Sonderdruck aus:

Unendlichkeit

Interdisziplinäre Perspektiven

Herausgegeben von

Johannes Brachtendorf, Thomas Möllenbeck,
Gregor Nickel und Stephan Schaede

Mohr Siebeck 2008

Inhalt

Ludwig Neidhart

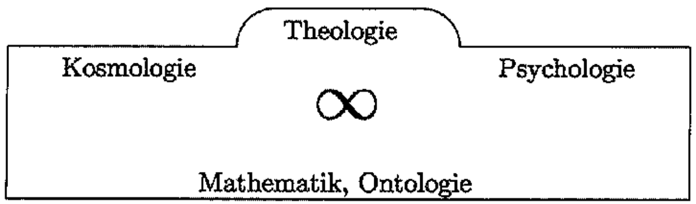
Mathematische Ergebnisse über Unendlichkeit und ihre Bezüge zu Metaphysik und Theologie

Abstract

Die mit dem Unendlichkeitsbegriff zusammenhängenden Fragen waren ein Hauptthema der klassischen Metaphysik und werden heute vor allem in der Mathematik im Rahmen der Cantorschen Mengenlehre untersucht. Hierbei bleibt man jedoch auf metaphysische Begründungen angewiesen, und zwar muß man, um die Mengenlehre überzeugend zu fundieren, in der Nachfolge von Cantor auf die platonische Metaphysik zurückgreifen, in der die Mengen als Denkformen beschrieben werden können. Im Rahmen einer auf diese Weise fundierten ‚realistischen Mengenlehre' können die mengentheoretisch exakt hergeleiteten Ergebnisse über unendliche Mengen und Unmengen dann wiederum für die Ontologie und andere Gebiete der Metaphysik, insbesondere für die metaphysische Psychologie und die Theologie, ausgewertet werden. Interessant für die Ontologie ist besonders der Satz von Cantor, der das Vorliegen unendlich vieler Stufen des Unendlichen aufweist, die man mit Cantor als verschiedene transfinite Seinsstufen des ‚Kreaturmöglichen' deuten kann. Weiter kann man aus diesem Satz auch den für die metaphysische *Psychologie* wichtigen Schluß ziehen, daß menschliches Erkennen potentiell unendlich ist. Dies bestätigt die *theologische* Einordnung des Menschen als Wesen zwischen Gott und endlicher Welt. Schließlich stehen die Unmengen, besonders die Allklasse, in enger Beziehung zum Gottesbegriff, was die Übertragung eines *theologischen* Prinzips auf die Mengenlehre gestattet (‚Reflexionsprinzip').

I. Die Stellung der Unendlichkeitsfrage im System der Wissenschaften

Unendlichkeitsfragen wurden früher vorwiegend in der sogenannten Metaphysik behandelt. Die Metaphysik wird eingeteilt in die allgemeine und die spezielle. Die *allgemeine Metaphysik* (auch *Ontologie* genannt) beschäftigt sich mit dem Sein im Allgemeinen. Die *spezielle Metaphysik* umfaßt die drei Fächer *Theologie, Psychologie* und *Kosmologie*. Diese vier metaphysischen Disziplinen nehmen im Gesamtgebäude aller Wissenschaften ausgezeichnete Positionen ein: Die Ontologie ist die ‚Fundamentalwissenschaft', die für alles übrige die Grundlagen legt, und Theologie, Kosmologie, Psychologie sind die ‚Gipfelwissenschaften', weil sie die letzten Fragen behandeln, die alles übrige voraussetzen.



Diese letzten Fragen haben alle mit dem Unendlichen zu tun und lauten:

- Gibt es ein absolut Unendliches jenseits der Welt?
- Kann der Mensch bzw. seine Seele an der Unendlichkeit partizipieren?
- Ist das Weltall selbst zeitlich oder räumlich unendlich?

Dazu kommen in der Ontologie oder allgemeinen Metaphysik die wichtigen Vorfragen:

- Ist das Unendliche widersprüchlich oder nicht, kann es überhaupt existieren?
- Wie ist es zu definieren und welches sind seine Wesenseigenschaften?

Die Metaphysik mit diesen ihren Fragen galt früher als Kernstück der *Philosophie*. Seit Kants Kritik wurden die metaphysischen Themen immer mehr aus der Philosophie ausgegliedert: Die Gottesfrage überließ man den *Theologen*, die Kosmologie den *Physikern*, die Psychologie den *empirischen Psychologen*. Am ehesten wird von den Philosophen heute noch die Ontologie behandelt, aber auch hier leistet seit dem Ende des 19. Jahrhunderts eine andere Wissenschaft, nämlich die *Mathematik* mit ihren Fundamentaldisziplinen *Logik* und *Mengenlehre* die entscheidenden Beiträge, zumindest wenn es um das Unendliche geht. Dies hat der Mathematiker

Hermann Weyl treffend zur Sprache gebracht, indem er die Mathematik als „die Wissenschaft vom Unendlichen" bezeichnete.[1]

In der Tat hat die moderne Mengenlehre, wie ich im Folgenden ausführen möchte, zur Klärung des Unendlichkeitsbegriffs Wesentliches beigetragen, woraus sich auch bedeutsame Konsequenzen für die anderen metaphysischen Disziplinen ergeben. In den folgenden Abschnitten 2 bis 4 sollen zunächst die Grundzüge und grundlegenden Begriffe der modernen mathematischen Mengen- und Unendlichkeitslehre erläutert werden. Aufbauend hierauf stelle ich in den Abschnitten 5 und 6 zwei mathematische Sätze über das Unendliche vor und weise auf deren Bezug zu Metaphysik und Theologie hin.

II. Cantors metaphysisch-theologische Mengenlehre und die Axiomatik

Georg Cantors Mengen- und Unendlichkeitslehre, die er zwischen 1874 und 1897 entwickelte, markiert in der Geschichte der Mathematik einen wichtigen Wendepunkt. Seine zentrale Entdeckung war die Existenz eines zuvor unbekannten, zwischen dem ‚Endlichen' und dem ‚absolut Unendlichen' liegenden Bereichs, den er ‚das Transfinite' nannte. Es gibt nach Cantor also drei Bereiche:

1. Das Endliche (finitum creatum),
2. Das Transfinite (infinitum creatum),
3. Das absolut Unendliche oder Göttliche (infinitum increatum).

Insbesondere unterschied Cantor zwischen dem noch berechenbaren Transfiniten und dem für die menschliche Vorstellung unfaßbaren absolut Unendlichen, das er mit Gott in Verbindung brachte. Cantor sah überhaupt eine enge Verbindung zwischen Mengenlehre, Metaphysik und Theologie. So schrieb er in seinem Brief an Pater Thomas Esser vom 01.02.1896: „Die allgemeine Mengenlehre ... gehört durchaus zur Metaphysik", und diese wiederum sei durch ein „unzerreißbare[s] Band" mit der Theologie verbunden.[2]

[1] *H. Weyl*, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, München/Wien ^{3}1966, S. 89.

[2] *C. Tapp*, Kardinalität und Kardinäle, Wissenschaftshistorische Aufarbeitung der Korrespondenz zwischen Georg Cantor und katholischen Theologen seiner Zeit, Stuttgart 2005, S. 308 u. 310.

Cantor baute seine Mengenlehre nicht auf formalen Axiomen auf, sondern benutzte einen intuitiven Mengenbegriff. Für ihn waren Mengen so etwas wie platonische Ideen. Da man im Umgang mit Cantorschen Mengen jedoch bald auf Widersprüche stieß, wurden Anfang des 20. Jahrhunderts verschiedene Axiomensysteme für die Mengenlehre aufgestellt, welche ‚Mengen' als undefinierte Grundbegriffe behandeln und die Mengenbildungsprozesse formal genau regulieren. Im Rahmen dieser Systeme ist bislang kein Widerspruch aufgetreten. Man kann aber, wie wir heute aufgrund der Arbeiten des Logikers Kurt Gödel wissen, auf *formalem* Wege niemals beweisen, daß ein Widerspruch wirklich ausgeschlossen ist.[3] Der einzige Weg zur Absicherung der Widerspruchsfreiheit besteht also anscheinend darin, daß man mit Cantor Mengen als reale abstrakte Gedanken (d.h. als eine Art von platonischen Ideen) ansieht und für diese realen Mengen das Erfülltsein der Axiome durch außermathematische phänomenologische Betrachtungen sicherstellt.[4] So muß man also zur Fundierung der Mengenlehre und der darauf basierenden gesamten Mathematik auf die intuitive Cantorsche Mengenauffassung zurückgreifen, die wiederum durch ein ‚unzerreißbares Band' mit Metaphysik und Theologie verbunden ist. Mit anderen Worten: *Zur Fundierung der Mathematik bleiben wir auf die Metaphysik angewiesen!*

III. Der Mengen- und Unmengenbegriff

Nach Cantor ist eine Menge M eine „Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen".[5] Cantor selbst hat diese Definition nicht genauer erklärt, ich möchte aber versuchen, die dahinter stehenden Intuitionen zu präzisieren. Eine ‚Zusammenfassung' im Sinn dieser Definition dürfte ein durch menschliches Denken prinzipiell adäquat erfassbarer Gedanke sein, welcher die zusammengefaßten Objekte beinhaltet,[6] also eine Art ‚geistiger Behälter' für diese Objekte ist. Als

[3] Die Unmöglichkeit eines formalen Widerspruchsfreiheitsbeweises folgt aus dem 1931 von Gödel bewiesenen ‚Unvollständigkeitssatz'.

[4] Vgl. *L. Neidhart*, Unendlichkeit im Schnittpunkt von Mathematik und Theologie, Göttingen 2007.

[5] *E. Zermelo*, Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen, Berlin 1932, S. 282.

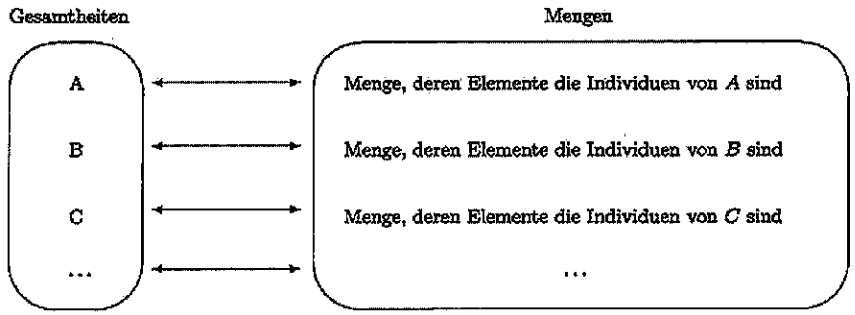
[6] Mengen sollen – im Gegensatz zu den noch einzuführenden Unmengen – durch unser Denken *adäquat erfaßbar* sein. Das schließt nicht aus, daß es Mengen mit unendlich vielen Elementen gibt, denn es gibt unendliche Vielheiten, die wir durchaus adäquat erfassen, auch wenn dies nicht durch eine unmittelbare, voll-anschauliche Wahrnehmung geschieht. So wird z.B. die Vorstellung der unendlich vielen Punkte einer begrenzten Linie durch die Anschauung der (unmittelbar wahrgenommenen) Linie vermittelt, dadurch aber wird die Vielheit aller dieser Punkte vollkommen adäquat erfaßt und für präzise mathematische Betrachtungen zugänglich gemacht.

Mengen sind aber keine *konkreten* Gedanken geeignet, die ein bestimmter Mensch zu einer bestimmen Zeit denkt, sondern nur *abstrakte*: Wir müssen also von den Gedanken, die wir als Mengen ansehen wollen, jeden Zeit- und Subjektbezug entfernen. Was dann herauskommt, sind so etwas wie platonische Ideen oder abstrakte mögliche ‚Formen' menschlichen Denkens, die ich ‚Denkformen' nenne. Damit eine Denkform eine Menge ist, ist schließlich noch zweierlei erforderlich. Erstens muß ihr Inhalt eine Gesamtheit von *Individuen* sein, d.h. eine Gesamtheit von Objekten, die (in dieser Denkform) als nicht zusammengesetzte Einheiten erscheinen, und die daher ‚Elemente' der Denkform heißen. Zweitens darf zum Inhalt nur die *reine* Gesamtheit dieser Elemente gehören, d.h. die Denkform muß so abstrakt sein, daß jeder *Zusatz* zum bloßen Vorhandensein dieser Elemente (z.B. eine gedachte Reihenfolge oder Ordnung zwischen ihnen) fehlt. Diese Überlegungen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

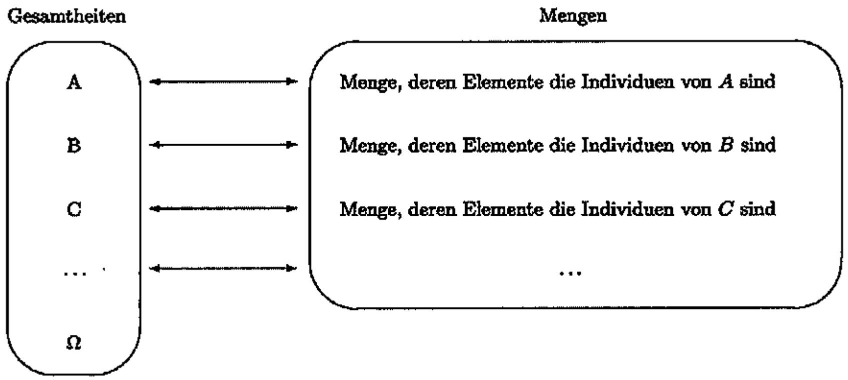
Definition: Eine *Menge* ist eine Denkform, die eine reine Gesamtheit von Individuen beinhaltet, welche die *Elemente* der Menge heißen.

Das wichtigste Anliegen der Mengenlehre ist es nun, beliebige Vielheiten selbst wie Individuen zu behandeln. Eine Menge soll demnach ein neues Individuum sein, welches eine Vielheit von Individuen repräsentiert. Wir müssen also streng genommen eine Vielheit (die z.B. aus drei Individuen a, b und c bestehen kann) von der entsprechenden Menge unterscheiden, in welcher die Vielheit gewissermaßen zu einer neuen Einheit zusammengezogen ist. Diese Menge bezeichnet man durch eine Aufzählung ihrer Elemente in geschweiften Klammern: $\{a,b,c\}$. Statt von Vielheiten sollte man eigentlich besser von Gesamtheiten sprechen: Gesamtheiten sind allgemeiner als Vielheiten, da eine Gesamtheit nicht nur aus *vielen* Individuen, sondern auch aus *nur einem einzigen* bestehen und im Grenzfall sogar *das reine Nichts* sein kann. Nicht nur jede Vielheit, sondern jede Gesamtheit möchte man durch eine Menge darstellen können. Mengen, die eine Gesamtheit von nur *einem einzigen* Individuum a zusammenfassen, heißen *einelementige* Mengen $\{a\}$, und die Menge, die das reine Nichts zusammenfaßt, heißt *die leere Menge* $\{\}$.

Es stellt sich nun die Frage, ob man wirklich jede Gesamtheit durch eine Menge darstellen kann. Wenn ja, so müßten sich Gesamtheiten und Mengen vollkommen gegenüberstehen, wie es durch folgendes Diagramm veranschaulicht wird:



Die wahre Situation ist jedoch, daß es Vielheiten gibt, zu denen keine entsprechende Menge existiert, es gibt also ‚mehr' Gesamtheiten als Mengen:

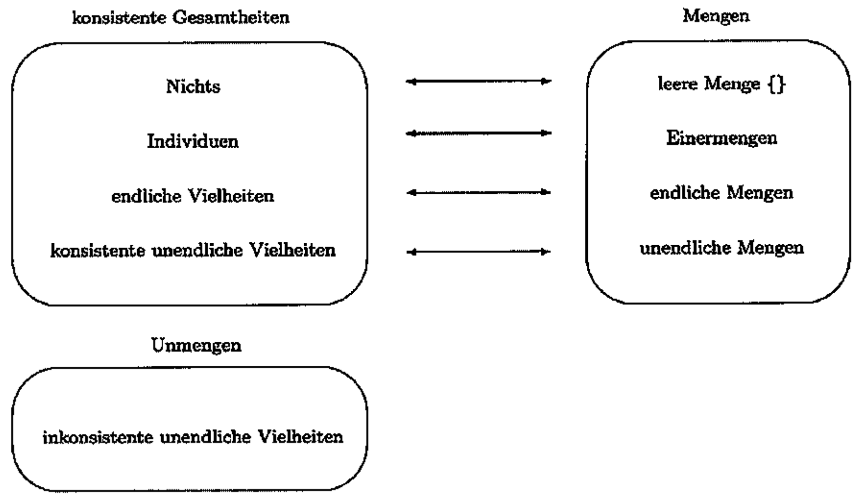


Der Grund hierfür ist, daß diese Vielheiten so groß und unübersichtlich sind, daß ein Widerspruch entsteht, wenn man versucht, sie als Einheit zu denken bzw. in eine Menge einzuschließen. Man könnte nun vermuten, daß die Grenze zwischen den in einer Menge einschließbaren Vielheiten und den jede Mengengrenze sprengenden Vielheiten gerade die Grenze zwischen endlichen und unendlichen Vielheiten ist. Aber dem ist nicht so. Zwar sind alle unendlichen Vielheiten für uns mehr oder weniger unübersichtlich, aber eine derartig ‚absolute' Unübersichtlichkeit, daß sich beim Versuch der Zusammenfassung *logische* Widersprüche einstellen können, wird man nicht für jede unendliche Vielheit behaupten wollen. So gibt es ja relativ übersichtlich zusammengefasste unendliche Vielheiten wie z.B. die unendliche Vielheit der Punkte auf einer Linie, die sicher keinen Widerspruch involvieren.

Die Grenze verläuft also zwischen ‚relativ kleinen und übersichtlichen' unendlichen Vielheiten und ‚unvorstellbar großen' unendlichen Vielheiten. Die Existenz solcher alle Grenzen unserer Vorstellung sprengenden Vielheiten hat bereits Cantor erkannt: Er nannte sie *inkonsistent unendlich* oder auch *absolut unendlich.*[7] Eine passende deutsche Bezeichnung für die inkonsistenten Vielheiten ist das Wort *Unmenge*, in dem zugleich zwei Merkmale der inkonsistent unendlichen Vielheiten zum Ausdruck kommen: Das Wort bezeichnet einerseits etwas sehr Großes, andererseits kann es als Negation von ‚Menge' aufgefaßt werden.

Definition: Eine *Unmenge* oder *inkonsistente Vielheit* ist eine Vielheit, die so groß ist, daß die dazugehörigen Individuen nicht in einer Menge enthalten sind.

Das Gegenüber von Gesamtheiten und Mengen läßt sich nun wie folgt veranschaulichen:



Die *konsistenten Gesamtheiten* sind diejenigen, denen eine Menge entspricht: Dazu gehören neben endlichen auch gewisse unendliche Gesamtheiten. Noch größer als diese sind die inkonsistenten Vielheiten oder Unmengen, denen keine Menge entspricht. Mengen und Unmengen faßt man in dem Begriff der Klasse zusammen:

Definition: Eine *Klasse* ist ein Objekt, das eine Menge oder eine Unmenge ist.

Um nun die Existenz von Unmengen zu beweisen, gebe ich ein ‚Verfahren' an, mit dem sich Unmengen gedanklich ‚aufbauen' lassen. Zunächst muß man sich davon überzeugen, daß zu jeder Menge *M* Individuen existieren, die *keine* Elemente von *M* sind, und die ich daher *Außenindividuen* von

[7] Vgl. Cantors Brief an Dedekind vom 03.08.1889, in: *Georg Cantor*, Briefe, hg. von *H. Meschkowski/W. Nilson*, Berlin u.a. 1991, S. 407.

M nenne. Zum Beispiel ist *M* kein Element von sich selbst, und so ist *M* selbst ein Außenindividuum von *M*. Dazu kommen natürlich immer noch unendliche viele weitere Außenindividuen. Nun zu dem Verfahren:

Verfahren zur Bildung von Unmengen: Wir wählen zu jeder Menge ein Außenindividuum aus, und bilden dann eine Vielheit V; die mindestens diese ausgewählten Außenindividuen umfaßt. V ist dann eine Unmenge.

Beweis: Angenommen, *V* ist *keine* Unmenge. Dann gibt es eine Menge *M*, die alle Individuen von *V* beinhaltet. Da *M* aber eine Menge sein soll, und wir zu *jeder* Menge ein Außenindividuum ausgewählt haben, gibt es auch ein Außenindividuum *i* von *M*, das wir ausgewählt und zur Vielheit *V* hinzugefügt haben. Dann gilt einerseits, daß dieses *i* in *M* liegt (weil *M* ja *alle* zu *V* gehörigen Individuen enthalten soll), aber andererseits ist *i* ein *Außen*individuum von *M* und muß daher außerhalb von *M* liegen. So müßte *i* zugleich in und außerhalb von *M* liegen, und dieser Widerspruch zeigt, daß die Annahme falsch war. Also ist *V* eine Unmenge.

Nach diesem Verfahren kann man unendlich viele Unmengen bilden, denn zu jeder Menge gibt es unendlich viele Möglichkeiten, ein Außenindividuum auszuwählen. Wählt man z.B. zu jeder Menge als Außenindividuum die Menge selbst aus, so ist die Vielheit der ausgewählten Individuen die ‚Vielheit aller Mengen', die ich mit $\mathbb{M}$ bezeichne. $\mathbb{M}$ ist also eine Unmenge, und dasselbe muß dann erst recht für die noch umfassendere Vielheit gelten, die ‚alle Dinge' enthält und die man $\mathbb{D}$ nennt. So können wir festhalten:

Theorem: *Die Vielheiten $\mathbb{M}$ und $\mathbb{D}$ sind Unmengen.*

Neben dem Klassenbegriff, in dem Mengen und Unmengen zusammengefasst werden, benötigen wir noch die Begriffe der Teilmenge und der Potenzmenge:

Definition: Eine *Teilmenge* einer Menge *M* ist eine Menge, deren Elemente alle in *M* liegen.

Ist beispielsweise *M* die dreielementige Menge {a,b,c}, so hat *M* die folgenden Teilmengen:

- die leere Menge {},
- die drei einelementigen Mengen {a}, {b} und {c},
- die drei zweielementigen Mengen {a,b}, {b,c} und {a,c},
- und schließlich ist die dreielementige Menge *M* selbst auch eine Teilmenge von *M*.

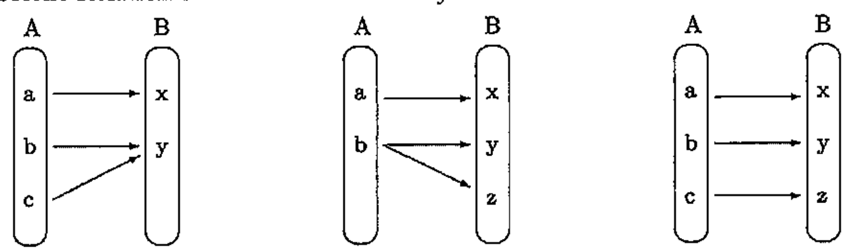
Insgesamt hat das dreielementige *M* also acht Teilmengen. Sieben von ihnen sind von *M* selbst verschiedene, ‚kleinere' Teilmengen: Diese heißen *echte Teilmengen* von *M*.

Definition: Zu jeder Menge *M* kann man die Potenzmenge *P(M)* bilden, deren Elemente die Teilmengen von *M* sind.

Man nimmt also gewissermaßen alle Teilmengen aus *M* heraus und stellt sie zu einer neuen Menge *P(M)* zusammen. Durch fortgesetzte Potenzmengenbildung gelangt man schnell zu sehr großen Mengen: Die Potenzmenge einer 3-elementigen Menge {*a,b,c*} ist, wie wir gesehen haben, eine 8-elementige Menge; deren Potenzmenge aber hat bereits 256 Elemente usw. Daß man durch Potenzmengenbildung auch aus jeder unendlichen Menge eine größere machen kann, ist der Kern des sogenannten *Satzes von Cantor*, auf den ich gleich noch zurückkommen werde. Nun zunächst zur Definition der Unendlichkeit.

IV. Die Definition der unendlichen Menge

Zur Vorbereitung der Definition der Unendlichkeit muß zunächst erklärt werden, wie man zwei Mengen der Größe nach vergleicht. Was es für Mengen *A* und *B* heißt, daß sie ‚gleich groß' sind oder daß die eine ‚kleiner' oder ‚größer' als die andere ist, erklärt man in der Mengenlehre mittels Relationen. Eine Relation zwischen Mengen *A* und *B* ist eine Zuordnung zwischen den Elementen von *A* und *B*, die man durch Pfeile darstellen kann, die von Elementen von A ausgehen und auf Elemente von *B* zeigen. Wenn von jedem Element von *A* nur ein Pfeil ausgeht, heißt die Relation *linkseindeutig*. Wenn auf jedes Element von *B* nur ein Pfeil zeigt, heißt sie *rechtseindeutig*, und wenn sie sowohl links- als auch rechtseindeutig ist, heißt sie *beidseitig eindeutig*. Eine beidseitig eindeutige Relation stellt die Elemente von *A* und *B* so gegenüber, daß sie sich eins-zu-eins gegenüberstehen. Eine solche Relation nennt man auch eine *Bijektion*.



linkseindeutig **rechtseindeutig** **beidseitig eindeutig**

Wir können nun zwei Arten des Größenvergleichs zwischen Mengen definieren. In der Mengenlehre ist folgender Größenvergleich üblich, den ich ‚relationstheoretisch' nenne:

Relationstheoretischer Größenvergleich: Mengen *A* und *B* heißen *relationstheoretisch gleich groß* oder *gleichmächtig*, wenn es eine *Bijektion* zwischen *A* und *B* gibt. Gibt es keine Bijektion, wohl aber eine links- bzw.

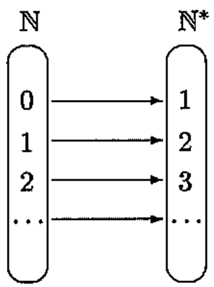
rechtseindeutige Relation zwischen A und B, heißt A *relationstheoretisch größer* bzw. *kleiner* als B.

Im alltäglichen Sprachgebrauch ist dagegen eher folgender Größenvergleich üblich, den ich ‚ergänzungstheoretisch' nenne:

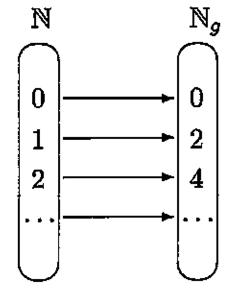
Ergänzungstheoretischer Größenvergleich: Eine Menge A heißt *ergänzungstheoretisch kleiner* bzw. *größer* als B, wenn A eine echte Teilmenge von B bzw. B eine echte Teilmenge von A ist.

Während nun für endliche Mengen die beiden Begriffe in einem gewissen Sinn zusammenfallen – eine Menge, die *ergänzungstheoretisch* kleiner oder größer als eine endliche Menge A ist, ist immer auch *relationstheoretisch* kleiner bzw. größer als A – fallen sie im Unendlichen erstaunlicherweise auseinander: Für eine unendliche Menge A kann nämlich eine *ergänzungstheoretisch* kleinere oder größere Menge dennoch *relationstheoretisch* die gleiche Größe wie A haben.

1. Beispiel: Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist ergänzungstheoretisch größer als die Menge $\mathbb{N}^*$ der natürlichen Zahlen ohne die Null – sie ist um genau ein Element größer – aber relationstheoretisch sind beide gleich groß.



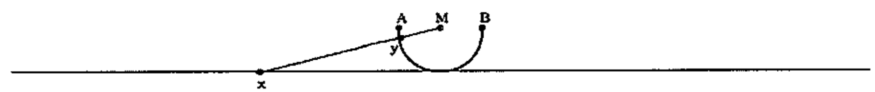
2. Beispiel: Die Menge $\mathbb{N}$ aller natürlichen Zahlen ist wiederum ergänzungstheoretisch größer als die Menge $\mathbb{N}_g$ der geraden Zahlen – sie ist sogar um unendlich viele Elemente größer – und dennoch sind auch diese beiden Mengen relationstheoretisch gleich groß.



3. Beispiel: Eine unbegrenzte Gerade ist gleichmächtig mit einem begrenzten Intervall AB, obgleich das Intervall ergänzungstheoretisch unendlich viel kleiner ist.

Um dies zu sehen, verbiegen wir die Strecke AB zunächst zu einem Halbkreis:

Wir müssen nun zeigen, wie wir jeden Punkt der Geraden mit einem entsprechenden Punkt des Halbkreises verbinden können, so daß sich eine Bijektion ergibt. Ist nun x ein beliebiger Punkt der Geraden, so können wir x mit dem Mittelpunkt M des Halbkreises durch eine gerade Linie verbinden:



Diese schneidet den Halbkreis in einem Punkt y, und mit diesem soll unsere Bijektion x verbinden. Auf diese Weise können wir offenbar die Punkte der Geraden mit den Punkten des Halbkreises restlos zu Paaren zusammenstellen und bekommen eine Bijektion.

Dieses Phänomen, daß relationstheoretische Gleichheit trotz ergänzungstheoretischer Ungleichheit bestehen kann, ist für unendliche Mengen charakteristisch und wurde von Cantor (1878) und Dedekind (1887) zur exakten Definition des Unendlichen verwendet:

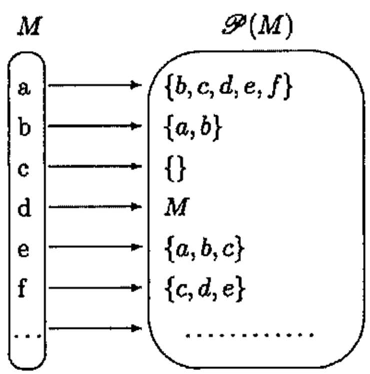
Definition der Unendlichkeit: Eine Menge heißt *unendlich*, wenn sie mit einer ergänzungstheoretisch kleineren Teilmenge gleichmächtig ist.

Das ist eine klare Definition, während die früher üblichen mißverständlich, verworren und teilweise auch falsch waren.[8]

V. Der Satz von Cantor und seine philosophisch-theologische Konsequenzen

Satz von Cantor: *Die Potenzmenge P(M) einer Menge M ist stets relationstheoretisch größer als M.*

Dieser auf eine Arbeit Cantors aus dem Jahre 1890 zurückgehende Satz[9] ist für endliche Mengen sofort einsichtig, aber für unendliche Mengen hat sich im letzten Abschnitt gezeigt, daß größer aussehende Mengen dennoch relationstheoretisch gleich groß sein können. Daß *P(M)* also auch im unendlichen Fall relationstheoretisch größer als *M* ist, ist anschaulich nicht evident, man muß es beweisen. Hierzu nehmen wir an, was wir widerlegen wollen: Daß es eine Bijektion zwischen *M* und *P(M)* gibt. Die Zuordnungen dieser Bijektion könnten beispielsweise wie folgt aussehen:



[8] Z.B. war es üblich, ‚unendlich' mit ‚unzählbar' oder mit ‚nicht durchschreitbar' gleichzusetzen. Das scheint einfach falsch zu sein: Wenn ich den Finger von *A* nach *B* bewege, durchschreitet er die unendlich vielen Punkte, die dazwischen sind. Und wenn ich entweder unendlich viel Zeit habe oder in endlicher Zeit immer schneller zähle, kann ich das Unendliche auch zählen. Eine andere Definition besagte, das Unendliche sei das Unbegrenzte, nicht Definierbare, nicht Begreifbare, nicht Überschaubare usw. Das ist vom Ansatz her nicht falsch, aber es handelt sich hier um dunkle psychologische Begriffe, die man präzisieren müßte. Ganz anders verhält es sich mit der obigen mathematischen Definition, welche auf den völlig klaren Begriffen der Teilmenge und der Gleichmächtigkeit basiert.

[9] Cantor hat 1890 einen hierzu äquivalenten Satz bewiesen (vgl. *E. Zermelo*, Georg Cantor, a.a.O., S. 278–281).

Wir führen dies nun ad absurdum, indem wir eine Teilmenge *T* von *M* konstruieren, die rechts nicht aufgeführt ist, also nicht in der Menge *P(M)* aller Teilmengen von *M* liegt, was ein Widerspruch ist. Die ersten Schritte der Konstruktion von *T* sind folgende:

1. Schritt: In der dem *a* zugeordneten Menge $\{b,c,d,e,f\}$ ist *a* selbst *nicht* enthalten. Wir nehmen deshalb *a* in die zu konstruierende Menge *T* auf. Es ist also $T = \{a, \ldots\}$, und so unterscheidet sich *T* durch das Beinhalten des Elements a von der Menge $\{b,c,d,e,f\}$.

2. Schritt: In der dem *b* zugeordneten Menge $\{a,b\}$ ist *b* enthalten. Wir nehmen deshalb *b nicht* in die zu konstruierende Menge *T* auf. Unser *T* hat also immer noch die Gestalt $\{a, \ldots\}$ und unterscheidet sich durch das Nicht-Beinhalten von *b* von der Menge $\{a,b\}$.

3. Schritt: In der dem *c* zugeordneten leeren Menge $\{\}$ ist *c nicht* enthalten. Wir nehmen deshalb *c* in die zu konstruierende Menge *T* auf. *T* hat nun die Gestalt $\{a,c, \ldots\}$ und unterscheidet sich durch das Beinhalten des Elements *c* von der leeren Menge usw.

Auf diese Weise erhalten wir offensichtlich eine unendliche Teilmenge *T*, die von *allen* links aufgeführten Teilmengen verschieden ist. Durch diesen Widerspruch ist der Satz von Cantor bewiesen.

Die erste philosophische Konsequenz aus dem Satz von Cantor ist nun die für die *Ontologie* bedeutsame Tatsache, daß es unendlich viele, qualitativ verschiedene Stufen des Unendlichen gibt. Näherhin stellt sich heraus, daß die mit der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen gleichmächtigen Mengen auf der tiefsten Stufe des Unendlichen liegen. Hierzu gehören auch die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen und die Menge $\mathbb{Q}$ der Bruchzahlen. Man spricht diesen Mengen die Stufe der sogenannten *abzählbaren Unendlichkeit* zu. Nach dem Satz von Cantor existiert darüber eine höhere Stufe des Unendlichen, welcher die Potenzmenge *P(N)* und die damit gleichmächtigen Mengen angehören: Hierzu gehören die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen und auch alle sogenannten kontinuierlichen Mengen (Strecken, Geraden, Ebenen, sowie der ganze Raum). Diesen Mengen spricht man die *kontinuierliche Unendlichkeit* zu. Wieder nach dem Satz von Cantor existiert eine noch höhere Stufe des Unendlichen, welcher die Potenzmenge *P(P(N))* und alle mit dieser Menge gleichmächtigen Mengen angehören. Hierzu gehört die Menge aller reellen Funktionen und ebenso die Menge aller komplexen Funktionen. Man spricht daher von *funktionaler*

Unendlichkeit usw. Über all diesen unendlich vielen Stufen der Unendlichkeit liegen schließlich die Unmengen.[10]

Der Satz von Cantor hat nun des weiteren eine Konsequenz für die *metaphysische Psychologie*, die Lehre vom Wesen des Menschen. Daß es keine größte Menge gibt, bedeutet ja, wenn wir unsere Interpretation der Mengen als mögliche Formen menschlichen Denkens zugrunde legen, daß es zu jedem Akt menschlichen Denkens, in dem wir eine Vielheit zu einer Einheit zusammenfassen, stets einen weiteren Erkenntnisakt derselben Art gibt, dessen Inhalt noch umfassender ist als der des ersten. *Unsere Erkenntnis ist daher grundsätzlich stets erweiterungsfähig*. Das aber heißt zweierlei: Zum einen erreichen wir nie so etwas wie Allwissenheit, zum anderen können wir die Grenzen unseres momentanen Wissens immer wieder überschreiten. Beides zusammen heißt klassisch ausgedrückt: *Menschliches Erkennen ist potentiell unbegrenzt*.[11]

Dieses Faktum bestätigt auch die *theologische* Einstufung des Menschen, wonach dieser in der Mitte zwischen dem in festen Grenzen eingeschlossenen Teil der Schöpfung und dem absolut unendlichen Gott steht.

VI. Das Reflexionsprinzip und sein theologischer Hintergrund

Das *Reflexionsprinzip* wurde von Azriel Levy 1960 als ein Fundamentalaxiom vorgeschlagen, aus dem sich die Existenz hochgradig unendlicher Mengen ableiten läßt.[12] Es lautet in vereinfachter Form:

Reflexionsprinzip: Zu jeder begreifbaren Eigenschaft einer Unmenge gibt es stets auch eine Menge, welche diese Eigenschaft ebenfalls hat.

[10] Die Frage, ob es im Bereich der Unmengen ebenfalls Stufen gibt, ist bis heute offen. Auf der maximalen Unmengenstufe steht aber jedenfalls die Unmenge $\mathbb{D}$ aller Dinge.

[11] Etwas, dessen Größe stets vermehrt werden kann, das aber dennoch immer begrenzt bleibt, heißt *potentiell unbegrenzt*, während das *aktual Unbegrenzte* tatsächlich unbegrenzt ist. Während die potentielle Unbegrenztheit unseres *konkreten, voll-anschaulichen Vorstellungsvermögens* auch ohne den Satz von Cantor erweisbar ist (etwa mittels der Tatsache, daß wir uns keine unendliche Vielheit konkret und in voller Anschaulichkeit vorstellen können, wohl aber eine endliche Strecke in unserer Vorstellung stets noch verlängert werden kann), zeigt der Satz von Cantor, daß auch unser *abstrakt-mathematisches* Denken, mit welchem wir die noch relativ übersichtlichen, konsistenten unendlichen Vielheiten erfassen und der Berechnung unterwerfen können, nur potentiell unbegrenzt ist, weil und insofern es auch für dieses Denken immer ein Darüberhinaus gibt. Versuchen wir, etwas wirklich absolut Grenzenloses zu denken (z.B. die Unmenge $\mathbb{D}$), so stellen wir fest, daß es sich uns als ein inkonsistent Unendliches darbietet, das wir auch auf der abstrakt-mathematischen Ebene nicht mehr adäquat begreifen können.

[12] Vgl. *A. Levy*, Principles of reflection in axiomatic set theory, in: Fundamenta Mathematica 49 (1960), S. 1–10.

Mit diesem Prinzip kann man die Existenz von zahlreichen unendlichen Mengen ableiten, die einer Unmenge in verschiedener Weise ähnlich sind, und daher eine exorbitante Größe haben können. Als Beispiel betrachte man den folgenden Existenzsatz:

Es gibt eine Menge mit der Eigenschaft, daß sie unendlich viele Mengen enthält, und mit jeder ihrer Mengen M stets auch deren Potenzmenge *P(M)* als Element enthält.

Beweis: Die *Unmenge* $\mathbb{D}$ hat diese Eigenschaft, weil $\mathbb{D}$ alle Mengen schlechthin enthält. Per Reflexionsprinzip gibt es also auch eine *Menge* mit derselben Eigenschaft.

Allerdings muß man bei der Anwendung des Reflexionsprinzips vorsichtig sein: Zum Beispiel hat die Unmenge $\mathbb{D}$ die Eigenschaft, ‚größer als jede Menge' zu sein. Daraus darf man nicht schließen, daß es auch eine Menge gäbe, die größer als jede Menge ist (was ja ein Widerspruch wäre). Was hat man hier falsch gemacht? Das Reflexionsprinzip spricht von *begreifbaren* Eigenschaften. Es gibt also Eigenschaften, auf die das Reflexionsprinzip nicht angewendet werden darf, und diese heißen dann *nicht begreifbar*. Dabei handelt es sich um Eigenschaften einer Unmenge, welche für die inkonsistente Unendlichkeit der Unmenge *charakteristisch* sind, und daher nicht wirklich ‚begriffen' werden können. Die Eigenschaft, ‚größer als jede Menge zu sein' ist ein Beispiel hierfür.

Wie läßt sich das Reflexionsprinzip plausibel machen? Eine Unmenge ist inkonsistent unendlich und daher für unser Denken nicht adäquat begreifbar. *Wenn* wir also eine Eigenschaft einer Unmenge begreifen, kann man davon ausgehen, daß es sich nicht um eine *exklusive* Eigenschaft von Unmengen handelt, sondern um eine solche, welche die Unmenge mit mindestens einer Menge gemeinsam hat. Wenn wir also zum Beispiel meinen, die inkonsistent unendliche Unmenge $\mathbb{D}$ aller Dinge zu ‚sehen', haben wir in Wirklichkeit nur eine äußerst große Menge im Blick, in der sich eine Eigenschaft von $\mathbb{D}$ ‚widerspiegelt' (reflektiert).

Zu diesem Prinzip gibt es eine bemerkenswerte Parallele in der Theologie. So sagt Papst Gregor der Große (um 540–604), um die unendliche Erhabenheit Gottes auszudrücken: „Was immer nun von ihm [Gott] geschaut wird, ist noch nicht er selbst, sondern ist unterhalb von ihm".[13] In dieser Analogie entspricht dem theologischen Gottesbegriff der Unmengenbegriff, insbesondere der Begriff der Klasse $\mathbb{D}$ aller Dinge, der sogenannten Allklasse. In der Tat steht die Allklasse $\mathbb{D}$ mit dem Gottesbegriff in so enger Beziehung wie kaum ein anderer unserer Begriffe: $\mathbb{D}$ ist eine Art Repräsentation des göttlichen Wesens. Zwar muß man einschränkend sagen, daß die Allklasse nicht direkt Gott ist: Denn Gott ist ja ein Individuum und keine

[13] *Gregor der Große*, Ezechielkommentar Kap. 2, Homilia 2, § 14.

Klasse. Aber Gott muß als Allwissender die Allklasse verstandesmäßig vollkommen erfassen, so daß diese Klasse als der wesentliche *Inhalt des göttlichen Verstandes* bezeichnet werden kann, so dass ein vollständiges Begreifen der Allklasse einem vollständigen Begreifen Gottes gleichkäme. Das Reflexionsprinzip der modernen Mengenlehre kann daher als ein eigentlich ‚theologisches' Prinzip bezeichnet werden, das bereits von Mystikern wie Papst Gregor dem Großen ausgesprochen wurde.

Literaturhinweise

Gregor der Große: Ezechielkommentar (Homiliae in Hiezechihelem Prophetam), verfaßt nach 593 n.Chr., hg. von *Marcus Adriaen*, Corpus Christianorum Series Latina, Bd. 142, Turnholti 1971.

Levy, Azriel: Principles of reflection in axiomatic set theory, in: Fundamenta Mathematica 49 (1960), S. 1–10.

Meschkowski, Herbert/Nilson, Winfried: Cantor, Georg, Briefe, Berlin 1991.

Neidhart, Ludwig: Unendlichkeit im Schnittpunkt von Mathematik und Theologie, Göttingen [2]2008.

Tapp, Christian: Kardinalität und Kardinäle, Wissenschaftshistorische Aufarbeitung der Korrespondenz zwischen Georg Cantor und katholischen Theologen seiner Zeit, Stuttgart 2005.

Zermelo, Ernst: Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, Berlin 1932.

III. Der Blick der Mathematik – Blicke auf die Mathematik

IV. Theologische Horizonte