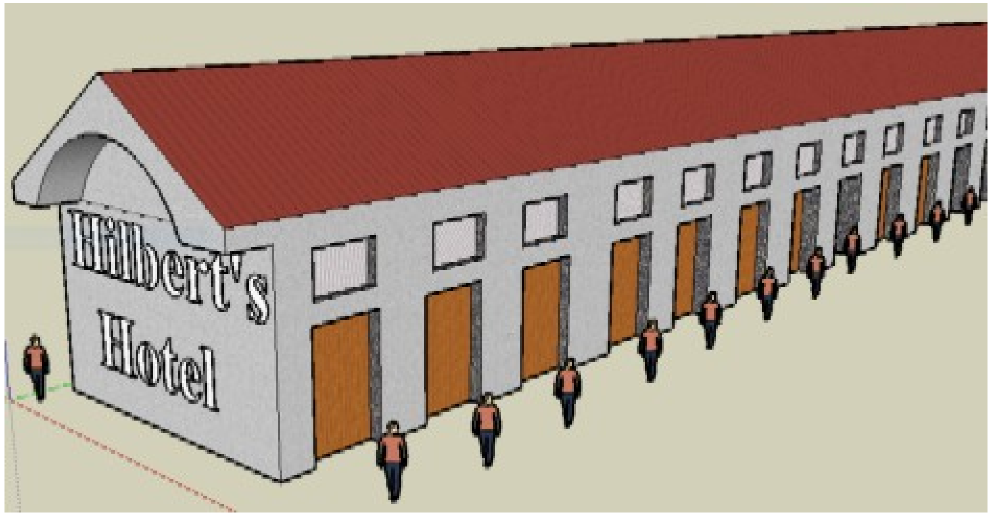


Das volle Hotel mit ω Zimmern!

Es kann noch einen Gast aufnehmen!

Unendliche Zahlen

David Hilbert (1862-1943)

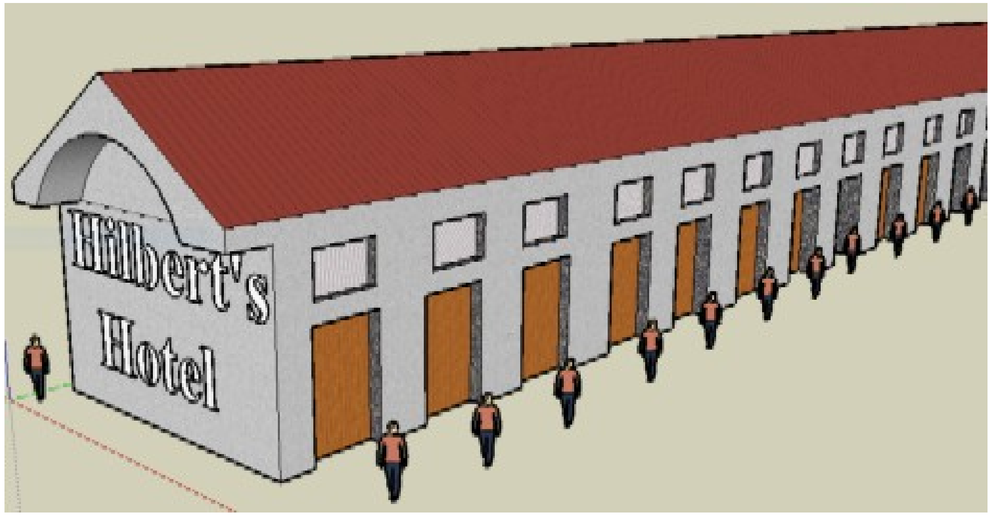


Das volle Hotel mit ω Zimmern!

Es kann noch einen Gast aufnehmen! $\Rightarrow$ $\omega + 1$ ist nicht mächtiger als ω!

Unendliche Zahlen

David Hilbert (1862-1943)

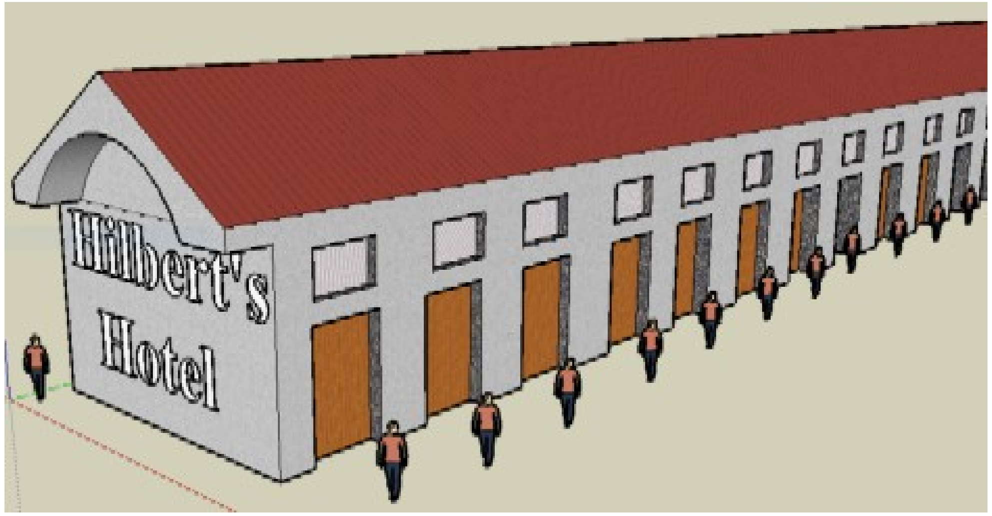


Das volle Hotel mit ω Zimmern!

Es kann ω weitere Gäste aufnehmen!

Unendliche Zahlen

David Hilbert (1862-1943)

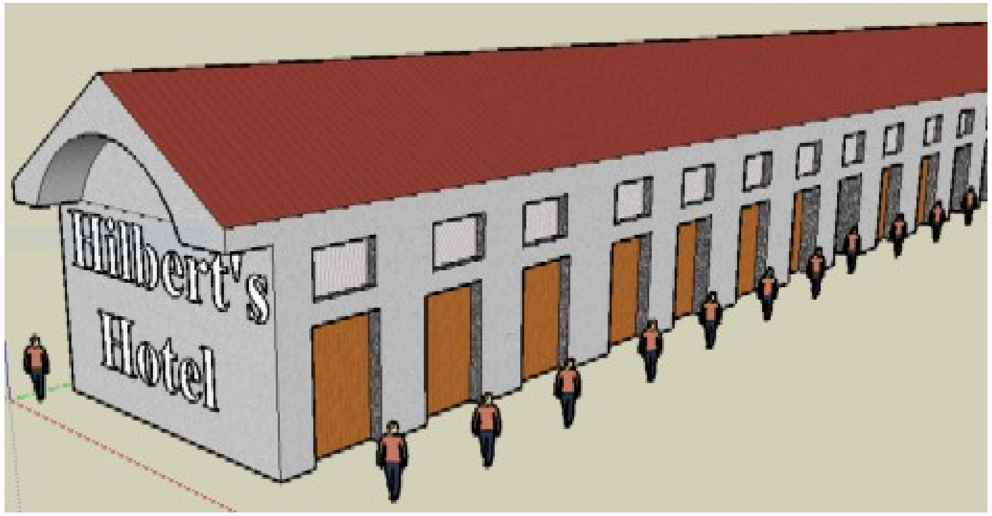


Das volle Hotel mit ω Zimmern!

Es kann ω weitere Gäste aufnehmen! $\Rightarrow$ 2ω ist nicht mächtiger als ω!

Unendliche Zahlen

David Hilbert (1862-1943)

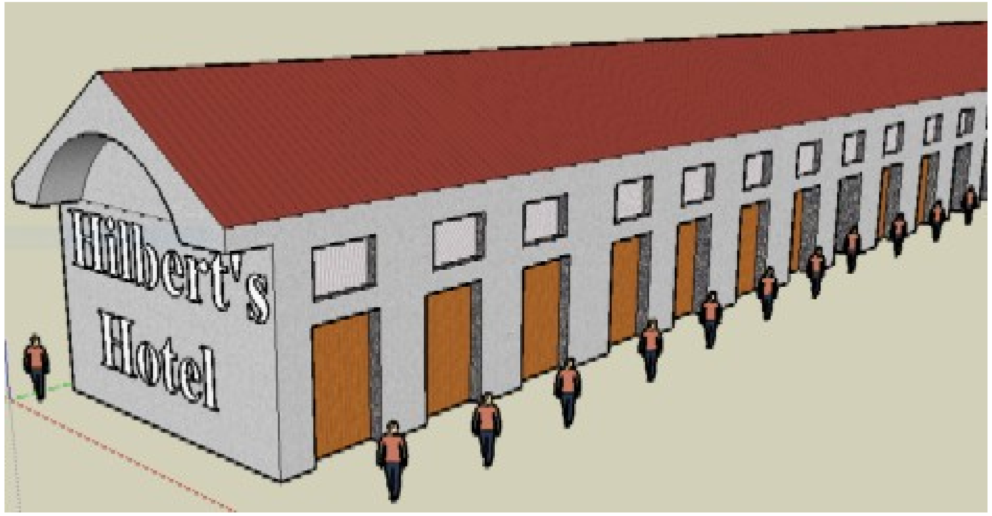


Das volle Hotel mit ω Zimmern!

Es kann ϵ_0 weitere Gäste aufnehmen!

Unendliche Zahlen

David Hilbert (1862-1943)

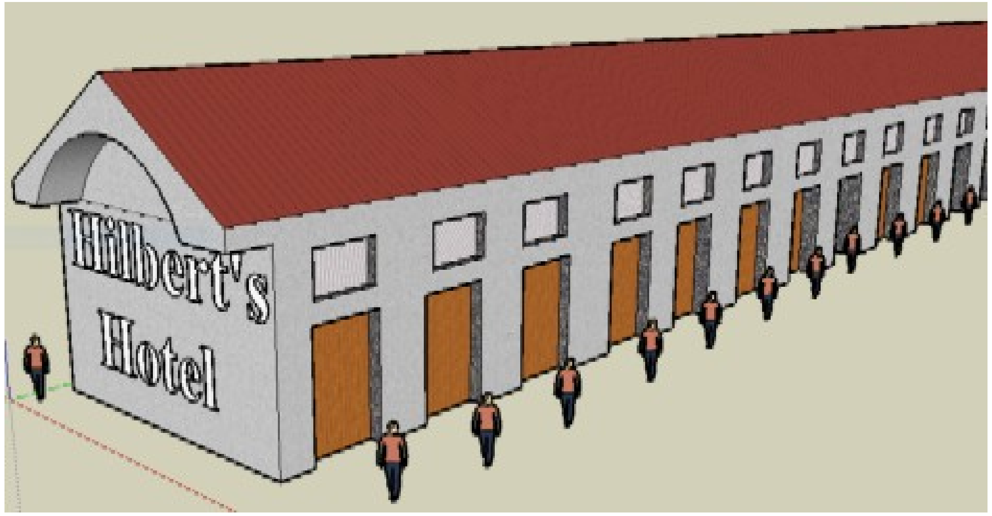


Das volle Hotel mit ω Zimmern!

Es kann ϵ_0 weitere Gäste aufnehmen! $\Rightarrow$ ϵ_0 ist nicht mächtiger als ω!

Unendliche Zahlen

David Hilbert (1862-1943)

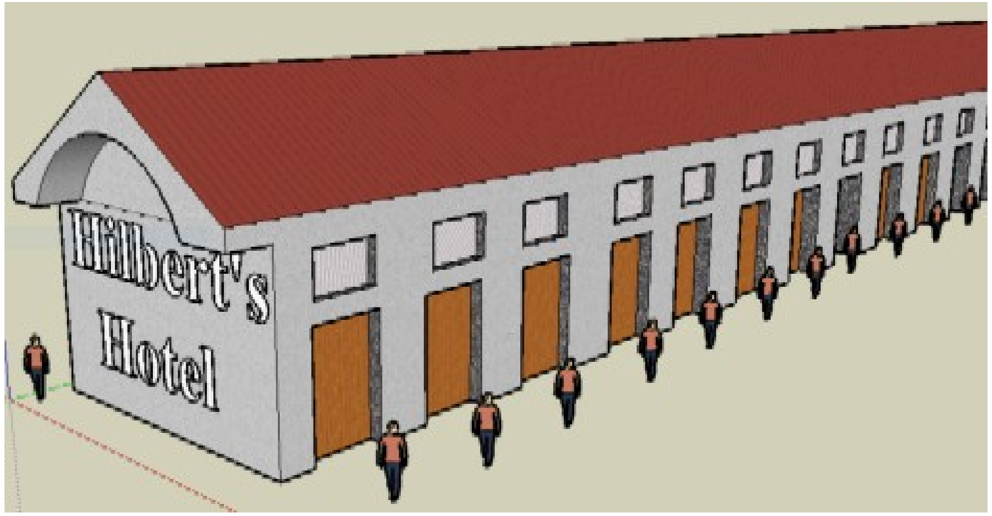


Das volle Hotel mit ω Zimmern!

Dennoch kann es nicht jede unendliche Anzahl von Gästen aufnehmen!

Unendliche Zahlen

David Hilbert (1862-1943)

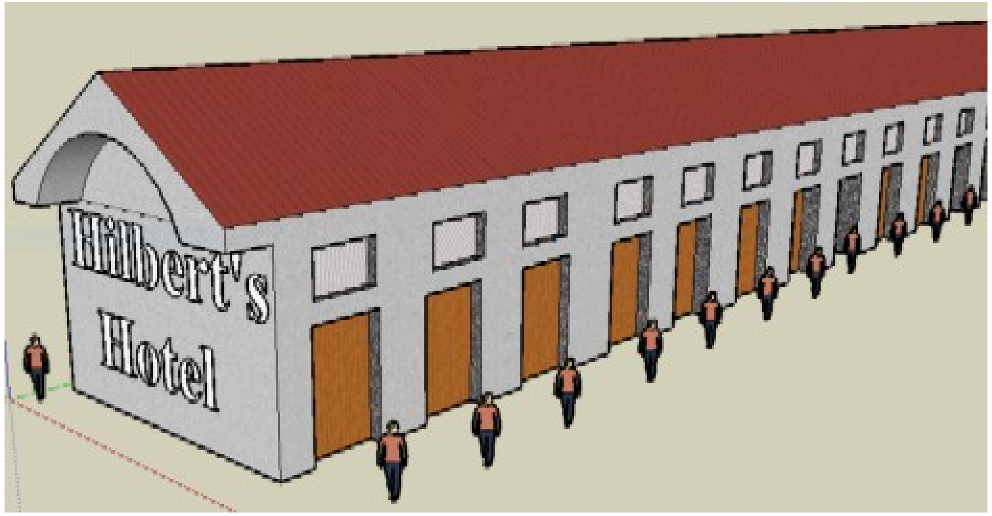


Das volle Hotel mit ω Zimmern!

Dennoch kann es nicht jede unendliche Anzahl von Gästen aufnehmen! Es gibt mächtigere unendliche Zahlen als ω!

Unendliche Zahlen

David Hilbert (1862-1943)



Das volle Hotel mit ω Zimmern!

Dennoch kann es nicht jede unendliche Anzahl von Gästen aufnehmen! Es gibt mächtigere unendliche Zahlen als ω!

Def.: Eine unendliche Zahl heißt Kardinalzahl, wenn sie mächtiger ist als alle ihre Vorgänger.

Unendliche Zahlen

Def.: Cantor zeigte: es gibt unendlich viele unendliche Kardinalzahlen!

Georg Cantor (1845-1918)

Unendliche Zahlen

Def.: Cantor zeigte: es gibt unendlich viele unendliche Kardinalzahlen!

Georg Cantor (1845-1918)

Der hebräische Buchstabe Aleph:
Symbol für unendliche Kardinalzahlen,
die Cantor $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, ... nannte

Unendliche Zahlen

Def.: Cantor zeigte: es gibt unendlich viele unendliche Kardinalzahlen!

Georg Cantor (1845-1918)

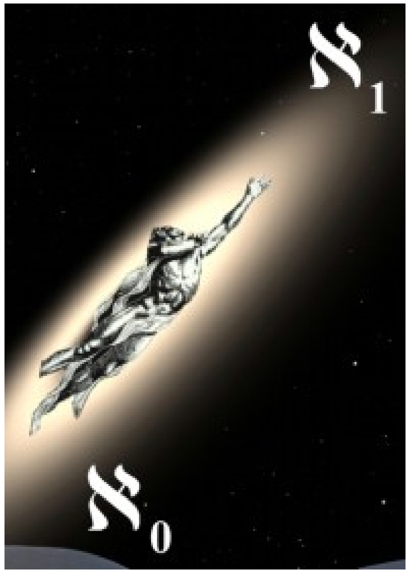
Der hebräische Buchstabe Aleph:
Symbol für unendliche Kardinalzahlen,
die Cantor $\aleph_0, \ \aleph_1, \ \aleph_2, \ \ldots$ nannte

Die kleinste unendliche Kardinalzahl $\aleph_0$ ist ω: $\aleph_0 = \omega$.
Die nächste unendliche Kardinalzahl $\aleph_1$ kommt weit hinter ϵ_0: $\epsilon_0 < \aleph_1$.

Unendliche Zahlen

Aleph-0 und Aleph-1 auf dem gestauchten Zahlenstrahl:

$0 \qquad \omega \qquad \omega^{\omega} \qquad \omega^{\omega^{\omega}} \qquad \epsilon_0 \quad \ldots$

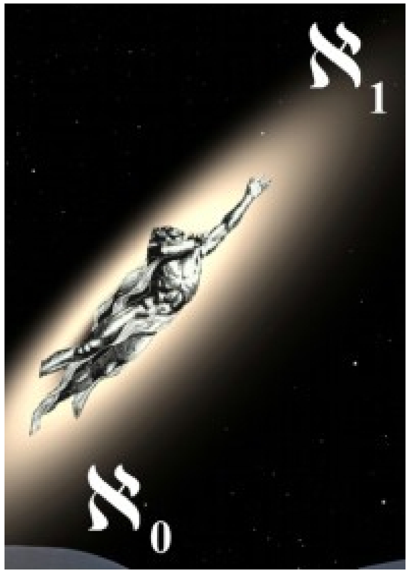


Unendliche Zahlen

Aleph-0 und Aleph-1 auf dem gestauchten Zahlenstrahl:

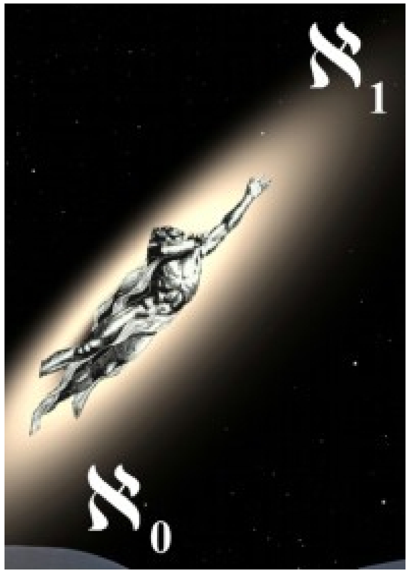
$0 \quad \omega \quad \omega^{\omega} \quad \omega^{\omega^{\omega}} \quad \epsilon_0 \quad \ldots$

$\aleph_0$



Unendliche Zahlen

Aleph-0 und Aleph-1 auf dem gestauchten Zahlenstrahl:



Unendliche Zahlen

Die Folge der unendlichen Kardinalzahlen:

$\aleph_0 \quad \aleph_1$

Unendliche Zahlen

Die Folge der unendlichen Kardinalzahlen:

$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \ldots$

Unendliche Zahlen

Die Folge der unendlichen Kardinalzahlen:

$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \ldots \aleph_\omega$

Unendliche Zahlen

Die Folge der unendlichen Kardinalzahlen:

$$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \ldots \aleph_\omega \quad \aleph_{\omega+1} \ldots$$

Unendliche Zahlen

Die Folge der unendlichen Kardinalzahlen:

$$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \ldots \aleph_\omega \quad \aleph_{\omega+1} \ldots \aleph_{2\omega} \ldots$$

Unendliche Zahlen

Die Folge der unendlichen Kardinalzahlen:

$$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \ldots \aleph_\omega \quad \aleph_{\omega+1} \ldots \aleph_{2\omega} \ldots \aleph_{\omega^\omega} \ldots$$

Unendliche Zahlen

Die Folge der unendlichen Kardinalzahlen:

$$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \ldots \aleph_\omega \quad \aleph_{\omega+1} \ldots \aleph_{2\omega} \ldots \aleph_{\omega^\omega} \ldots \quad \aleph_{\epsilon_0} \ldots$$

Unendliche Zahlen

Die Folge der unendlichen Kardinalzahlen:

$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \ldots \aleph_\omega \quad \aleph_{\omega+1} \ldots \aleph_{2\omega} \ldots \aleph_{\omega^\omega} \ldots \quad \aleph_{\epsilon_0} \ldots$

$\aleph_{\aleph_1}$

Unendliche Zahlen

Die Folge der unendlichen Kardinalzahlen:

$$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \ldots \aleph_\omega \quad \aleph_{\omega+1} \ldots \aleph_{2\omega} \ldots \aleph_{\omega^\omega} \ldots \quad \aleph_{\epsilon_0} \ldots$$

$$\aleph_{\aleph_1} \qquad \ldots$$

Unendliche Zahlen

Die Folge der unendlichen Kardinalzahlen:

$$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \ldots \aleph_\omega \quad \aleph_{\omega+1} \ldots \aleph_{2\omega} \ldots \aleph_{\omega^\omega} \ldots \quad \aleph_{\epsilon_0} \ldots$$

$$\aleph_{\aleph_1} \qquad \ldots \qquad \aleph_{\aleph_{\epsilon_0}} \ldots$$

Unendliche Zahlen

Die Folge der unendlichen Kardinalzahlen:

$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \ldots \aleph_\omega \quad \aleph_{\omega+1} \ldots \aleph_{2\omega} \ldots \aleph_{\omega^\omega} \ldots \quad \aleph_{\epsilon_0} \ldots$

$\aleph_{\aleph_1} \quad \ldots \quad \aleph_{\aleph_{\epsilon_0}} \ldots$

$\aleph_{\aleph_{\aleph_1}} \ldots$

Unendliche Zahlen

Die Folge der unendlichen Kardinalzahlen:

$$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \ldots \aleph_\omega \quad \aleph_{\omega+1} \ldots \aleph_{2\omega} \ldots \aleph_{\omega^\omega} \ldots \quad \aleph_{\epsilon_0} \ldots$$

$$\aleph_{\aleph_1} \qquad \cdots \qquad \aleph_{\aleph_{\epsilon_0}} \ldots$$

$$\aleph_{\aleph_{\aleph_1}} \ldots \quad \aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_1}}} \ldots\ldots$$

Unendliche Zahlen

Die Folge der unendlichen Kardinalzahlen:

$$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \dots \aleph_\omega \quad \aleph_{\omega+1} \dots \aleph_{2\omega} \dots \aleph_{\omega^\omega} \dots \aleph_{\epsilon_0} \dots$$

$$\aleph_{\aleph_1} \qquad \dots \qquad \aleph_{\aleph_{\epsilon_0}} \dots$$

$$\aleph_{\aleph_{\aleph_1}} \dots \quad \aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_1}}} \dots\dots \quad \aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_{\ddots}}}} \quad \dots$$

Unendliche Zahlen

Die Folge der unendlichen Kardinalzahlen:

$$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \ldots \aleph_\omega \quad \aleph_{\omega+1} \ldots \aleph_{2\omega} \ldots \aleph_{\omega^\omega} \ldots \aleph_{\epsilon_0} \ldots$$

$$\aleph_{\aleph_1} \qquad \ldots \qquad \aleph_{\aleph_{\epsilon_0}} \ldots$$

$$\aleph_{\aleph_{\aleph_1}} \ldots \quad \aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_1}}} \ldots\ldots \quad \aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_{\ddots}}}} \quad \ldots$$

unendlich viele Alephs

Unendliche Zahlen

Die Folge der unendlichen Kardinalzahlen:

$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \ldots \aleph_\omega \quad \aleph_{\omega+1} \ldots \aleph_{2\omega} \ldots \aleph_{\omega^\omega} \ldots \aleph_{\epsilon_0} \ldots$

$\aleph_{\aleph_1} \quad \ldots \quad \aleph_{\aleph_{\epsilon_0}} \ldots$

$\aleph_{\aleph_{\aleph_1}} \ldots \quad \aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_1}}} \ldots\ldots \quad \Theta \ldots\ldots$

Unendliche Zahlen

Die Folge der unendlichen Kardinalzahlen:

$$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \ldots \aleph_\omega \quad \aleph_{\omega+1} \ldots \aleph_{2\omega} \ldots \aleph_{\omega^\omega} \ldots \quad \aleph_{\epsilon_0} \ldots$$

$$\aleph_{\aleph_1} \qquad \cdots \qquad \aleph_{\aleph_{\epsilon_0}} \ldots$$

$$\aleph_{\aleph_{\aleph_1}} \ldots \quad \aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_1}}} \ldots\ldots \quad \Theta \ldots\ldots$$

Wie hat Cantor dies bewiesen?

Unendliche Zahlen

Satz von Cantor: **Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist stets mächtiger (relationstheoretisch größer) als M.**

Unendliche Zahlen

Satz von Cantor: **Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist stets mächtiger (relationstheoretisch größer) als M.**

M

a
b
c
d
e
$\ldots$

$\mathcal{P}(M)$

$\{\}$			
$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$	$\ldots$
$\{b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,d\}$	$\ldots$
$\{c\}$	$\{a,d\}$	$\{a,b,e\}$	$\ldots$
$\{d\}$	$\{a,e\}$	$\{a,b,f\}$	$\ldots$
$\{e\}$	$\{a,f\}$	$\{a,b,g\}$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	

Unendliche Zahlen

Satz von Cantor: **Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist stets mächtiger (relationstheoretisch größer) als M.**

Annahme: Es gibt eine Bijektion von M in $\mathcal{P}(M)$.

Unendliche Zahlen

Satz von Cantor: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist stets mächtiger (relationstheoretisch größer) als M.

Annahme: Es gibt eine Bijektion von M in $\mathcal{P}(M)$.

$$
\begin{array}{ccl}
M & & \mathcal{P}(M) \\
a & \longrightarrow & \{b,c,d,e\} \\
b & \longrightarrow & \{a,b\} \\
c & \longrightarrow & \{\} \\
d & \longrightarrow & \{a,b,c\} \\
e & \longrightarrow & M \\
\ldots & & \ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Unendliche Zahlen

Satz von Cantor: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist stets mächtiger (relationstheoretisch größer) als M.

Annahme: Es gibt eine Bijektion von M in $\mathcal{P}(M)$.

$$\begin{array}{ccl} M & & \mathcal{P}(M) \\ a & \longrightarrow & \{b,c,d,e\} \\ b & \longrightarrow & \{a,b\} \\ c & \longrightarrow & \{\} \\ d & \longrightarrow & \{a,b,c\} \\ e & \longrightarrow & M \\ \ldots & & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Zur Widerlegung lässt sich eine Teilmenge T von M „konstruieren“, die links nicht aufgeführt ist:

Unendliche Zahlen

Satz von Cantor: **Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist stets mächtiger (relationstheoretisch größer) als M.**

Annahme: Es gibt eine Bijektion von M in $\mathcal{P}(M)$.

$$\begin{array}{ccc} M & & \mathcal{P}(M) \\ a & \longrightarrow & \{b,c,d,e\} \\ b & \longrightarrow & \{a,b\} \\ c & \longrightarrow & \{\} \\ d & \longrightarrow & \{a,b,c\} \\ e & \longrightarrow & M \\ \ldots & & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Zur Widerlegung lässt sich eine Teilmenge T von M „konstruieren“, die links nicht aufgeführt ist:

1. Schritt:

Unendliche Zahlen

Satz von Cantor: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist stets mächtiger (relationstheoretisch größer) als M.

Annahme: Es gibt eine Bijektion von M in $\mathcal{P}(M)$.

M		$\mathcal{P}(M)$
a	$\longrightarrow$	$\{b,c,d,e\}$
b	$\longrightarrow$	$\{a,b\}$
c	$\longrightarrow$	$\{\}$
d	$\longrightarrow$	$\{a,b,c\}$
e	$\longrightarrow$	M
$\cdots$		$\cdots\cdots\cdots$

Zur Widerlegung lässt sich eine Teilmenge T von M „konstruieren“, die links nicht aufgeführt ist:

1. Schritt: a in T aufnehmen: $T = \{a, \ldots\}$

Unendliche Zahlen

Satz von Cantor: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist stets mächtiger (relationstheoretisch größer) als M.

Annahme: Es gibt eine Bijektion von M in $\mathcal{P}(M)$.

$$
\begin{array}{ccc}
M & & \mathcal{P}(M) \\
a & \longrightarrow & \{b,c,d,e\} \\
b & \longrightarrow & \{a,b\} \\
c & \longrightarrow & \{\} \\
d & \longrightarrow & \{a,b,c\} \\
e & \longrightarrow & M \\
\cdots & & \cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

Zur **Widerlegung** lässt sich eine Teilmenge T von M „konstruieren“, die links nicht aufgeführt ist:

1. Schritt: a in T aufnehmen: $T = \{a, \ldots\}$
2. Schritt:

Unendliche Zahlen

Satz von Cantor: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist stets mächtiger (relationstheoretisch größer) als M.

Annahme: Es gibt eine Bijektion von M in $\mathcal{P}(M)$.

M		$\mathcal{P}(M)$
a	$\longrightarrow$	$\{b,c,d,e\}$
b	$\longrightarrow$	$\{a,b\}$
c	$\longrightarrow$	$\{\}$
d	$\longrightarrow$	$\{a,b,c\}$
e	$\longrightarrow$	M
$\dots$		$\dots\dots\dots$

Zur Widerlegung lässt sich eine Teilmenge T von M „konstruieren“, die links nicht aufgeführt ist:

1. Schritt: a in T aufnehmen: $T = \{a, \dots\}$

2. Schritt: b nicht aufnehmen: $T = \{a, \dots\}$

Unendliche Zahlen

Satz von Cantor: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist stets mächtiger (relationstheoretisch größer) als M.

Annahme: Es gibt eine Bijektion von M in $\mathcal{P}(M)$.

M		$\mathcal{P}(M)$
a	$\longrightarrow$	$\{b,c,d,e\}$
b	$\longrightarrow$	$\{a,b\}$
c	$\longrightarrow$	$\{\}$
d	$\longrightarrow$	$\{a,b,c\}$
e	$\longrightarrow$	M
$\ldots$		$\ldots\ldots\ldots$

Zur Widerlegung lässt sich eine Teilmenge T von M „konstruieren“, die links nicht aufgeführt ist:

1. Schritt: a in T aufnehmen: $T = \{a, \ldots\}$

2. Schritt: b nicht aufnehmen: $T = \{a, \ldots\}$

3. Schritt:

Unendliche Zahlen

Satz von Cantor: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist stets mächtiger (relationstheoretisch größer) als M.

Annahme: Es gibt eine Bijektion von M in $\mathcal{P}(M)$.

M		$\mathcal{P}(M)$
a	$\longrightarrow$	$\{b,c,d,e\}$
b	$\longrightarrow$	$\{a,b\}$
c	$\longrightarrow$	$\{\}$
d	$\longrightarrow$	$\{a,b,c\}$
e	$\longrightarrow$	M
$\ldots$		$\ldots\ldots\ldots$

Zur Widerlegung lässt sich eine Teilmenge T von M „konstruieren“, die links nicht aufgeführt ist:

1. Schritt: a in T aufnehmen: $T = \{a, \ldots\}$
2. Schritt: b nicht aufnehmen: $T = \{a, \ldots\}$
3. Schritt: c in T aufnehmen: $T = \{a, c, \ldots\}$

Unendliche Zahlen

Satz von Cantor: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist stets mächtiger (relationstheoretisch größer) als M.

Annahme: Es gibt eine Bijektion von M in $\mathcal{P}(M)$.

M		$\mathcal{P}(M)$
a	$\longrightarrow$	$\{b,c,d,e\}$
b	$\longrightarrow$	$\{a,b\}$
c	$\longrightarrow$	$\{\}$
d	$\longrightarrow$	$\{a,b,c\}$
e	$\longrightarrow$	M
$\dots$		$\dots\dots\dots$

Zur Widerlegung lässt sich eine Teilmenge T von M „konstruieren“, die links nicht aufgeführt ist:

1. Schritt: a in T aufnehmen: $T = \{a, \dots\}$

2. Schritt: b nicht aufnehmen: $T = \{a, \dots\}$

3. Schritt: c in T aufnehmen: $T = \{a, c, \dots\}$

usw.

Unendliche Zahlen

Satz von Cantor: **Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist stets mächtiger als M.**

Unendliche Zahlen

Satz von Cantor: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist stets mächtiger als M.

Konsequenz: Es gibt zu jeder unendlichen Kardinalzahl eine größere!

Unendliche Zahlen

Satz von Cantor: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist stets mächtiger als M.

Konsequenz: Es gibt zu jeder unendlichen Kardinalzahl eine größere!
Es gibt es unendlich viele Alephs: Stufen der Unendlichkeit!

Unendliche Zahlen

Satz von Cantor: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist stets mächtiger als M.

Konsequenz: Es gibt zu jeder unendlichen Kardinalzahl eine größere!
Es gibt es unendlich viele Alephs: Stufen der Unendlichkeit!

- Stufe von $\mathbb{N}$ (abzählbare Unendlichkeit): Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

Unendliche Zahlen

Satz von Cantor: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist stets mächtiger als M.

Konsequenz: Es gibt zu jeder unendlichen Kardinalzahl eine größere!
Es gibt es unendlich viele Alephs: Stufen der Unendlichkeit!

- Stufe von $\mathbb{N}$ (abzählbare Unendlichkeit): Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
  kleinste unendliche Kardinalzahl $\aleph_0$

Unendliche Zahlen

Satz von Cantor: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist stets mächtiger als M.

Konsequenz: Es gibt zu jeder unendlichen Kardinalzahl eine größere!
Es gibt es unendlich viele Alephs: Stufen der Unendlichkeit!

- Stufe von $\mathbb{N}$ (abzählbare Unendlichkeit): Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
  kleinste unendliche Kardinalzahl $\aleph_0$

- Stufe von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (kontinuierliche Unendlichkeit): Mengen $\mathbb{R}, \mathbb{C}$

Unendliche Zahlen

Satz von Cantor: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist stets mächtiger als M.

Konsequenz: Es gibt zu jeder unendlichen Kardinalzahl eine größere!
Es gibt es unendlich viele Alephs: Stufen der Unendlichkeit!

- Stufe von $\mathbb{N}$ (abzählbare Unendlichkeit): Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
  kleinste unendliche Kardinalzahl $\aleph_0$
- Stufe von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (kontinuierliche Unendlichkeit): Mengen $\mathbb{R}, \mathbb{C}$
  größere unendliche Kardinalzahl $\mathfrak{C}$.

Unendliche Zahlen

Satz von Cantor: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist stets mächtiger als M.

Konsequenz: Es gibt zu jeder unendlichen Kardinalzahl eine größere!
Es gibt es unendlich viele Alephs: Stufen der Unendlichkeit!

- Stufe von $\mathbb{N}$ (abzählbare Unendlichkeit): Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
  kleinste unendliche Kardinalzahl $\aleph_0$
- Stufe von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (kontinuierliche Unendlichkeit): Mengen $\mathbb{R}, \mathbb{C}$
  größere unendliche Kardinalzahl $\mathfrak{C}$.
- Stufe von $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ (funktionale Unendlichkeit): Menge $\mathbb{F}$

Unendliche Zahlen

Satz von Cantor: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist stets mächtiger als M.

Konsequenz: Es gibt zu jeder unendlichen Kardinalzahl eine größere!
Es gibt es unendlich viele Alephs: Stufen der Unendlichkeit!

- Stufe von $\mathbb{N}$ (abzählbare Unendlichkeit): Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
  kleinste unendliche Kardinalzahl $\aleph_0$
- Stufe von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (kontinuierliche Unendlichkeit): Mengen $\mathbb{R}, \mathbb{C}$
  größere unendliche Kardinalzahl $\mathfrak{c}$.
- Stufe von $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ (funktionale Unendlichkeit): Menge $\mathbb{F}$
  größere unendliche Kardinalzahl $\mathfrak{f}$.

Unendliche Zahlen

Satz von Cantor: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist stets mächtiger als M.

Konsequenz: Es gibt zu jeder unendlichen Kardinalzahl eine größere!
Es gibt es unendlich viele Alephs: Stufen der Unendlichkeit!

- Stufe von $\mathbb{N}$ (abzählbare Unendlichkeit): Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
  kleinste unendliche Kardinalzahl $\aleph_0$
- Stufe von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (kontinuierliche Unendlichkeit): Mengen $\mathbb{R}, \mathbb{C}$
  größere unendliche Kardinalzahl $\mathfrak{c}$.
- Stufe von $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ (funktionale Unendlichkeit): Menge $\mathbb{F}$
  größere unendliche Kardinalzahl $\mathfrak{f}$.
- usw.

Unendliche Zahlen

Satz von Cantor: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist stets mächtiger als M.

Konsequenz: Es gibt zu jeder unendlichen Kardinalzahl eine größere!
Es gibt es unendlich viele Alephs: Stufen der Unendlichkeit!

- Stufe von $\mathbb{N}$ (abzählbare Unendlichkeit): Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
  kleinste unendliche Kardinalzahl $\aleph_0$
- Stufe von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (kontinuierliche Unendlichkeit): Mengen $\mathbb{R}, \mathbb{C}$
  größere unendliche Kardinalzahl $\mathfrak{c}$. $\boxed{= \aleph_1 \text{ laut Kontinuumshypothese}}$
- Stufe von $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ (funktionale Unendlichkeit): Menge $\mathbb{F}$
  größere unendliche Kardinalzahl $\mathfrak{f}$.
- usw.

Unendliche Zahlen

Satz von Cantor: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist stets mächtiger als M.

Konsequenz: Es gibt zu jeder unendlichen Kardinalzahl eine größere!
Es gibt es unendlich viele Alephs: Stufen der Unendlichkeit!

- Stufe von $\mathbb{N}$ (abzählbare Unendlichkeit): Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
  kleinste unendliche Kardinalzahl $\aleph_0$
- Stufe von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (kontinuierliche Unendlichkeit): Mengen $\mathbb{R}, \mathbb{C}$
  größere unendliche Kardinalzahl $\mathfrak{c}$. $\boxed{= \aleph_1 \text{ laut Kontinuumshypothese}}$
- Stufe von $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ (funktionale Unendlichkeit): Menge $\mathbb{F}$
  größere unendliche Kardinalzahl $\mathfrak{f}$. $\boxed{= \aleph_2 \text{ laut Kontinuumshypothese}}$
- usw.

Unendliche Zahlen

Kontinuumsproblem: Welches Aleph ist $\mathfrak{c}$?

$$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \ldots \aleph_\omega \quad \aleph_{\omega+1} \ldots \aleph_{2\omega} \ldots \aleph_{\omega^\omega} \ldots \aleph_{\epsilon_0} \ldots$$

Unendliche Zahlen

Kontinuumsproblem: Welches Aleph ist $\mathfrak{c}$?

$$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \ldots \aleph_\omega \quad \aleph_{\omega+1} \ldots \aleph_{2\omega} \ldots \aleph_{\omega^\omega} \ldots \aleph_{\epsilon_0} \ldots$$

$$\mathfrak{c}?$$

Georg Cantor

(1878)

Unendliche Zahlen

Kontinuumsproblem: Welches Aleph ist $\mathfrak{c}$?

$$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \ldots \aleph_\omega \quad \aleph_{\omega+1} \ldots \aleph_{2\omega} \ldots \aleph_{\omega^\omega} \ldots \aleph_{\epsilon_0} \ldots$$

$$\mathfrak{c}?$$

Georg Cantor **Kurt Gödel**

(1878) **(1932)**

Unendliche Zahlen

Kontinuumsproblem: Welches Aleph ist $\mathfrak{c}$?

$$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \ldots \aleph_\omega \quad \aleph_{\omega+1} \ldots \aleph_{2\omega} \ldots \aleph_{\omega^\omega} \ldots \aleph_{\epsilon_0} \ldots$$

$\mathfrak{c}$?

Georg Cantor

(1878)

Kurt Gödel

(1932)

Paul Cohen

(1963)

Unendliche Zahlen

Kontinuumsproblem: Welches Aleph ist $\mathfrak{c}$?

$$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \ldots \aleph_\omega \quad \aleph_{\omega+1} \ldots \aleph_{2\omega} \ldots \aleph_{\omega^\omega} \ldots \aleph_{\epsilon_0} \ldots$$

$\mathfrak{c}$?

Unendliche Zahlen

Kontinuumsproblem: Welches Aleph ist $\mathfrak{c}$?

$$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \ldots \aleph_\omega \quad \aleph_{\omega+1} \ldots \aleph_{2\omega} \ldots \aleph_{\omega^\omega} \ldots \aleph_{\epsilon_0} \ldots$$

$\mathfrak{c}$?

Unendliche Zahlen

Kontinuumsproblem: Welches Aleph ist $\mathfrak{c}$?

$$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \ldots \aleph_\omega \quad \aleph_{\omega+1} \ldots \aleph_{2\omega} \ldots \aleph_{\omega^\omega} \ldots \aleph_{\epsilon_0} \ldots$$

$\mathfrak{c}$?

Unendliche Zahlen

Kontinuumsproblem: Welches Aleph ist $\mathfrak{c}$?

$$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \ldots \aleph_\omega \quad \aleph_{\omega+1} \ldots \aleph_{2\omega} \ldots \aleph_{\omega^\omega} \ldots \aleph_{\epsilon_0} \ldots$$

$\mathfrak{c}$?

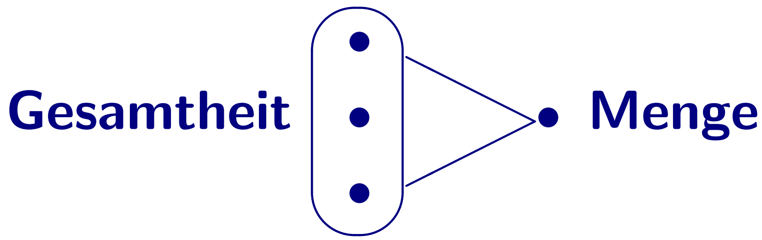
Fields-Medaille

II.5. das Absolut-Unendliche

das Absolut-Unendliche

Anliegen der Mengenlehre: **Gesamtheiten als Einheiten denken!**

Mengen sind Einheiten (Individuen), die Gesamtheiten repräsentieren.



das Absolut-Unendliche

Kann man wirklich jede Gesamtheit durch eine Menge darstellen?

das Absolut-Unendliche

Kann man wirklich jede Gesamtheit durch eine Menge darstellen?

Wenn ja, stünden sich Gesamtheiten und Mengen so gegenüber:

Gesamtheiten		Mengen
A	$\longleftrightarrow$	Menge, deren Elemente die Individuen von A sind
B	$\longleftrightarrow$	Menge, deren Elemente die Individuen von B sind
C	$\longleftrightarrow$	Menge, deren Elemente die Individuen von C sind
$\ldots$	$\longleftrightarrow$	$\ldots$

das Absolut-Unendliche

Kann man wirklich jede Gesamtheit durch eine Menge darstellen?

Es gibt jedoch Vielheiten, zu denen keine Menge existiert:

Gesamtheiten		Mengen
A	$\longleftrightarrow$	Menge, deren Elemente die Individuen von A sind
B	$\longleftrightarrow$	Menge, deren Elemente die Individuen von B sind
C	$\longleftrightarrow$	Menge, deren Elemente die Individuen von C sind
$\ldots$	$\longleftrightarrow$	$\ldots$
Ω	$\longleftrightarrow$	keine entsprechende Menge!

das Absolut-Unendliche

Def.: Eine **Unmenge** oder **inkonsistente Vielheit** ist eine Vielheit, die so groß ist, dass die dazugehörigen Individuen nicht in einer Menge enthalten sind.

das Absolut-Unendliche

Def.: Eine Unmenge oder inkonsistente Vielheit ist eine Vielheit, die so groß ist, dass die dazugehörigen Individuen nicht in einer Menge enthalten sind.

Gesamtheiten und Mengen stehen sich nun wie folgt gegenüber:

das Absolut-Unendliche

Def.: Eine Unmenge oder inkonsistente Vielheit ist eine Vielheit, die so groß ist, dass die dazugehörigen Individuen nicht in einer Menge enthalten sind.

Gesamtheiten und Mengen stehen sich nun wie folgt gegenüber:

konsistente Gesamtheiten		Mengen
Nichts	$\longleftrightarrow$	leere Menge $\{\}$
Individuen	$\longleftrightarrow$	Einermengen
endliche Vielheiten	$\longleftrightarrow$	endliche Mengen
konsistente unendliche Vielheiten	$\longleftrightarrow$	unendliche Mengen

Unmengen

inkonsistente unendliche Vielheiten

das Absolut-Unendliche

Def.: Eine **Unmenge** oder **inkonsistente Vielheit** ist eine Vielheit, die so groß ist, dass die dazugehörigen Individuen nicht in einer Menge enthalten sind.

Gesamtheiten und Mengen stehen sich nun wie folgt gegenüber:

konsistente Gesamtheiten		Mengen
Nichts	⟷	leere Menge {}
Individuen	⟷	Einermengen
endliche Vielheiten	⟷	endliche Mengen
konsistente unendliche Vielheiten	⟷	unendliche Mengen

Unmengen

inkonsistente unendliche Vielheiten

das Absolut-Unendliche

Def.: Eine **Unmenge** oder **inkonsistente Vielheit** ist eine Vielheit, die so groß ist, dass die dazugehörigen Individuen nicht in einer Menge enthalten sind.

Gesamtheiten und Mengen stehen sich nun wie folgt gegenüber:

konsistente Gesamtheiten		Mengen
Nichts	↔	leere Menge $\{\}$
Individuen	↔	Einermengen
endliche Vielheiten	↔	endliche Mengen
konsistente unendliche Vielheiten	↔	unendliche Mengen

Unmengen

inkonsistente unendliche Vielheiten

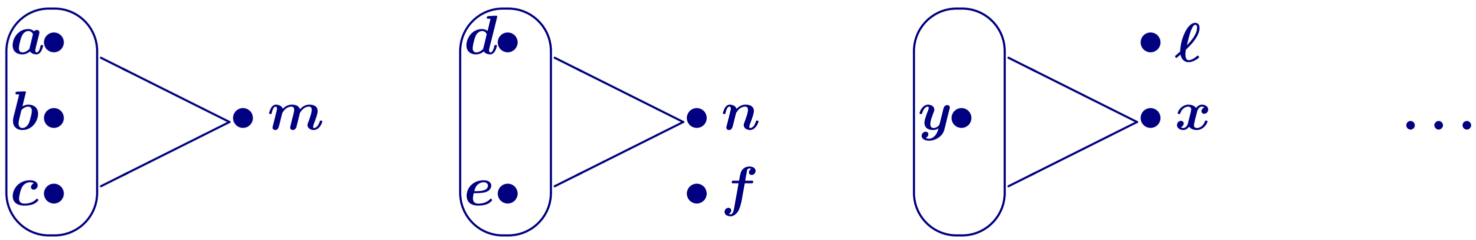
Def.: Eine **Klasse** ist ein Objekt, das eine Menge oder eine Unmenge ist.

das Absolut-Unendliche

Verfahren zur Bildung von Unmengen: **Man wähle zu jeder Menge ein Außenindividuum aus, und bilde dann eine Vielheit V, die diese Außenindividuen umfasst. Dieses V ist dann eine Unmenge.**

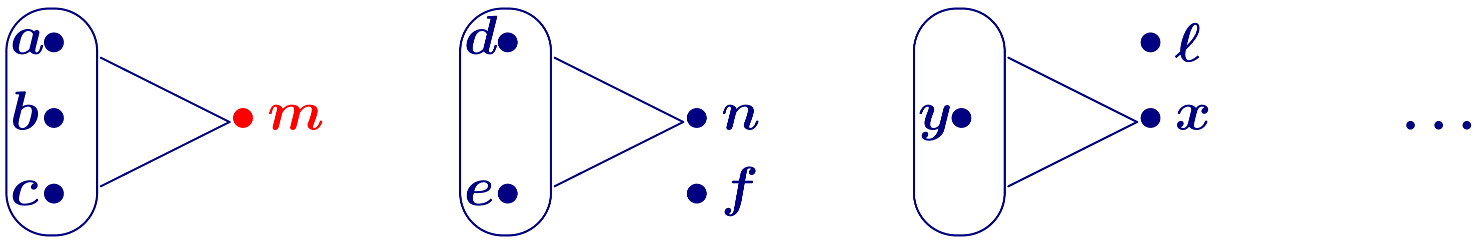
das Absolut-Unendliche

Verfahren zur Bildung von Unmengen: Man wähle zu jeder Menge ein Außenindividuum aus, und bilde dann eine Vielheit V, die diese Außenindividuen umfasst. Dieses V ist dann eine Unmenge.



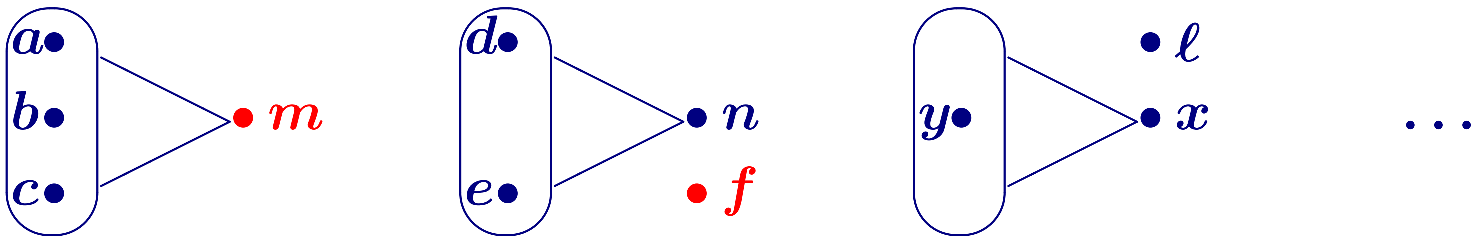
das Absolut-Unendliche

Verfahren zur Bildung von Unmengen: **Man wähle zu jeder Menge ein Außenindividuum aus, und bilde dann eine Vielheit V, die diese Außenindividuen umfasst. Dieses V ist dann eine Unmenge.**



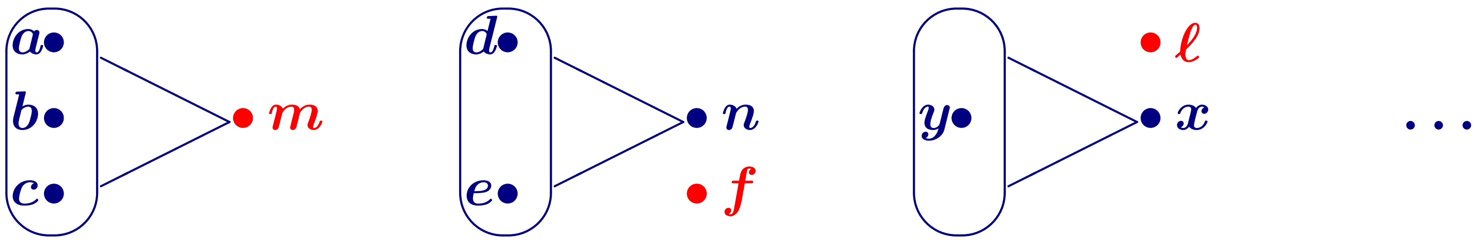
das Absolut-Unendliche

Verfahren zur Bildung von Unmengen: **Man wähle zu jeder Menge ein Außenindividuum aus, und bilde dann eine Vielheit V, die diese Außenindividuen umfasst. Dieses V ist dann eine Unmenge.**



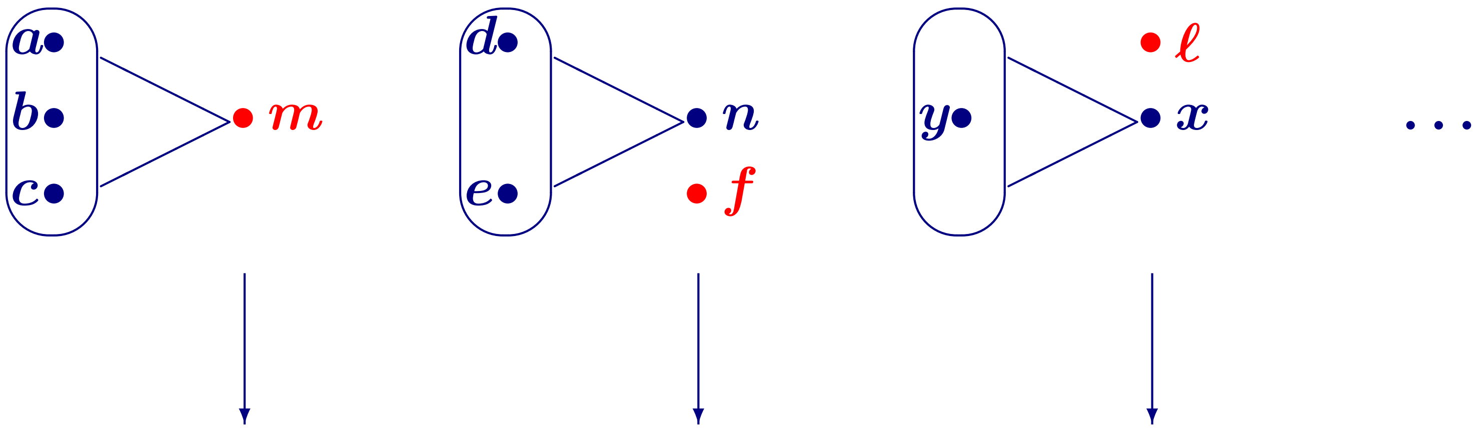
das Absolut-Unendliche

Verfahren zur Bildung von Unmengen: **Man wähle zu jeder Menge ein Außenindividuum aus, und bilde dann eine Vielheit V, die diese Außenindividuen umfasst. Dieses V ist dann eine Unmenge.**



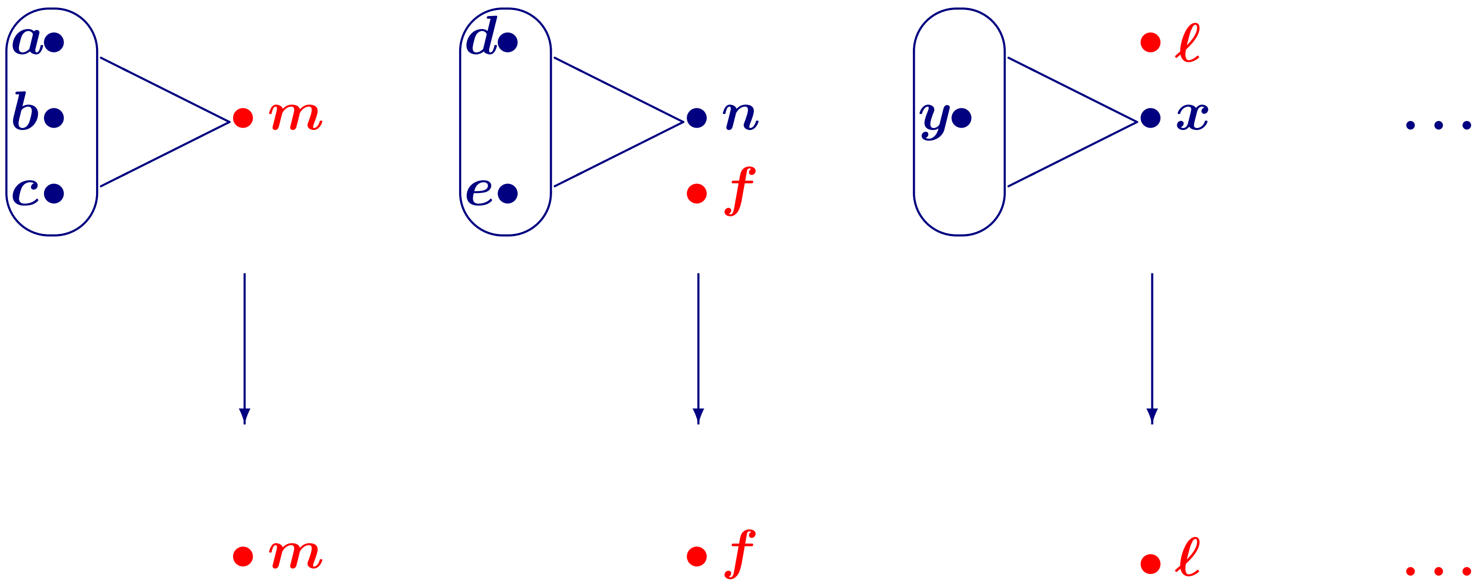
das Absolut-Unendliche

Verfahren zur Bildung von Unmengen: Man wähle zu jeder Menge ein Außenindividuum aus, und bilde dann eine Vielheit V, die diese Außenindividuen umfasst. Dieses V ist dann eine Unmenge.



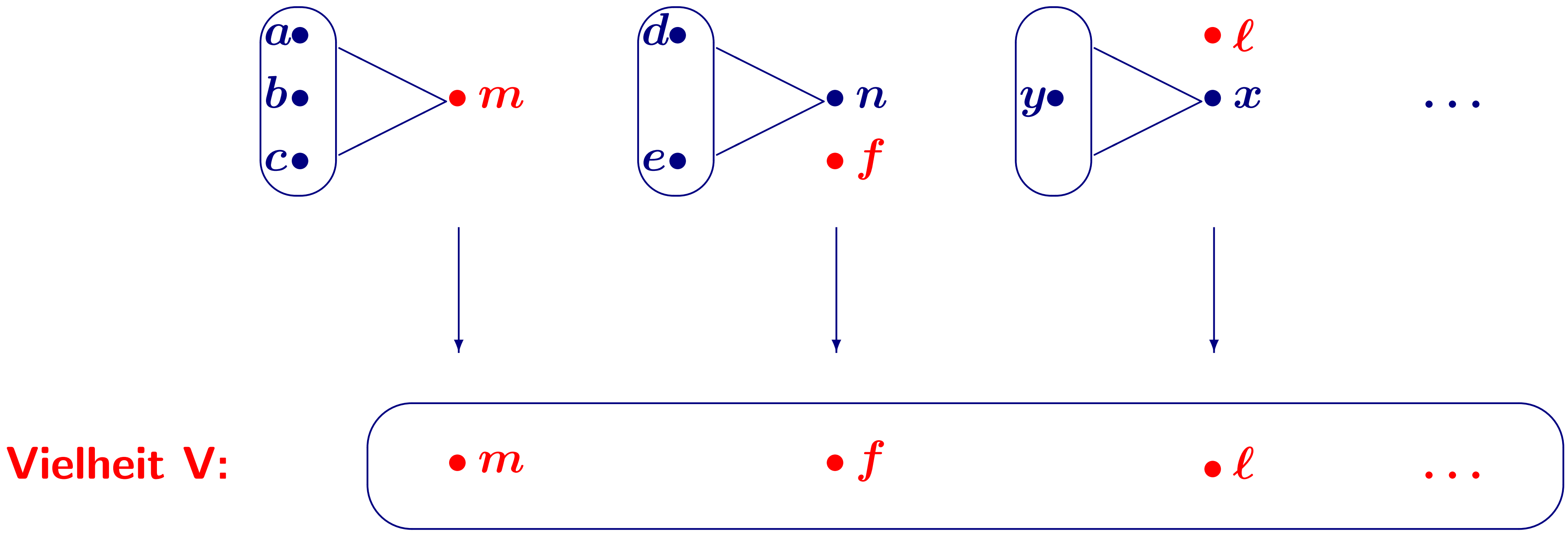
das Absolut-Unendliche

Verfahren zur Bildung von Unmengen: Man wähle zu jeder Menge ein Außenindividuum aus, und bilde dann eine Vielheit V, die diese Außenindividuen umfasst. Dieses V ist dann eine Unmenge.



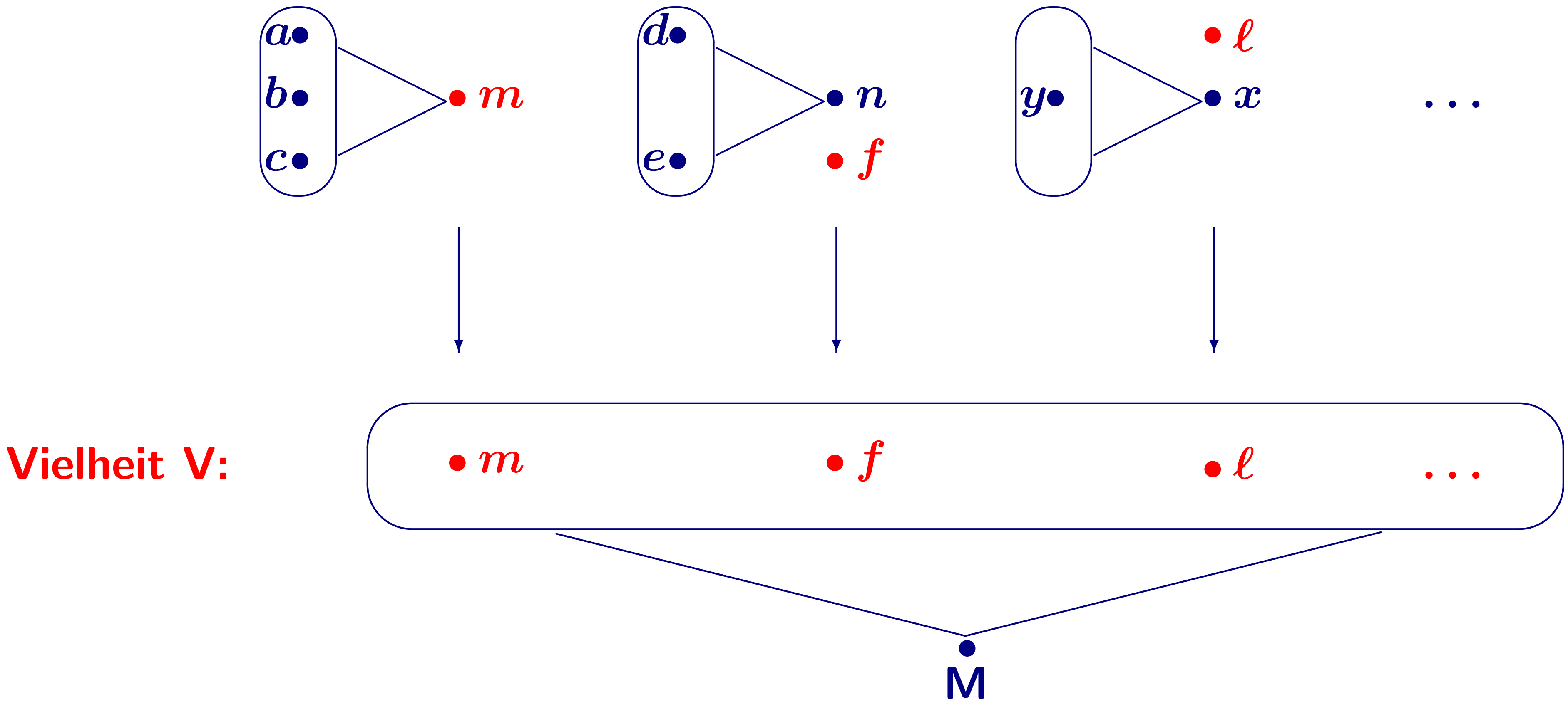
das Absolut-Unendliche

Verfahren zur Bildung von Unmengen: **Man wähle zu jeder Menge ein Außenindividuum aus, und bilde dann eine Vielheit V, die diese Außenindividuen umfasst. Dieses V ist dann eine Unmenge.**



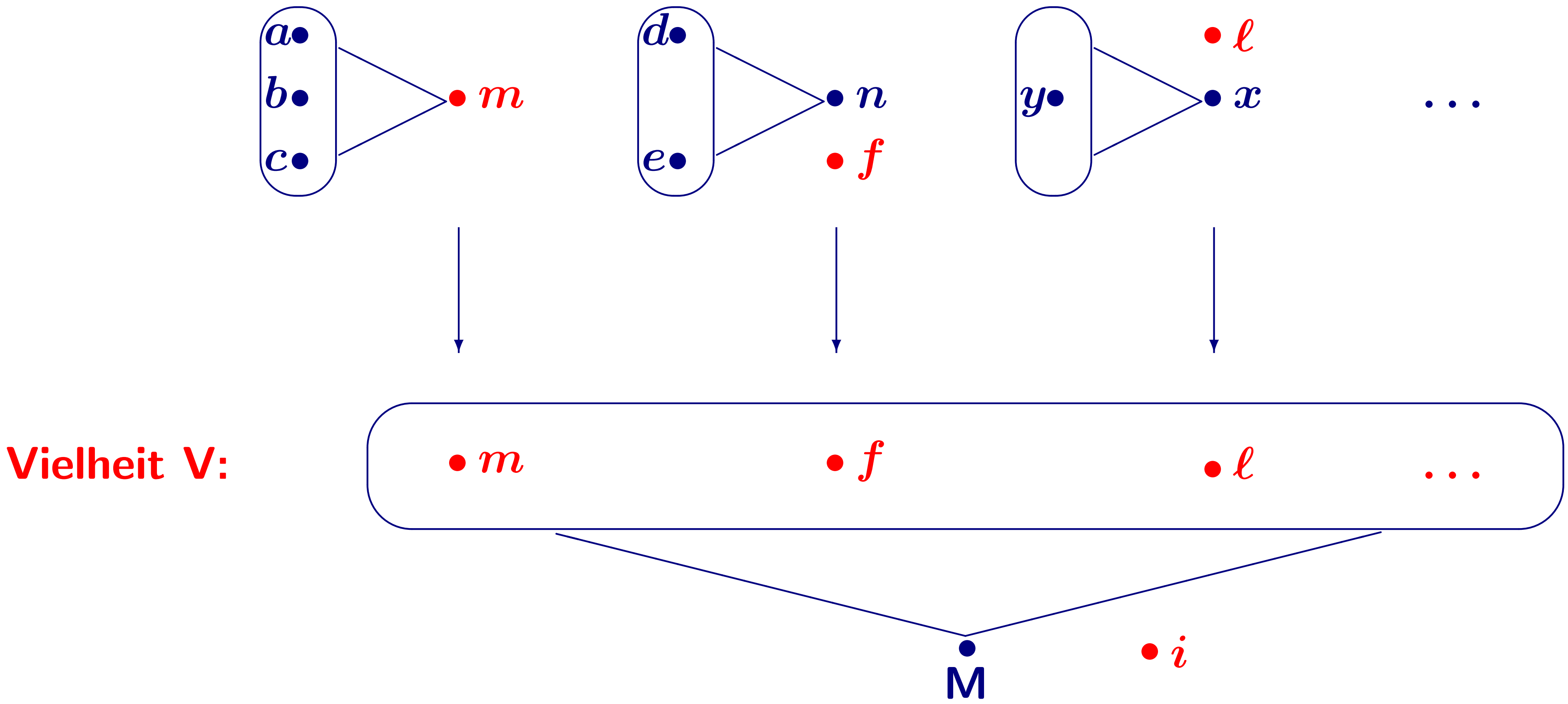
das Absolut-Unendliche

Verfahren zur Bildung von Unmengen: Man wähle zu jeder Menge ein Außenindividuum aus, und bilde dann eine Vielheit V, die diese Außenindividuen umfasst. Dieses V ist dann eine Unmenge.



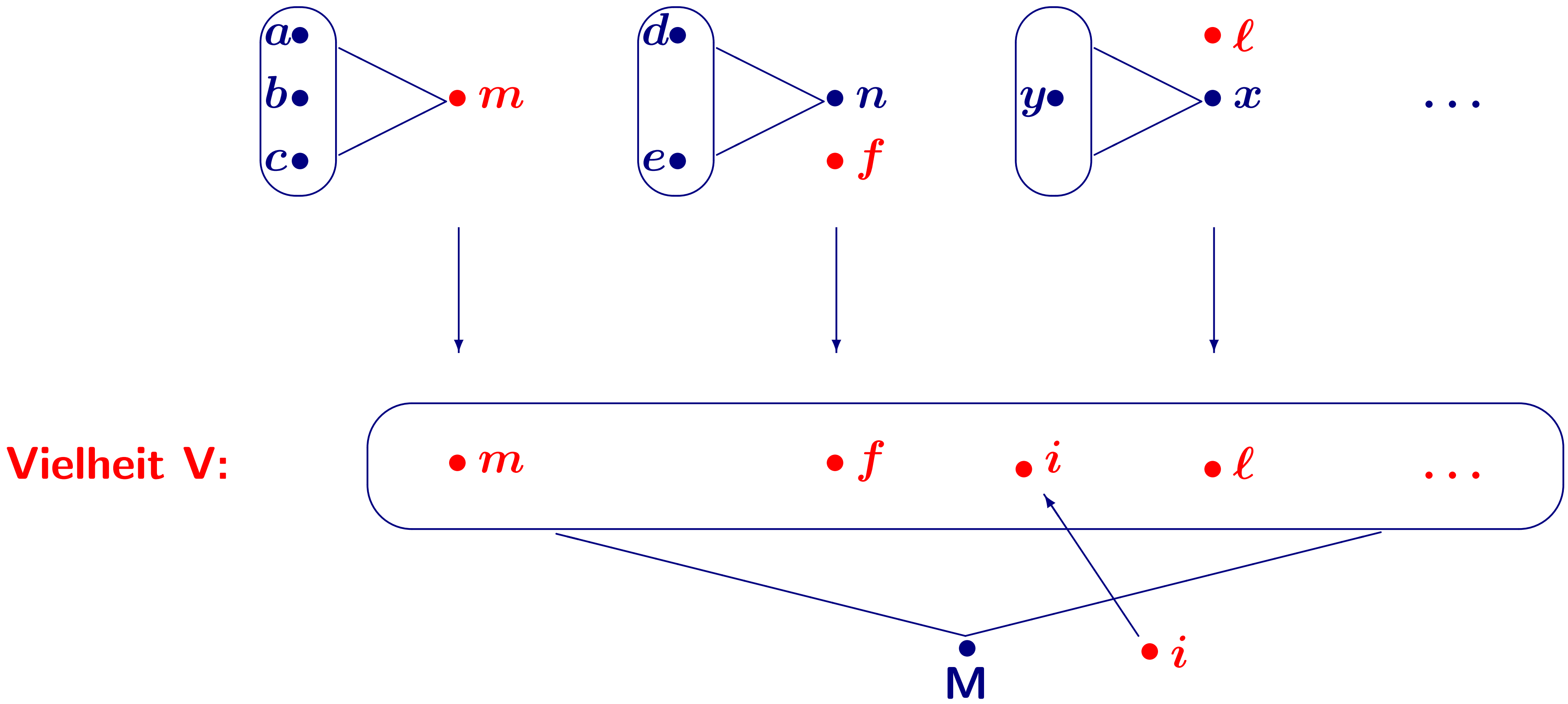
das Absolut-Unendliche

Verfahren zur Bildung von Unmengen: Man wähle zu jeder Menge ein Außenindividuum aus, und bilde dann eine Vielheit V, die diese Außenindividuen umfasst. Dieses V ist dann eine Unmenge.



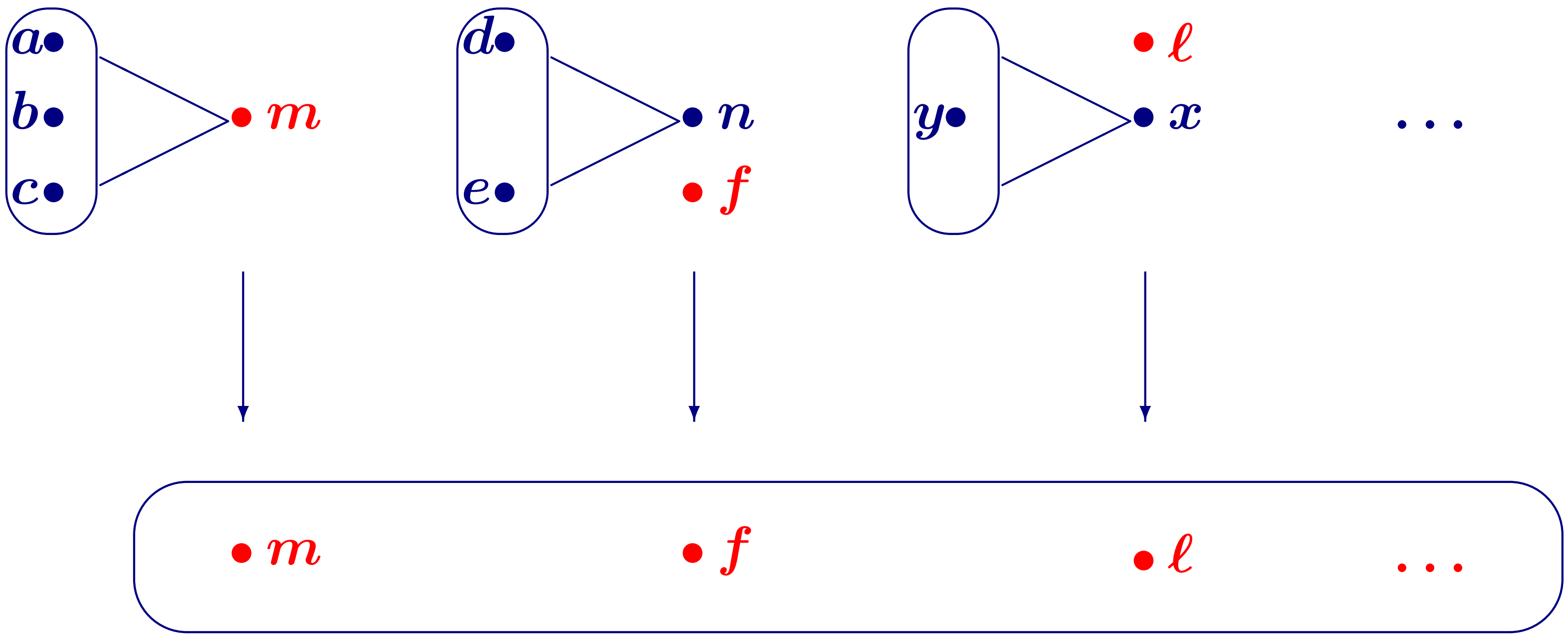
das Absolut-Unendliche

Verfahren zur Bildung von Unmengen: **Man wähle zu jeder Menge ein Außenindividuum aus, und bilde dann eine Vielheit V, die diese Außenindividuen umfasst. Dieses V ist dann eine Unmenge.**



das Absolut-Unendliche

Verfahren zur Bildung von Unmengen: **Man wähle zu jeder Menge ein Außenindividuum aus, und bilde dann eine Vielheit V, die diese Außenindividuen umfasst. Dieses V ist dann eine Unmenge.**

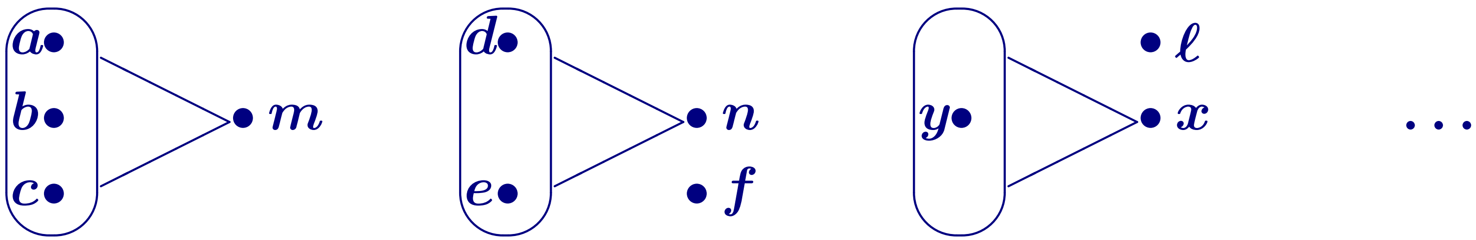


Vielheit V:

U N M E N G E !

das Absolut-Unendliche

Verfahren zur Bildung von Unmengen: Man wähle zu jeder Menge ein Außenindividuum aus, und bilde dann eine Vielheit V, die diese Außenindividuen umfasst. Dieses V ist dann eine Unmenge.

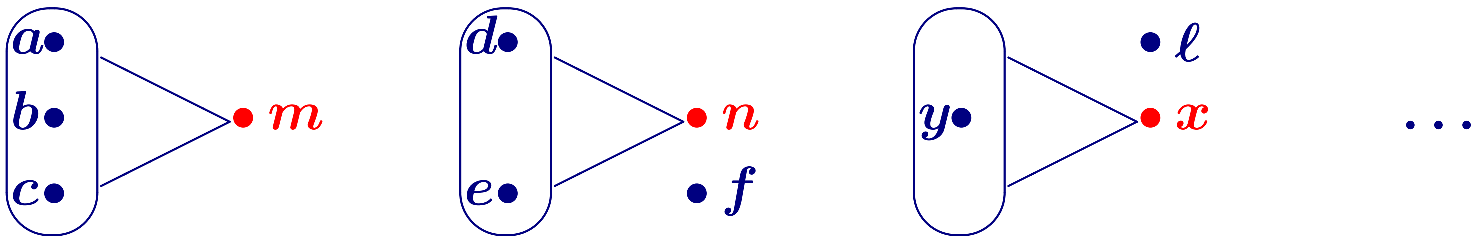


Vielheit V:

U N M E N G E !

das Absolut-Unendliche

Verfahren zur Bildung von Unmengen: Man wähle zu jeder Menge ein Außenindividuum aus, und bilde dann eine Vielheit V, die diese Außenindividuen umfasst. Dieses V ist dann eine Unmenge.

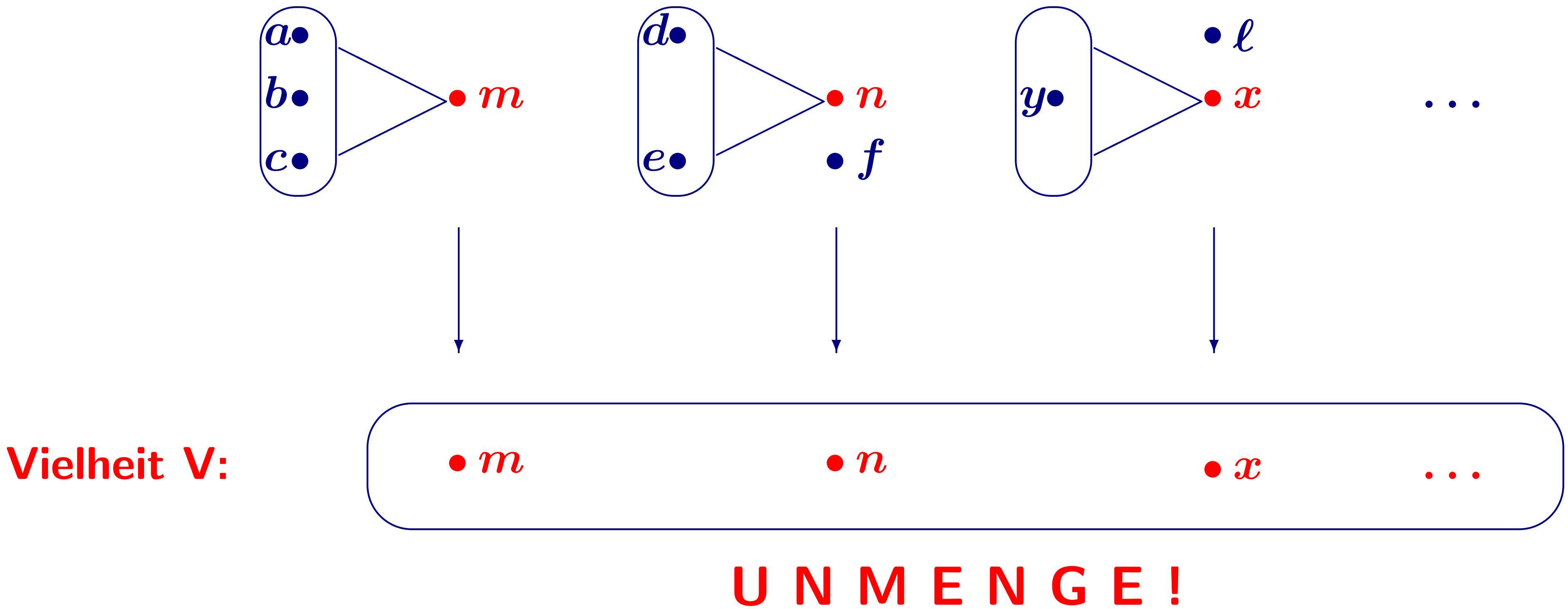


Vielheit V:

U N M E N G E !

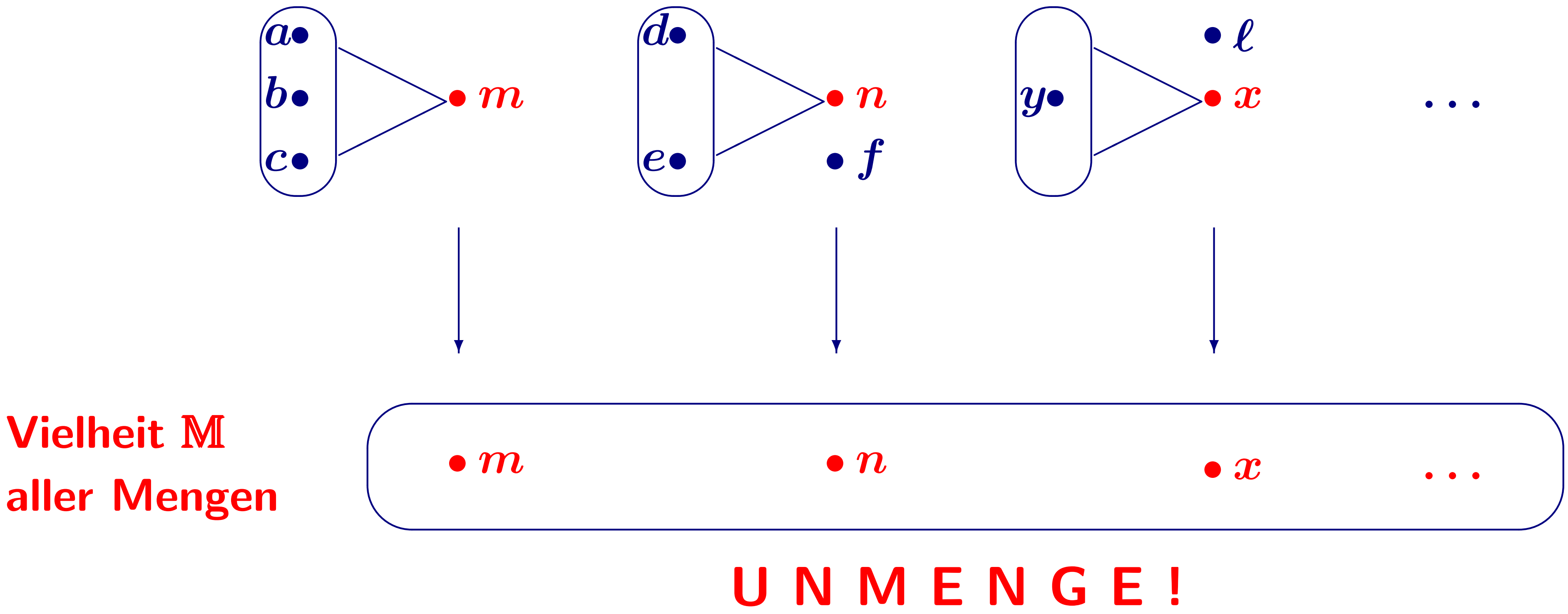
das Absolut-Unendliche

Verfahren zur Bildung von Unmengen: Man wähle zu jeder Menge ein Außenindividuum aus, und bilde dann eine Vielheit V, die diese Außenindividuen umfasst. Dieses V ist dann eine Unmenge.



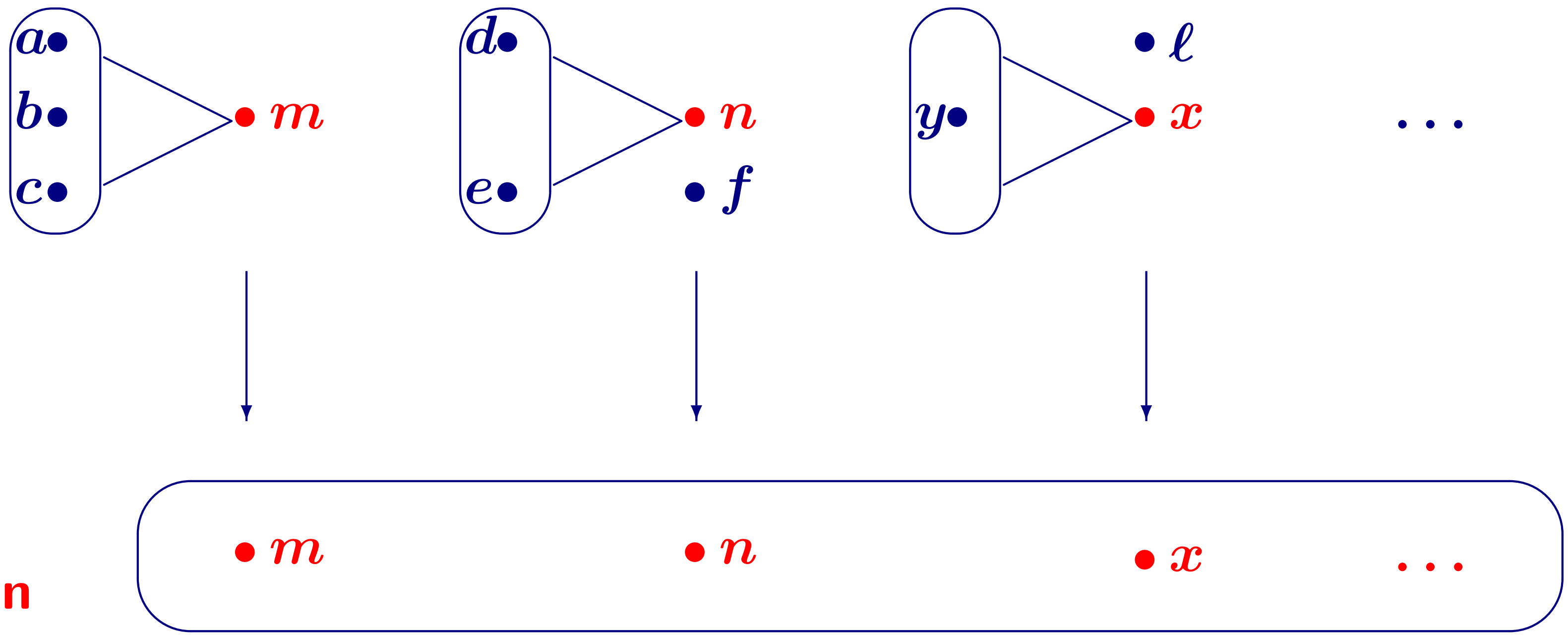
das Absolut-Unendliche

Verfahren zur Bildung von Unmengen: Man wähle zu jeder Menge ein Außenindividuum aus, und bilde dann eine Vielheit V, die diese Außenindividuen umfasst. Dieses V ist dann eine Unmenge.



das Absolut-Unendliche

Verfahren zur Bildung von Unmengen: Man wähle zu jeder Menge ein Außenindividuum aus, und bilde dann eine Vielheit V, die diese Außenindividuen umfasst. Dieses V ist dann eine Unmenge.



Vielheit $\mathbb{M}$
aller Mengen

Erst recht ist die Vielheit $\mathbb{D}$ aller Dinge eine Unmenge.

das Absolut-Unendliche

Verfahren zur Bildung von Unmengen: Man wähle zu jeder Menge ein Außenindividuum aus, und bilde dann eine Vielheit V, die diese Außenindividuen umfasst. Dieses V ist dann eine Unmenge.

Satz: Die Klassen $\mathbb{M}$ und $\mathbb{D}$ sind Unmengen.

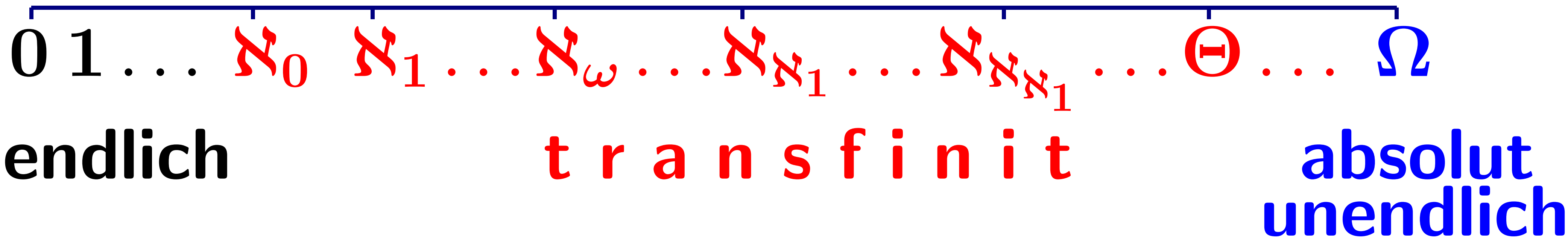
das Absolut-Unendliche

Verfahren zur Bildung von Unmengen: Man wähle zu jeder Menge ein Außenindividuum aus, und bilde dann eine Vielheit V, die diese Außenindividuen umfasst. Dieses V ist dann eine Unmenge.

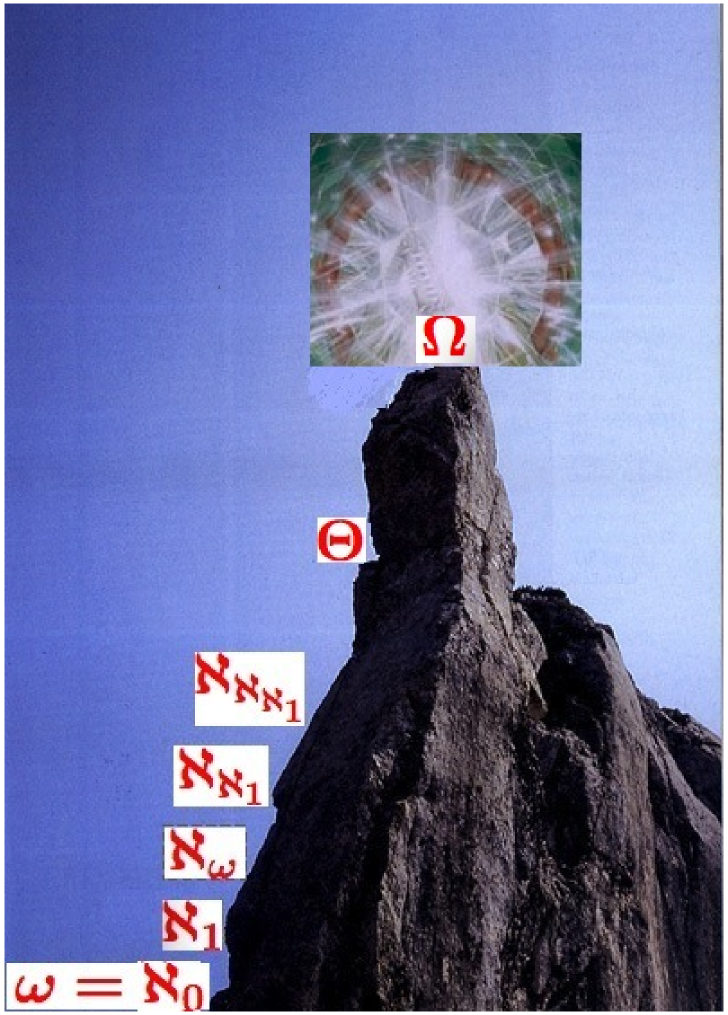
Satz: Die Klassen $\mathbb{M}$ und $\mathbb{D}$ sind Unmengen.

Im Reich der Unmengen bricht die Mathematik zusammen.
Es ist nach Cantor der Bereich Gottes!
Die „Kardinalzahl“ der Unmengen-Stufe heißt Groß-Omega: Ω.

das Absolut-Unendliche



das Absolut-Unendliche



Die Alephs sind Stufen,
die zum Throne Gottes emporführen.

III. Konkrete Berührungspunkte zwischen Mathematik und Philosophie/Theologie

1. Mathematische Antworten auf philosophische Fragen

Der Satz von Cantor und seine philosophischen Konsequenzen

Satz von Cantor: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist stets relationstheoretisch größer als M.

Der Satz von Cantor und seine philosophischen Konsequenzen

Satz von Cantor: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist stets relationstheoretisch größer als M.

Ontologische Konsequenz: Es gibt unendlich viele Stufen der Unendlichkeit.

Der Satz von Cantor und seine philosophischen Konsequenzen

Satz von Cantor: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist stets relationstheoretisch größer als M.

Ontologische Konsequenz: Es gibt unendlich viele Stufen der Unendlichkeit.

Psychologische Konsequenz: Menschliches Erkennen ist begrenzt, aber stets vermehrbar: „potentiell unendlich".

Der Satz von Cantor und seine philosophischen Konsequenzen

Satz von Cantor: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist stets relationstheoretisch größer als M.

Ontologische Konsequenz: Es gibt unendlich viele Stufen der Unendlichkeit.

Psychologische Konsequenz: Menschliches Erkennen ist begrenzt, aber stets vermehrbar: „potentiell unendlich".

Theologische Konsequenz: Der Mensch steht in der Mitte zwischen dem Endlichen und dem absolut unendlichen Gott.

2. Ein theologisches Prinzip in der Mathematik

Das Reflexionsprinzip und sein theologischer Hintergrund

Reflexionsprinzip (Azriel Levy, 1960): **Zu jeder begreifbaren Eigenschaft einer Unmenge gibt es stets auch eine Menge, die ebenfalls diese Eigenschaft hat.**

Das Reflexionsprinzip und sein theologischer Hintergrund

Reflexionsprinzip (Azriel Levy, 1960): Zu jeder begreifbaren Eigenschaft einer Unmenge gibt es stets auch eine Menge, die ebenfalls diese Eigenschaft hat.

Anwendungsbeispiel: Es gibt eine Menge mit der Eigenschaft, dass sie unendlich viele Mengen enthält, und mit jeder ihrer Mengen M stets auch deren Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ als Element enthält.

Das Reflexionsprinzip und sein theologischer Hintergrund

Reflexionsprinzip (Azriel Levy, 1960): Zu jeder begreifbaren Eigenschaft einer Unmenge gibt es stets auch eine Menge, die ebenfalls diese Eigenschaft hat.

Anwendungsbeispiel: Es gibt eine Menge mit der Eigenschaft, dass sie unendlich viele Mengen enthält, und mit jeder ihrer Mengen M stets auch deren Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ als Element enthält.

Beweis. $\mathbb{D}$ hat diese Eigenschaft, also gibt es eine entsprechende Menge. $\square$

Das Reflexionsprinzip und sein theologischer Hintergrund

Reflexionsprinzip (Azriel Levy, 1960): Zu jeder begreifbaren Eigenschaft einer Unmenge gibt es stets auch eine Menge, die ebenfalls diese Eigenschaft hat.

Anwendungsbeispiel: Es gibt eine Menge mit der Eigenschaft, dass sie unendlich viele Mengen enthält, und mit jeder ihrer Mengen M stets auch deren Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ als Element enthält.

Beweis. $\mathbb{D}$ hat diese Eigenschaft, also gibt es eine entsprechende Menge. $\square$

falsches Anwendungsbeispiel: Es gibt eine Menge mit der Eigenschaft, dass sie größer ist als alle Mengen.

Das Reflexionsprinzip und sein theologischer Hintergrund

Reflexionsprinzip (Azriel Levy, 1960): Zu jeder begreifbaren Eigenschaft einer Unmenge gibt es stets auch eine Menge, die ebenfalls diese Eigenschaft hat.

Anwendungsbeispiel: Es gibt eine Menge mit der Eigenschaft, dass sie unendlich viele Mengen enthält, und mit jeder ihrer Mengen M stets auch deren Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ als Element enthält.

Beweis. $\mathbb{D}$ hat diese Eigenschaft, also gibt es eine entsprechende Menge. $\square$

falsches Anwendungsbeispiel: Es gibt eine Menge mit der Eigenschaft, dass sie größer ist als alle Mengen.

Beweis. $\mathbb{D}$ hat diese Eigenschaft, also gibt es eine entsprechende Menge. $\square$

Das Reflexionsprinzip und sein theologischer Hintergrund

Reflexionsprinzip (Azriel Levy, 1960): Zu jeder begreifbaren Eigenschaft einer Unmenge gibt es stets auch eine Menge, die ebenfalls diese Eigenschaft hat.

Anwendungsbeispiel: Es gibt eine Menge mit der Eigenschaft, dass sie unendlich viele Mengen enthält und mit jeder ihrer Mengen M stets auch deren Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ als Element enthält.

Beweis. $\mathbb{D}$ hat diese Eigenschaft, also gibt es eine entsprechende Menge. $\square$

falsches Anwendungsbeispiel: Es gibt eine Menge mit der Eigenschaft, dass sie größer ist als alle Mengen.

Beweis. $\mathbb{D}$ hat diese Eigenschaft, also gibt es eine entsprechende Menge. $\square$

Aber die Eigenschaft „größer als alle Mengen“ ist Proprium der Unmengen und daher nicht begreifbar!

Das Reflexionsprinzip und sein theologischer Hintergrund

Reflexionsprinzip (Azriel Levy, 1960): **Zu jeder begreifbaren Eigenschaft einer Unmenge gibt es stets auch eine Menge, die ebenfalls diese Eigenschaft hat.**

Das Reflexionsprinzip und sein theologischer Hintergrund

Reflexionsprinzip (Azriel Levy, 1960): Zu jeder begreifbaren Eigenschaft einer Unmenge gibt es stets auch eine Menge, die ebenfalls diese Eigenschaft hat.

Theologische Parallele (Papst Gregor der Große, um 600): Was immer von Gott geschaut wird, ist noch nicht er selbst, sondern etwas unterhalb von ihm.

Das Reflexionsprinzip und sein theologischer Hintergrund

Reflexionsprinzip (Azriel Levy, 1960): Zu jeder begreifbaren Eigenschaft einer Unmenge gibt es stets auch eine Menge, die ebenfalls diese Eigenschaft hat.

Theologische Parallele (Papst Gregor der Große, um 600): Was immer von Gott geschaut wird, ist noch nicht er selbst, sondern etwas unterhalb von ihm.

Gott $\widehat{=}$ die absolut unendliche Allklasse $\mathbb{D}$

Das Reflexionsprinzip und sein theologischer Hintergrund

Reflexionsprinzip (Azriel Levy, 1960): Zu jeder begreifbaren Eigenschaft einer Unmenge gibt es stets auch eine Menge, die ebenfalls diese Eigenschaft hat.

Theologische Parallele (Papst Gregor der Große, um 600): Was immer von Gott geschaut wird, ist noch nicht er selbst, sondern etwas unterhalb von ihm.

Gott $\widehat{=}$ die absolut unendliche Allklasse $\mathbb{D}$

Die Allklasse $\mathbb{D}$ ist der wesentliche Inhalt des göttlichen Verstandes.

Das Reflexionsprinzip und sein theologischer Hintergrund

Reflexionsprinzip (Azriel Levy, 1960): Zu jeder begreifbaren Eigenschaft einer Unmenge gibt es stets auch eine Menge, die ebenfalls diese Eigenschaft hat.

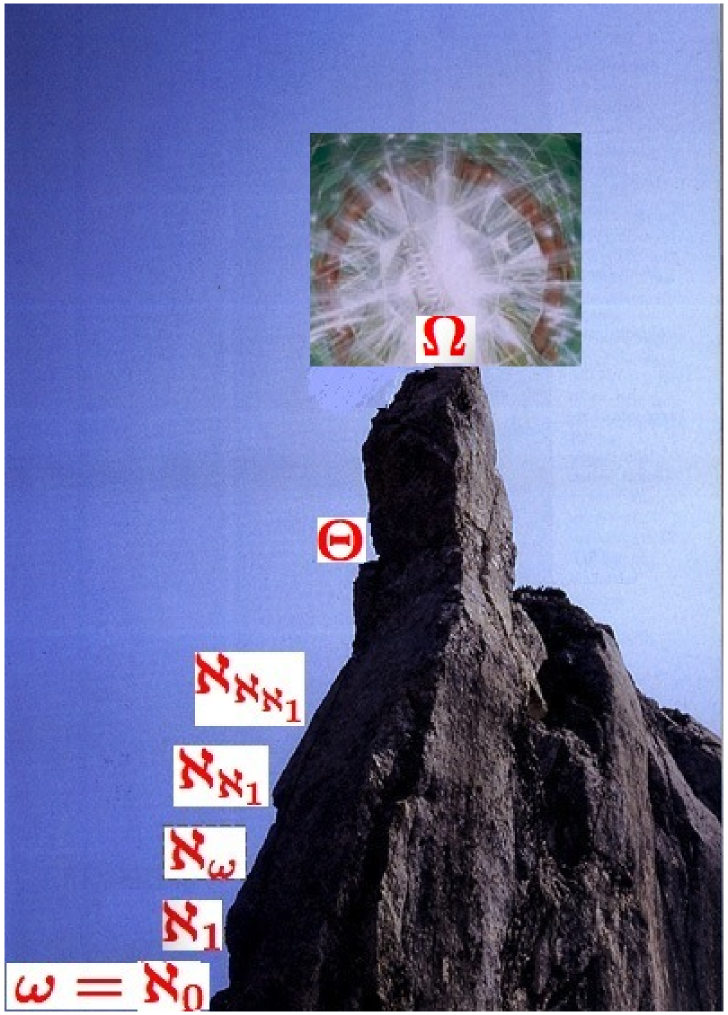
Theologische Parallele (Papst Gregor der Große, um 600): Was immer von Gott geschaut wird, ist noch nicht er selbst, sondern etwas unterhalb von ihm.

Gott $\widehat{=}$ die absolut unendliche Allklasse $\mathbb{D}$

Die Allklasse $\mathbb{D}$ ist der wesentliche Inhalt des göttlichen Verstandes.

Ω

das Absolut-Unendliche



Die Alephs sind Stufen,
die zum Throne Gottes emporführen.

das Absolut-Unendliche