Ludwig Neidhart:

Mathematische Unendlichkeitslehre
und ihre Bezüge zu Metaphysik und Theologie

veröffentlicht in: Roessler, Kurt (Hg.) Unendlichkeit, Ewigkeit und der Mönch von Heisterbach, Bornheim 2018, S. 61–69.
Grundlage des gleichnamigen Vortrags auf dem 23. Bad Honnefer Winterseminars (10.–12. Januar 2019 im Physikzentrum Bad Honnef), gehalten am 11. Januar 2019.

Abstract: Resultate der mathematischen Mengenlehre über die Unendlichkeit können zur Beantwortung metaphysischer Fragen beitragen. Es gibt sogar Bezüge der Mengenlehre zur Theologie.

Die Stellung der Unendlichkeitsfrage im System der Wissenschaften

Unendlichkeitsfragen wurden früher in der sog. Metaphysik behandelt. Die *allgemeine Metaphysik* (auch *Ontologie* genannt) beschäftigt sich mit dem Sein im Allgemeinen. Die *spezielle Metaphysik* umfasst die drei Fächer *Theologie*, *Psychologie* und *Kosmologie:*
Die „letzten Fragen“ dieser metaphysischen Disziplinen haben alle mit dem Unendlichen zu tun.

- Theologie: Gibt es ein absolut Unendliches jenseits der Welt?
- Psychologie: Kann der Mensch bzw. seine Seele an der Unendlichkeit partizipieren?
- Kosmologie: Ist das Weltall selbst zeitlich oder räumlich unendlich?

Dazu kommen in der Ontologie oder allgemeinen Metaphysik noch die folgenden Vorfragen:

- Ist das Unendliche widersprüchlich oder nicht? Wie ist es zu definieren?

Seit Kants Kritik wurden jedoch die Metaphysik immer mehr aus der Philosophie ausgegliedert: Die Gottesfrage überließ man den *Theologen*, die Kosmologie den *Physikern*, die Psychologie den *Psychologen*. Am ehesten wird von den Philosophen noch die Ontologie behandelt, aber auch hier leistet seit dem Ende des 19. Jahrhunderts eine andere Wissenschaft, nämlich die *Mathematik* mit ihren Fundamentaldisziplinen *Logik* und *Mengenlehre* entscheidende Beiträge, zumindest wenn es um das Unendliche geht.

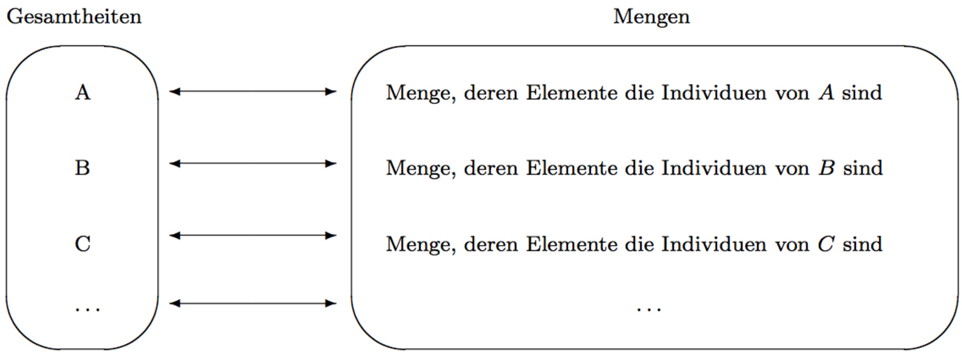
Cantors Mengenlehre, der Mengen- und Unmengenbegriff

Als Georg Cantor zwischen 1874 und 1897 seine Mengen- und Unendlichkeitslehre entwickelte, „entdeckte“ er die Existenz eines zwischen dem „Endlichen“ und dem „absolut Unendlichen“ liegenden Bereichs, den er „das Transfinite“ nannte. So gibt es nach Cantor

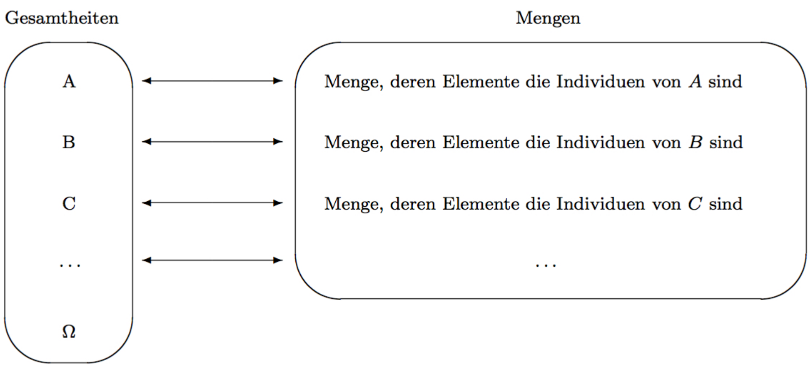
1. Das Endliche (finitum creatum),
2. Das Transfinite (infinitum creatum),
3. Das absolut Unendliche oder Göttliche (infinitum increatum).

Insbesondere unterschied Cantor zwischen dem noch berechenbaren Transfiniten und dem für die menschliche Vorstellung unfassbaren absolut Unendlichen, das er mit Gott in Verbindung brachte. Cantor sah überhaupt eine enge Verbindung zwischen Mengenlehre, Metaphysik und Theologie. Nach Cantor ist eine Menge M eine „Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente’ von M genannt werden) zu einem Ganzen“. Eine „Zusammenfassung“ im Sinn dieser Definition ist ein prinzipiell adäquat erfassbarer Gedanke, der die zusammengefassten Objekte beinhaltet: eine Art „geistiger Behälter“ für diese Objekte. Als Mengen sind aber keine *konkreten* Gedanken geeignet, die ein bestimmter Mensch zu einer bestimmen Zeit denkt, sondern nur *abstrakte*: Wir müssen also von den Gedanken, die wir als Mengen ansehen wollen, jeden Zeit- und Subjektbezug entfernen. Was dann herauskommt, sind so etwas wie platonischen Ideen oder abstrakte mögliche „Formen“

menschlichen Denkens. Damit eine solche „Denkformen“ eine Menge ist, ist noch zweierlei erforderlich. Erstens muss ihr Inhalt eine Gesamtheit von *Individuen* sein, d. h. von Objekten, die (in dieser Denkform) als nicht zusammengesetzte Einheiten erscheinen, und die daher *Elemente* der Denkform heißen. Zweitens darf zum Inhalt nur die *reine* Gesamtheit dieser Elemente gehören, d.h. die Denkform muss so abstrakt sein, dass jeder *Zusatz* zum bloßen Vorhandensein dieser Elemente (z. B. eine gedachte Reihenfolge oder Ordnung zwischen ihnen) fehlt.
Das wichtigste Anliegen der Mengenlehre ist es nun, beliebige Vielheiten selbst wie Individuen zu behandeln. Eine Menge soll demnach ein neues Individuum sein, welches eine Vielheit von Individuen repräsentiert. Wir müssen also streng genommen eine Vielheit (die z. B. aus drei Individuen a, b und c bestehen kann) von der entsprechenden Menge unterscheiden, in welcher die Vielheit gewissermaßen zu einer neuen Einheit zusammengezogen ist. Diese Menge bezeichnet man durch eine Aufzählung ihrer Elemente in geschweiften Klammern: {a,b,c}. Statt von Vielheiten sollte man eigentlich besser von Gesamtheiten sprechen: Gesamtheiten sind allgemeiner als Vielheiten, da eine Gesamtheit nicht nur aus *vielen* Individuen, sondern auch aus *nur einem einzigen* bestehen und im Grenzfall sogar *das reine Nichts* sein kann. Nicht nur jede Vielheit, sondern jede Gesamtheit möchte man durch eine Menge darstellen können. Mengen, die eine Gesamtheit von nur einem einzigen Individuum a zusammenfassen, heißen *einelementige* Mengen {a}, und die Menge, die das reine Nichts zusammenfasst, heißt *die leere Menge* {}. Es stellt sich nun die Frage, ob man wirklich *jede* Gesamtheit durch eine Menge darstellen kann. Wenn ja, so müssten sich Gesamtheiten und Mengen vollkommen gegenüberstehen, wie es durch folgendes Diagramm veranschaulicht wird:

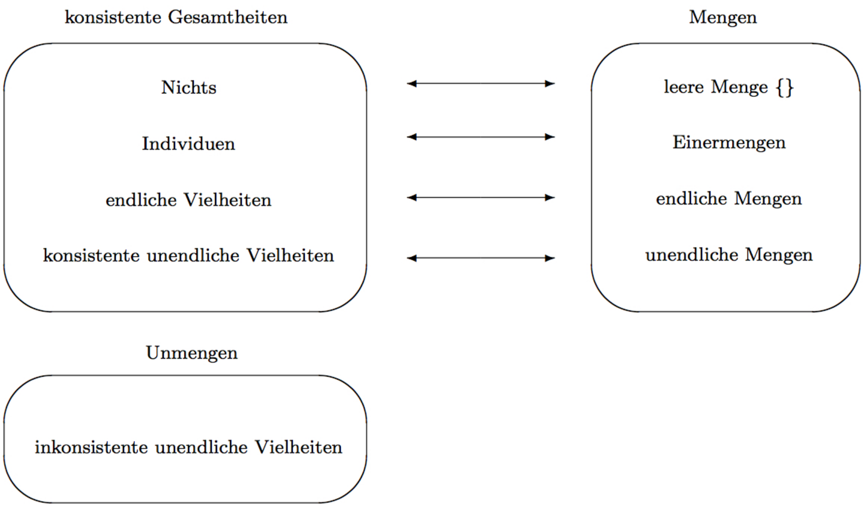


Die wahre Situation ist jedoch, dass es Vielheiten gibt, zu denen keine entsprechende Menge existiert, es gibt also „mehr“ Gesamtheiten als Mengen:



Der Grund hierfür ist, dass diese Vielheiten so groß und unübersichtlich sind, dass ein Widerspruch entsteht, wenn man versucht, sie als Einheit zu denken bzw. in eine Menge einzuschließen. Man könnte nun vermuten, dass die Grenze zwischen den in einer Menge einschließbaren Vielheiten und den jede Mengengrenze sprengenden Vielheiten die Grenze zwischen endlichen und unendlichen

Vielheiten ist. Aber dem ist nicht so. Zwar sind alle unendlichen Vielheiten für uns mehr oder weniger unübersichtlich, aber es gibt es relativ übersichtlich zusammengefasste unendliche Vielheiten wie z. B. die unendliche Vielheit der Punkte auf einer Linie, bei denen ein Widerspruch beim Zusammenfassen zu einer Einheit nicht zu erwarten ist. Die Grenze verläuft also zwischen „relativ kleinen und übersichtlichen“ unendlichen Vielheiten und „unvorstellbar großen“ unendlichen Vielheiten. Die Existenz solcher alle Grenzen unserer Vorstellung sprengenden Vielheiten hat bereits Cantor erkannt: Er nannte sie *inkonsistent unendlich* oder *absolut unendlich*. Eine passende Bezeichnung hierfür ist das Wort *Unmenge*, in dem zwei Merkmale der inkonsistent unendlichen Vielheiten zum Ausdruck kommen: Eine Unmenge ist etwas sehr Großes, und es ist eine Nicht-Menge. Das Gegenüber von Gesamtheiten und Mengen lässt sich nun wie folgt veranschaulichen:



Die *konsistenten Gesamtheiten* sind diejenigen, denen eine Menge entspricht: Dazu gehören neben den endlichen auch gewisse unendliche Gesamtheiten. Noch größer als diese sind die inkonsistenten Vielheiten oder Unmengen, denen keine Menge entspricht. Mengen und Unmengen fasst man in dem Begriff der Klasse zusammen. Um nun die Existenz von Unmengen zu beweisen, gebe ich ein „Verfahren“ an, mit dem sich Unmengen gedanklich „aufbauen“ lassen. Zunächst muss man sich klar machen, dass zu jeder Menge M Individuen existieren, die *keine* Elemente von M sind, und die ich *Außenindividuen* von M nenne. So ist M kein Element von sich selbst, weshalb M selbst ein Außenindividuum von M ist. Dazu kommen noch unendliche viele weitere Außenindividuen wie z.B. . Nun zu dem Verfahren:

Wir wählen zu jeder Menge ein Außenindividuum aus, und bilden dann eine Vielheit V, die mindestens die ausgewählten Außenindividuen umfasst. Jedes solche V ist eine Unmenge.

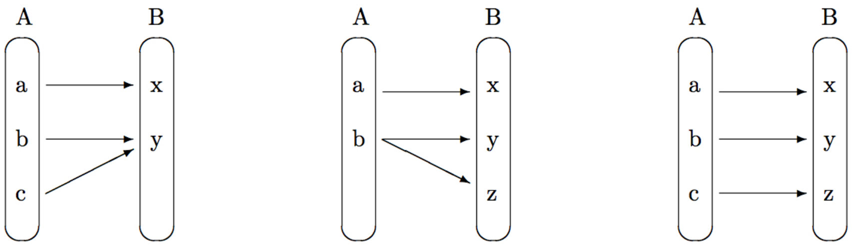
Beweis: Angenommen, V ist *keine* Unmenge. Dann gibt eine Menge M, die alle Individuen von V beinhaltet. Da M aber eine Menge sein soll, und wir zu *jeder* Menge ein Außenindividuum ausgewählt haben, gibt es auch ein Außenindividuum i von M, das wir ausgewählt und zur Vielheit V hinzugefügt haben. Dann gilt einerseits, dass dieses i in M liegt (weil M ja *alle* zu V gehörigen Individuen enthalten soll), aber andererseits ist i ein *Außen*individuum von M und muss daher außerhalb von M liegen. So müsste i zugleich in und außerhalb von M liegen, und dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme falsch war. Also ist V eine Unmenge, q.e.d.

Nach diesem Verfahren kann man unendlich viele Unmengen bilden, denn zu jeder Menge gibt es unendlich viele Möglichkeiten, ein Außenindividuum auszuwählen. Wählt man z. B. zu jeder Menge als Außenindividuum die Menge selbst aus, so ist die Vielheit der ausgewählten Individuen die „Vielheit aller Mengen“, die man mit $\mathbb{M}$ bezeichnet. $\mathbb{M}$ ist also eine Unmenge, und dasselbe muss dann erst recht für die noch umfassendere Vielheit gelten, die „alle Dinge“ enthält und die man $\mathbb{D}$ nennt. So können wir festhalten: Die Vielheiten $\mathbb{M}$ und $\mathbb{D}$ sind Mengen.

Neben dem Klassenbegriff, in dem Mengen und Unmengen zusammengefasst werden, benötigen wir noch die Begriffe der Teilmenge und der Potenzmenge: Eine *Teilmenge* einer Menge M ist eine Menge, deren Elemente alle in M liegen. Ist beispielsweise M die dreielementige Menge {a,b,c}, so hat M die folgenden Teilmengen: die leere Menge {}, die drei einelementigen Mengen {a}, {b} und {c}, die drei zweielementigen Mengen {a,b}, {b,c} und {a,c}, und schließlich ist die dreielementige Menge M selbst auch eine Teilmenge von M. Insgesamt hat das dreielementige M also acht Teilmengen. Sieben von ihnen sind von M selbst verschiedene, „kleinere" Teilmengen: Diese heißen *echte Teilmengen* von M. Zu jeder Menge M kann man nun die sog. *Potenzmenge* P(M) bilden, deren Elemente die Teilmengen von M sind. Man nimmt also gewissermaßen alle Teilmengen aus M heraus und stellt sie zu einer neuen Menge P(M) zusammen. Durch fortgesetzte Potenzmengenbildung gelangt man schnell zu sehr großen Mengen: Die Potenzmenge einer 3-elementigen Menge {a,b,c} ist eine 8-elementige Menge; deren Potenzmenge aber hat bereits 256 Elemente usw. Dass man durch Potenzmengenbildung auch aus jeder unendlichen Menge eine größere machen kann, ist der Kern des sog. *Satzes von Cantor*, auf den ich gleich noch zurückkommen werde. Nun zunächst zur Definition der Unendlichkeit.

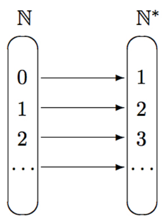
Die Definition der unendlichen Menge

Zur Vorbereitung der Definition muss geklärt werden, was es für Mengen A und B heißt, dass sie „gleich groß" sind. Dies erklärt man mittels Relationen. Eine Relation zwischen Mengen A und B ist eine Zuordnung zwischen den Elementen von A und B, die man durch Pfeile darstellen kann, die von Elementen von A ausgehen und auf Elemente von B zeigen. Geht von jedem Element von A nur ein Pfeil aus, heißt die Relation *linkseindeutig*. Zeigt auf jedes Element von B nur ein Pfeil, heißt sie *rechtseindeutig*, und wenn sie links- und rechtseindeutig zugleich ist, heißt sie *beidseitig eindeutig*. Eine beidseitig eindeutige Relation stellt die Elemente von A und B so gegenüber, dass sie sich eins-zu-eins gegenüberstehen. Eine solche Relation nennt man auch eine *Bijektion*.



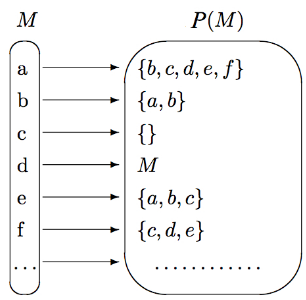
linkseindeutig rechtseindeutig beidseitig eindeutig

Mengen A und B heißen nun *relationstheoretisch gleich groß* oder *gleichmächtig*, wenn es eine *Bijektion* zwischen A und B gibt. Gibt es keine Bijektion, wohl aber eine links- bzw. rechtseindeutige Relation zwischen A und B, heißt A *relationstheoretisch größer* bzw. *kleiner* als B. Im alltäglichen Sprachgebrauch ist ein anderer Größenvergleich üblich, den man „ergänzungstheoretisch" nennen kann: Eine Menge A heißt *ergänzungstheoretisch kleiner* bzw. *größer* als B, wenn A eine echte Teilmenge von B bzw. B eine echte Teilmenge von A ist. Während nun eine endliche Menge A, die *ergänzungstheoretisch* kleiner oder größer als eine andere endliche Menge B ist, immer auch *relationstheoretisch* kleiner bzw. größer ist als B, fallen diese Arten des Größenvergleichs im Unendlichen erstaunlicherweise auseinander: Für eine unendliche Menge A kann eine *ergänzungstheoretisch* kleinere oder größere Menge *relationstheoretisch* die gleiche Größe wie A haben.
Beispiel: Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist ergänzungstheoretisch um ein Element größer als die Menge $\mathbb{N}^*$ der natürlichen Zahlen ohne Null – relationstheoretisch sind beide gleich groß.



Der Satz von Cantor und seine philosophisch-theologische Konsequenzen

Die Potenzmenge P(M) *einer Menge* M *ist stets relationstheoretisch größer als* M. Dieser auf eine Arbeit Cantors aus dem Jahre 1890 zurückgehende sog. „Satz von Cantor“ ist für endliche Mengen sofort einsichtig, aber für unendliche Mengen hat sich im letzten Abschnitt gezeigt, dass größer aussehende Mengen dennoch relationstheoretisch gleich groß sein können. Dass P(M) also auch im unendlichen Fall relationstheoretisch größer als M ist, ist anschaulich nicht evident, man benötigt also einen Beweis. Hierzu nehmen wir an, was wir widerlegen wollen: dass es eine Bijektion zwischen M und P(M) gibt. Die Zuordnungen dieser Bijektion könnten etwa wie folgt aussehen:



Wir führen dies ad absurdum, indem wir eine Teilmenge T von M konstruieren, die rechts nicht aufgeführt ist. Die ersten Schritte der Konstruktion von T sind folgende:
1. Schritt: In der dem a zugeordneten Menge {b,c,d,e,f} ist a selbst *nicht* enthalten. Wir nehmen deshalb a in die zu konstruierende Menge T auf. Es ist also T = {a, …}, und so unterscheidet sich T durch das Beinhalten des Elements a von der Menge {b,c,d,e,f}.
2. Schritt: In der dem b zugeordneten Menge {a,b} ist b enthalten. Wir nehmen deshalb b *nicht* in die zu konstruierende Menge T auf. Unser T hat also immer noch die Gestalt {a, …} und unterscheidet sich durch das Nicht-Beinhalten von b von der Menge {a,b}.
3. Schritt: In der dem c zugeordneten leeren Menge {} ist c *nicht* enthalten. Wir nehmen deshalb c in die zu konstruierende Menge T auf. T hat nun die Gestalt {a,c, …} und unterscheidet sich durch das Beinhalten des Elements c von der leeren Menge usw.
So erhalten wir offensichtlich eine unendliche Teilmenge T, die von *allen* links aufgeführten Teilmengen verschieden ist. Dieser Widerspruch beweist den Satz von Cantor, q.e.d.
Die erste philosophische Konsequenz aus dem Satz von Cantor ist nun die für die *Ontologie* bedeutsame Tatsache, dass es unendliche viele, qualitativ verschiedene Stufen des Unendlichen gibt. Näherhin stellt sich heraus, dass die mit der Menge ℕ der natürlichen Zahlen gleichmächtigen Mengen auf der tiefsten Stufe des Unendlichen liegen. Hierzu gehören auch die Menge ℤ der ganzen Zahlen und die Menge ℚ der Bruchzahlen. Man spricht diesen Mengen die Stufe der sog. *abzählbaren Unendlichkeit* zu. Nach dem Satz von Cantor existiert darüber eine höhere Stufe des Unendlichen, welcher die Potenzmenge P(ℕ) und die damit gleichmächtigen Mengen angehören: Hierzu gehören die Menge ℝ der reellen Zahlen, die Menge ℂ der komplexen Zahlen und auch alle sog. kontinuierlichen Mengen (Strecken, Geraden, Ebenen, sowie der ganze Raum). Diesen Mengen spricht man die *kontinuierliche Unendlichkeit* zu. Wieder nach dem Satz von Cantor

existiert eine noch höhere Stufe des Unendlichen, welcher die Potenzmenge $P(P(\mathbb{N}))$ und alle mit dieser Menge gleichmächtigen Mengen angehören. Hierzu gehören die Menge aller sog. reellen und komplexen Funktionen; man spricht daher von *funktionaler Unendlichkeit* usw. Über all diesen unendlich vielen Stufen der Unendlichkeit liegen schließlich die Unmengen.
Der Satz von Cantor hat nun des Weiteren eine Konsequenz für die *metaphysische Psychologie*, die Lehre vom Wesen des Menschen. Dass es keine größte Menge gibt, bedeutet ja, wenn wir unsere Interpretation der Mengen als mögliche Formen menschlichen Denkens zugrunde legen, dass es zu jedem Akt menschlichen Denkens, in dem wir eine Vielheit zu einer Einheit zusammenfassen, stets einen weiteren Erkenntnisakt derselben Art gibt, dessen Inhalt noch umfassender ist als der des ersten. *Unsere Erkenntnis ist daher grundsätzlich stets erweiterungsfähig*. Das aber heißt zweierlei: Wir erreichen nie Allwissenheit, aber wir können die Grenzen unseres Wissens immer wieder überschreiten. Beides zusammen heißt: *Menschliches Erkennen ist potentiell unbegrenzt* (wobei man als potentiell unbegrenzt eine stets begrenzte Quantität bezeichnet, die sich aber ohne Ende vergrößern lässt, während das aktual Unbegrenzte eine tatsächlich grenzenlose Quantität meint).

Das Reflexionsprinzip und sein theologischer Hintergrund

Das *Reflexionsprinzip* wurde von Azriel Levy 1960 als ein Fundamentalaxiom vorgeschlagen, aus dem sich die Existenz hochgradig unendlicher Mengen ableiten lässt. Es lautet in vereinfachter Form: *Zu jeder begreifbaren Eigenschaft einer Unmenge gibt es stets auch eine Menge, welche diese Eigenschaft ebenfalls hat.* Mit diesem Prinzip kann man die Existenz von zahlreichen unendlichen Mengen ableiten, die einer Unmenge in verschiedener Weise ähnlich sind, und daher eine exorbitante Größe haben können. Als Beispiel betrachte man den folgenden Existenzsatz: *Es gibt eine Menge mit der Eigenschaft, dass sie unendlich viele Mengen enthält, und mit jeder ihrer Mengen M stets auch deren Potenzmenge* $P(M)$ *als Element enthält.* Beweis: Die *Unmenge* $\mathbb{D}$ hat diese Eigenschaft, weil $\mathbb{D}$ alle Mengen schlechthin enthält. Per Reflexionsprinzip gibt es also auch eine *Menge* mit derselben Eigenschaft, q.e.d.
Allerdings muss man bei der Anwendung des Reflexionsprinzips vorsichtig sein: Zum Beispiel hat die Unmenge $\mathbb{D}$ die Eigenschaft, „größer als jede Menge“ zu sein. Daraus darf man nicht schließen, dass es auch eine Menge gäbe, die größer als jede Menge ist (was ja ein Widerspruch wäre). Was hat man hier falsch gemacht? Das Reflexionsprinzip spricht von *begreifbaren* Eigenschaften. Es gibt also Eigenschaften, auf die das Reflexionsprinzip nicht angewendet werden darf: Diese heißen dann *nicht begreifbar*. Dabei handelt es sich um Eigenschaften einer Unmenge, welche für die inkonsistente Unendlichkeit der Unmenge *charakteristisch* sind, und daher nicht wirklich „begriffen“ werden können. Die Eigenschaft, „größer als jede Menge zu sein“ ist ein Beispiel hierfür.
Wie lässt sich das Reflexionsprinzip plausibel machen? Eine Unmenge ist inkonsistent unendlich und daher für unser Denken nicht adäquat begreifbar. *Wenn* wir also eine Eigenschaft einer Unmenge begreifen, kann man davon ausgehen, dass es sich nicht um eine *exklusive* Eigenschaft von Unmengen handelt, sondern um eine solche, welche die Unmenge mit mindestens einer Menge gemeinsam hat. Zu diesem Prinzip gibt es eine bemerkenswerte Parallele in der Theologie. So sagt Papst Gregor der Große (um 540 – 604), um die unendliche Erhabenheit Gottes auszudrücken: *„Was immer nun von geschaut wird, ist noch nicht er selbst, sondern ist etwas unterhalb von ihm“*.
In dieser Analogie entspricht dem theologischen Gottesbegriff der Unmengenbegriff, insbesondere der Begriff der Klasse $\mathbb{D}$ aller Dinge, der sog. Allklasse. In der Tat steht die Allklasse $\mathbb{D}$ mit dem Gottesbegriff in so enger Beziehung wie kaum ein anderer unserer Begriffe: $\mathbb{D}$ ist eine Art Repräsentation des göttlichen Wesens. Zwar muss man einschränkend sagen, dass die Allklasse nicht direkt Gott ist: Denn Gott ist ja ein Individuum und keine Klasse. Aber Gott muss als Allwissender die Allklasse verstandesmäßig vollkommen erfassen, so dass diese Klasse als der

wesentliche *Inhalt des göttlichen Verstandes* bezeichnet werden kann, derart dass ein vollständiges Begreifen der Allklasse einem Begreifen Gottes gleichkäme. Das Reflexionsprinzip der modernen Mengenlehre kann daher als ein eigentlich „theologisches“ Prinzip bezeichnet werden.

Literatur

Levy, Azriel, *Principles of reflection in axiomatic set theory*. In: Fundamenta Mathematica 49(1960) S. 1–10.

Neidhart, Ludwig, *Unendlichkeit im Schnittpunkt von Mathematik und Theologie*. Göttingen 2007.

Zermelo, Ernst, *Georg Cantor. Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Berlin: Springer, 1932.