

Einführung in die formale Logik

Eine für den Buchdruck verbesserte aufgearbeitete Version dieses Skripts ist die gleichnamige Publikation
Neidhart, Ludwig, *Einführung in die formale Logik*, Neukirchen-Seelscheid: Editiones Scholasticae, 2020

1. Grundlagen (Logische Propädeutik)	2
1.1. Einordnung der Logik in die Philosophie.....	2
1.2. Wesen der Logik.....	2
1.3. Geschichte / Epochen der Logik.....	2
1.4. Beispiele für logische Argumente.....	4
1.5. Logische Trugschlüsse.....	6
1.6. Aussagen, Urteile und Sachverhalte.....	7
1.7. Aussagen und Sätze.....	7
1.8. Variablen, ihre Belegung und Ersetzung.....	7
1.9. Variablenbelegung, Konstantenbewertung und Interpretation von Ausdrücken.....	7
1.10. Aussage, Aussageform und Formel.....	7
1.11. Tautologie (Allgemeingültigkeit), Kontradiktion (Unerfüllbarkeit) und Erfüllbarkeit.....	8
1.12. Äquivalenz, Implikation und andere logische Verhältnisse.....	8
1.13. Kennzeichnung, Kennzeichnungsform und Term.....	8
1.14. Offene und geschlossene Ausdrücke.....	9
1.15. Freie und gebundene Variablen.....	9
1.16. Fusion von Termen und Formeln und das Ersatzobjekt.....	9
1.17. Sprachen verschiedener Stufe.....	10
1.18. Klammern und andere Maßnahmen zur Vermeidung vieldeutiger Ausdrücke.....	10
1.19. Begriffe.....	11
1.20. Äquivok, univok und analog.....	12
1.21. Kategorien.....	12
1.22. Urteile und verschiedene Arten wahrer Urteile.....	13
1.23. Analytisch & synthetisch im Zusammenhang mit apriorisch & aposteriorisch.....	13
1.24. Bedeutungstheorien.....	14
1.25. Definitionen.....	14
1.26. Wahrheitstheorien.....	17
1.27. Das Kontradiktionsprinzip.....	17
1.28. Warum gilt das Kontradiktionsprinzip?.....	17
1.29. Über die dem Kontradiktionsprinzip zugrundeliegende logische Intuition.....	18
1.30. Paradoxien / Antinomien.....	18
2. Gleichheitslogik	21
2.1. Die eigentliche Gleichheitslogik.....	21
2.2. Exkurs: Die Bedeutung von „ist“ / „sein“.....	23
3. Grundlagen der modernen Klassen- bzw. Mengenlehre	24
4. Syllogistik	28
5. Aussagenlogik	32
6. Prädikatenlogik	41

1. Grundlagen (Logische Propädeutik)

1.1. Einordnung der Logik in die Philosophie

Die Stoiker (ca. 300 v. Chr. – 200 n. Chr.) teilten die Philosophie in die drei Teile ein:

Logik (Reflexion über das Denken), Physik (Reflexion über das Sein) und Ethik (Reflexion über das Sollen).

1.2. Wesen der Logik

a) Wortherkunft: Logik kommt von „Logos“ (griech. Wort, Vernunft, vernunftgemäße Rechtfertigung).

b) Inhaltliche Bedeutung: Die Logik zielt darauf ab, die *abstrakte Struktur unbestreitbarer Schlussfolgerungen aus vorausgesetzten Sachverhalten* zu beschreiben. Zwei gewissermaßen gegensätzliche Folgen sind: Die Logik ist einerseits *universell* (alle wissenschaftlichen Sätze sind Fallbeispiele der Logik) und sie ist *trivial* (sagt nur Selbstverständliches). Zum zweiten Aspekt (und zugleich zur völligen Abstraktheit logischer Sätze) vgl. Ludwig Wittgenstein (1889-1951): „Alle Sätze der Logik sagen aber dasselbe. Nämlich nichts.“¹ Ähnlich sagt Bertrand Russell (1872-1970) über die Mathematik, die er als Teilgebiet der Logik betrachtet: Wir können sie „definieren als das Gebiet, auf dem wir nie wissen, wovon wir eigentlich reden.“²

Umstritten ist die Frage nach dem Wesen der logischen Gesetze: Sind es *Gesetze des Seins* (ontologische Auffassung), *Gesetzen des Denkens* (psychologische/mentalistische Auffassung) oder *Gesetze der Sprache* (sprachliche Auffassung)? Im ersten Fall wären logischen Gesetze objektive, zeitlos gültige Ideen, die entweder außerhalb jedes Verstandes oder im ewigen Versand Gottes auffindbar sind; im zweiten Fall könnten sie natürliche Konstruktionen des menschlichen Verstandes sein; im dritten Fall wäre es auch möglich, in ihnen völlig willkürliche Sprachkonventionen zu erblicken.

1.3. Geschichte / Epochen der Logik

Erste Epoche (ca. 350 v. Chr. bis 1660 n. Chr.):

In dieser Epoche herrschte die ontologische Auffassung vor: Die Logik erforscht Seinsgesetze.

Als Begründer der Logik überhaupt gilt **Aristoteles** († 322 v. Chr.). Vorläufer waren aber schon sein Lehrer **Platon** († 348/7 v. Chr.) und dessen Lehrer **Sokrates** († 399 v. Chr.), der mit seiner dialektischen Gesprächsführung die Sophisten zu bekämpfen versuchte, die alle logischen Regeln missachteten.³ Neben und vor Aristoteles hat auch bereits ein anderer Sokrates-Schüler, **Euklid von Megara** (um † 380 v. Chr.) und dessen Schule Ansätze einer Logik entwickelt; die Schüler dieses Euklid heißen **Megariker** oder **Eristiker** und später **Dialektiker**; zu ihnen gehörte **Eubulides von Milet** (um 350 v. Chr.), der das Lügner-Paradoxon formulierte (siehe Abschnitt 1.30). Aristoteles' Logik ist der reife Niederschlag dieser Versuche zur Überwindung des Sophismus und verwandter anti-logischer Philosophien.⁴

Die Schriften, in denen Aristoteles seine Logik entwickelt, fasst man als aristotelisches „Organon“ (griech. Werkzeug) zusammen (Logik ist „Werkzeug“ des philosophischen Argumentierens). Diese Schriften teilen die Logik der ersten Epoche ein:

1. Die *Kategorienschrift* (über die Bestandteile der Sätze bzw. Aussagesätze, siehe Abschnitt 1.21)
2. *De Interpretatione* (über Aussagesätze),
3. *Analytica Priora* (über das gültige Schließen - Kern der aristotelischen Logik: die sog. „Syllogistik“, siehe Kap. 4),
4. *Analytica Posteriora* (über den wissenschaftlichen Beweis)
5. *Topica* (über Wahrscheinlichkeitsschlüsse - „Dialektik“ = Argumentationslehre, disputative Gesprächsführung),
6. *De Sophisticis Elenchiis* (über Trugschlüsse; siehe Abschnitt 1.5)

In Spätantike und Mittelalter wurde diese Logik vor allem durch die „Einführung“ (*Isagoge*) in die aristotelische Logik des Neuplatonikers **Porphyrius** († 301/5 n. Chr.; siehe unten S. 15) einem breiten Leserkreis bekannt, ein Buch, das trotz der Christentumsfeindlichkeit seines Autors im christlichen Mittelalter zu einem Standardlehrbuch der Logik wurde.

Weiterentwickelt wurde diese Logik hauptsächlich

- in der antiken *stoischen Logik*, vor allem durch **Chrysippos von Soloi** († 208 v. Chr.), auf den die ersten Ansätze der modernen Aussagelogik zurückgehen,⁵
- in der *mittelalterlichen Logik*, welche die ersten drei der „sieben freien Künste“ umfasste, die jeder mittelalterliche Gelehrte studieren musste, das sog. Trivium (Grammatik, Dialektik, Rhetorik), von dem der Begriff „trivial“ abgeleitet wird, und auf welches das sog. Quadrivium (Arithmetik, Geometrie, Musik, Astronomie) folgte.⁶

¹ Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus* (1921) 5.43.

² Russell, *Mathematics and the Metaphysicians*, in: *Mysticism and Logic and other essays*, London: Allan & Unwin, 2. Aufl. 1917, 8th Impression 1949, S. 75.

³ Die Sophisten (z.B. der Nihilist Gorgias: „es gibt nichts“; der Subjektivist Protodoras: „das Maß aller Dinge ist der Mensch“; Thrasymachos: „Gerechtigkeit ist der Nutzen des Stärkeren“) stellten die Objektivität von Wahrheiten, insbesondere den Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch und damit die Grundlagen der Logik in Frage. Sie erteilten gegen Bezahlung Rhetorikunterricht und behaupteten, jede beliebigen Satz plausibel machen zu können. Zum Beispiel rühmte sich der Sophist Dionysodor, einem Gesprächspartner weismachen zu können, dass sein Vater ein Hund sei: Hast du einen Hund? – Ja. – Hat er Junge? – Ja. – Er ist also ihr Vater? – Ja. – Also ist dir ein Hund Vater und du bist der Bruder der jungen Hunde (so in Platons Dialog *Euthydemos*).

⁴ Vgl. den Gründer der Kyniker-Schule, den Sokrates-Schüler Antisthenes († um 365 v. Chr.) mit seiner Behauptung: „Es ist unmöglich, etwas Wesentliches zu sagen“. Begründung: A = A ist wahr, aber unbedeutend (nicht wesentlich). A = B ist bedeutsam, aber falsch, denn A ist nicht B. Auflösung dieses Einwandes: Das „ist“ bedeutet bei bedeutsamen Aussagen „A = B“ nicht dasselbe wie „ist in jeder Hinsicht genau dasselbe wie“.

⁵ Der Philosophiehistoriker des 3. Jahrhunderts, Diogenes Laertius, schreibt in seinem Buch „Über Leben und Lehre der Philosophen“ (7,7,180) über Chrysipp: „In der Dialektik brachte er es zu solchem Ruhm, dass man allgemein sagte, wenn die Götter es mit der Dialektik zu tun hätten, so wäre dies keine andere Dialektik als die des Chrysipp.“

⁶ Wichtige Logiker des Mittelalters sind **Boëthius** († 524), **Alkuin** († 806), **Johannes Scotus Eri(u)gena** († um 877), **St. Anselm von Canterbury** († 1109), **Petrus Abaelardus** († 1142), **Gilbert de la Porrée** († 1154), **Johannes von Salisbury** († 1180), **Averroës** († 1189), **St. Thomas von Aquin** († 1274), **Petrus von Spanien** (= später Papst Joh. XXI., † 1277), **Sel. Johannes Duns Scotus** († 1308), **Sel. Raimund Lullus** († 1315), **Wilhelm von Ockham** († 1349), **Johannes Buridan** († 1360), **Albert von Sachsen** († 1390)

Zweite Epoche (ca. 1660 – 1880):

In dieser Epoche herrschte die psychologische/mentalistiche Auffassung vor: Logik erforscht Denkgesetze, sie ist die „Lehre vom richtigen Denken“ und wird eingeteilt in:

1. die Lehre vom Begriff (siehe Abschnitt 1.19),
2. die Lehre vom Urteil (siehe S. 11),
3. die Lehre vom Schließen (siehe Kap. 4).
4. Als Anhang kommt hinzu eine Methodenlehre, eine Anleitung zur *Kunst der Wahrheitsfindung*, die „ars inveniendi“ (gegenüber der klassischen Logik als einer bloßen *Kunst der Wahrheitsbegründung*).

Einen solchen „innovativen“ Teil der Logik hatte schon *Francis Bacon* in seinem „*Novum Organon*“ (1620) bereitstellen wollen, wie auch vor ihm schon *Raimundus Lullus* († 1315), und später *Leibniz* († 1716) sowie *John Stuart Mill* († 1873) mit seiner induktiven Logik.

Als Gründungsdokument dieser mentalistischen Logik gilt die „Logik von Port-Royal“ (1662), verfasst von den Jansenisten *Antoine Arnauld* († 1694) und *Pierre Nicole* († 1695) unter mutmaßlicher Beteiligung von **Blaise Pascal** († 1662). In dieser Tradition stehen die Philosophen des Deutschen Idealismus, vor allem *Kant* († 1804), der von einer „transzendentalen Logik“ spricht (die eine Logik des Denkens sei, im Gegensatz zur formalen Logik des Schließens), und *Hegel* († 1831), aber auch noch Logiken, die in der dritten Epoche verfasst wurden, wie z.B. die Logik des Phänomenologen *Alexander Pfänder* († 1941).

Dritte Epoche (ca. 1880 bis heute):

Es herrscht die sprachliche Auffassung vor: Der Logiker betrachtet und erfindet formale Kunstsprachen, um logische Folgerungen möglichst eindeutig darstellen zu können, Hand in Hand damit geht die Entwicklung einer formalen mathematischen Logik. Da man demgemäß die Logik als Sprachspiel oder Zeichenlehre („Semiotik“) auffassen kann, kann man sie unterteilen in

1. Syntax – Lehre von der Zusammenstellung der Zeichen (Bezug der Zeichen zu den Zeichen),
2. Semantik – Bedeutung der Zeichenreihen (Bezug der Zeichen zu den Dingen, d.h. den bezeichneten Objekten),
3. Pragmatik – Gebrauch der Zeichenreihen (Bezug der Zeichen zu den Benutzern und ihrem lebensweltlichen Kontext).

Der Unterschied wird auch durch verschiedene Arten des Unsinnns deutlich:⁷

syntaktischer Unsinn: „Cäsar ist und“

semantischer Unsinn: „farblose grüne Ideen schlafen wütend“

pragmatischer Unsinn: „Ich taufe dieses Kind auf den Namen 2704“

Man verbindet in dieser Epoche die sprachliche Auffassung manchmal (auf der semantischen Ebene) auch wieder mit der Seinsauffassung der ersten Epoche, wendet sich aber vom „Psychologismus“ der zweiten Epoche eher ab (den Abschied vom Psychologismus forcierte besonders *Edmund Husserl* († 1938) in seinen „logischen Untersuchungen“).

Die erste Logik dieser Art im eigentlichen Sinn wurde 1879 in der sog. „Begriffsschrift“ des Mathematiker-Philosophen **Gottlob Frege** († 1925) verfasst, im Interesse einer exakten logischen Darstellung und Ableitung der Arithmetik. Zuvor gab es allerdings markante Vorläufer: als Vorläufer der modernen Aussage- und Klassenlogik kann *George Boole* († 1864) gelten; Vorläufer der modernen Gleichheits- und Modallogik war *Leibniz* († 1617). Wichtige klassische Beiträge zur modernen mathematischen Logik nach Frege stammen von *Charles Sanders Peirce* († 1914), *Bertrand Russell* († 1970), *Willard Van Orman Quine* († 2000) und den philosophisch interessierten Mathematikern *David Hilbert* († 1943), *Alfred Tarski* († 1983) und vor allem *Kurt Gödel* († 1978), der aufgrund seines Vollständigkeits- und Unvollständigkeitssatzes als „größter Logiker seit Aristoteles“ gefeiert wurde. In der modernen Sprachphilosophie arbeitet man verstärkt daran, die Logik unter Beibehaltung ihrer Exaktheit auf nichtmathematische Gebiete auszudehnen. Nachdem der logische Positivismus in den 1920er und 1930er Jahren (vertreten etwa durch *Ludwig Wittgenstein*, † 1951, und *Rudolf Carnap*, † 1970) versucht hatte, aus der Alltagssprache alle mit der klassischen Logik nicht erfassbaren Inhalte zu entfernen, geht heute das Bestreben eher umgekehrt dahin, nach und nach den ganzen Reichtum der Alltagssprache formal-logisch angemessen wiederzugeben (Modallogik, Temporale Logik, Konditionale Logik & Relevanzlogik, Epistemische & Doxastische Logik, Deontische Logik, Interrogativlogik, mehrwertige Logik, Fuzzylogik, Intuitionistische Logik, Quantenlogik etc.).⁸

⁷ Vgl. Zoglauer, Einführung in die formale Logik, S. 13.

⁸ Wichtige Logiker, welche die Erweiterung der formalen Logik auf nichtmathematische Gebiete voranbrachten, sind für die Modallogik nach *Leibniz* vor allem *Clarence Irving Lewis* († 1964) und *Saul Kripke* (*1940), für die Temporale Logik *Arthur Prior* († 1969), für die Konditionale Logik *Robert C. Stalnaker* (* 1940) und *David Kellogg Lewis* († 2001), für die Epistemische/Doxastische Logik und Interrogativlogik *Jaakko Hintikka* (*1929), für die Deontische Logik *Ernst Mally* († 1944) und *Georg Henrik von Wright* († 2003), für die Mehrwertige Logik *Jan Łukasiewicz* (1956) für die Fuzzylogik *Lotfi Zadeh* (*1921).

1.4. Beispiele für logische Argumente

Logische Argumente (= Schlüsse, Beweise) bestehen aus einer oder mehreren *Prämissen (Voraussetzungen)* und einer *Konklusion (Schlussfolgerung)* und heißen *korrekt (gültig, valid)* wenn aus den Prämissen unabwendbar die Schlussfolgerung folgt. Doch auch bei einem korrekten Argument kann die Schlussfolgerung falsch sein. Damit sie „wahr ist“ (synonym: „gilt“, „erfüllt ist“), ist zweierlei erforderlich: (1) dass das Argument korrekt ist (= formal-logischer Teil des Arguments) und (2) dass alle Prämissen wahr und die dort vorkommenden Ausdrücke im selben Sinn verwendet werden (nichtlogischer, inhaltlicher Teil des Arguments). Erfüllt ein Beweis beide Erfordernisse, nennt man ihn *stichhaltig (engl.: sound)* und spricht von einem *beweiskräftigen* Argument. Die Prämissen können wieder durch Argumente bewiesen werden, die dann aber wieder andere Prämissen haben. In jedem Fall beruht jeder Beweis letztlich auf unbewiesenen Prämissen, die vorauszusetzen sind; diese heißen *Axiome* und müssen, wenn die ganze darauf aufbauende Beweiskette überzeugen soll, *unmittelbar evident* oder zumindest *glaubhaft* sein.

Beispiel 1:

(P1) Alle Hunde sind sterblich.

(P2) Fifi ist ein Hund.

(S) Fifi ist sterblich.

Dieses Argument ist korrekt (Syllogismus „Barbara“ mit singulärem Term): Denn die Folgerung (S) muss wahr sein, wenn (P1) und (P2) wahr sind. Aber die Folgerung kann trotzdem falsch sein, wenn (P1) oder (P2) falsch ist. Für die Korrektheit des Schlusses ist es belanglos, was „Hunde“, „Fifi“ und „sterblich“ ist. In der formalen Logik verzichtet man daher auf konkreten Inhalte und ersetzt „Hund“, „Fifi“ und „sterblich“ durch Symbole wie H,F,s oder A,B,C oder x,y,z. Man bekommt dann die logische Schlussweise als solche:

(P1) Alle H sind s.

(P2) F ist ein H.

(S) F ist s.

Dies ist korrekt, egal was man für H,F,s einsetzen mag. Für die Stichhaltigkeit des Arguments und somit für die Wahrheit von (S) ist es hingegen sehr wichtig, was H,F,s ist, weil davon die Wahrheit der Prämissen abhängt.

Beispiel 2a:

(P1) Füchse haben einen roten Schwanz.

(P2) Sokrates ist ein Fuchs.

(S) Sokrates hat einen roten Schwanz.

Beispiel 2b:

(P1) Hamburg ist eine deutsche Stadt.

(P2) *Eine deutsche Stadt* ist eine Folge von drei Worten.

(S) Hamburg ist eine Folge von drei Worten.

Diese Argumente sind korrekt. Auch sind die Prämissen wahr. Die Schlussfolgerungen sind aber falsch, weil das „Fuchs“ bzw. „eine deutsche Stadt“ im verschiedenem Sinn gebraucht wird. Man nennt diesen Fehlschluss eine „Quaternio Terminorum“ (Vervierfachung der Terme im Syllogismus, d.h. Vieldeutigkeit des sog. Mittelbegriffs), Spezialfall einer sog. Äquivokation (Begriffsvieldeutigkeit, siehe Abschnitt 1.20).

Beispiel 3:

(P) $10 = 15$.

(S) $10 + 1 = 15 + 1$ (d.h. $11 = 16$).

Der Schluss ist korrekt („Gleiches zu Gleichem addiert ergibt Gleiches“), die Folgerung aber falsch, da die Prämisse falsch ist.

Beispiel 4:

(P) Schafwolle *ist* nicht bunt.

(S) Man *soll* keine Wolle färben.

(Argument der stoischen Ethik)

Dies ist kein korrektes Argument, sondern der berühmte *naturalistische Fehlschluss* (Schluss vom Sein auf das Sollen).

Beispiel 5:

(P1) Die Existenz des Körpers ist bezweifelbar.

(P2) Die Existenz des Ich ist nicht bezweifelbar.

(S) Das Ich ist vom Körper verschieden.

(Argument von René Descartes († 1650) für die Existenz der Seele, die er mit dem „denkenden Ich“ gleichsetzt)

Dies ist eine korrekte Schlussweise der Gleichheitslogik („wenn a eine Eigenschaft hat, die b nicht hat, folgt $a \neq b$ “). Die Prämisse (P1) begründet Descartes mit dem Traumerlebnis, (P2) hält er für evident („Ich denke, also bin ich“), und so ist das Argument für ihn stichhaltig. Ein Gegner des Arguments müsste versuchen, eine dieser Prämissen zu leugnen.

Beispiel 6:

(P1) Alles existierende ist messbar.

(P2) Keine Seele ist messbar.

(S) Keine Seele existiert.

(Argument von Rudolf Virchow († 1902) gegen die Existenz einer Seele)

Diese Schlussweise (dem syllogistischen Schluss „Camestres“ nachgebildet) ist korrekt. Prämisse (P2) steht hinter dem berühmten Satz Virchows, mit dem er die Existenz einer Seele ablehnte: „Ich habe viele Leichen seziiert und keine Seele gefunden“. Prämisse (P1) ist die These des Physikalismus („es gibt nichts, was man nicht ‚messen‘, d.h. mit physikalischen Mitteln feststellen, kann“). Diese These ist zwischen Befürwortern und Gegnern des Physikalismus umstritten, weshalb auch die Stichhaltigkeit der Schlussfolgerung, obwohl korrekt, bestreitbar ist.

Beispiel 7a:

(P) Der Glaube an Gott und die unsterbliche Seele lähmt
den Kampf für die Verbesserung der irdischen Zustände. (marxistisch inspirierte Religionskritik)

(S) Es gibt weder einen Gott noch eine unsterbliche Seele.

Die Prämisse findet man in verschiedenen marxistischen Aussagen wie „Religion ist Opium des [oder für das] Volk“, der Glaube an ein Weiterleben nach dem Tod ist „Jenseitsvertröstung“ etc. Sie wird von gläubigen Philosophen bestritten, die den Glauben gerade als Inspiration, Motivation oder unabdingbare Voraussetzung für riskante Einsätze im Kampf für die Gerechtigkeit ansehen. – Aber unabhängig davon ist der Schluss nicht stichhaltig, weil er nicht korrekt ist: Aus dem, was gut oder schlecht für eine gerechte Sache ist, lässt sich nichts darüber folgern, was der Fall ist. Es handelt sich um die Konversion (Umkehrung) des naturalistischen Fehlschlusses (Beispiel 4): den Schluss vom Nichtsollen auf das Nichtsein (A ist nicht gut, d.h. soll nicht sein => A ist nicht). Dieser Fehler steckt auch in Friedrich Nietzsches Anti-Gottesbeweis: „Wenn es Götter gäbe – wie hielte ich’s aus, kein Gott zu sein! ... Also gibt es keine Götter“.⁹ Das heißt, auf die Logik heruntergebrochen:

Beispiel 7b:

(P) Ich empfinde es als unangenehm, wenn es Götter gäbe. Friedrich Nietzsche († 1900)

(S) Also gibt es sie nicht.

Beispiel 8:

(P1) Jedes Naturstreben ist erfüllbar.
(P2) Der Mensch strebt von Natur aus nach Unsterblichkeit (Argument u.a. von Fichte († 1814)
(S) Dieses menschliche Naturstreben ist erfüllbar. für die Unsterblichkeit)

Prämisse (P1) wird durch biologische Fakten gestützt: Es gibt keine (natürliche!) Sehnsucht nach Nichtexistentem. Prämisse (P2) wird von manchen in Zweifel gezogen oder bestritten.

Beispiel 9:

(P1) In der Natur bleibt alles erhalten; Wandel ist lediglich Zerfall in die Bestandteile und neue Zusammensetzungen aus diesen.
(P2) Seelen sind (als Persönlichkeitskerne) unteilbare „Individuen“. (Argument u.a. von Leibniz († 1716)
(S) Die Seelen bleiben als solche erhalten. für die Unsterblichkeit)

(P1) ist ein Erhaltungssatz der Physik, unklar ist aber, ob er auf die Welt des Geistes übertragbar ist und ob er auch metaphysisch notwendig ist. (P2) kann ich auf die „Ich“-Erfahrung berufen, ist aber ebenfalls Gegenstand von Kontroversen.

Beispiel 10:

(P1) Das eigene Vernichtet-Sein ist für das Ich unerlebbar.
(P2) Alles, was dem Ich widerfahren kann, muss erlebbar sein. (Argument von Neidhart im Anschluss u.a. an
(S) Das Ich kann nicht vernichtet werden. Gabriel Marcel († 1973))

Prämisse (P1) ist unbestreitbar (Epikur, Brief an Menoikeus, 125: „Der Tod, hat für uns keine Bedeutung; denn solange wir noch da sind, ist der Tod nicht da; stellt sich aber der Tod ein, sind wir nicht mehr da“; auch nach Cicero, Tusculanae Disputationes 1,18 geht uns der Tod nichts an, denn die Lebenden „berührt er nicht“ und die Toten „sind nicht“).

Prämisse (P2) ergibt sich aus der Definition des Ich als dem Bewusstseinsstrom in der Innenwelt des Erlebens, unterschieden vom Körper in der Außenwelt.

Übung 1: Formalisieren Sie logisch (1) ein teleologisches bzw. (2) kosmologisches bzw. (3) ontologisches Argument für die Existenz Gottes (das teleologische schließt von der unwahrscheinlich komplexen Ordnung in der Welt auf einen intelligenten Ordner; das kosmologische von der Veränderung auf eine erste Ursache; das ontologische vom Begriff des allvollkommenen Gottes auf seine Existenz). Formalisieren Sie auch (4) ein physikalistisches Argument für die Nichtexistenz Gottes und (5) ein Argument für die Nichtexistenz Gottes, das von der Tatsache des Bösen in der Welt ausgeht.

Die Musterlösung dieser und aller weiteren Übungen werden extra ausgegeben.

⁹ Also sprach Zarathustra, Teil 2, Kap. 2 („Auf den glückseligen Inseln“).

Beispiel einer halbformalen logischen Argumentation aus der zeitgenössischen Religionsphilosophie:

William Hasker (* 1935) argumentiert für die These des „Offenen Theismus“ (dass Gott die Zukunft nicht kennt) wie folgt:

1. Es ist jetzt wahr, dass Hasker morgen ein Käseomlett essen wird. (Prämisse: zukünftige Sachverhalte können wahr sein)
2. Gott weiß zu jeder Zeit alles Wahre & glaubt nichts Falsches. (Prämisse: Allwissenheit Gottes)
3. Gott glaubte schon immer, dass Hasker es morgen essen wird. (aus 1,2)
4. Niemand kann ändern, was Gott glaubte. (Prämisse: Feststehen der Vergangenheit)
5. Niemand kann ändern, dass Gott glaubte, dass Hasker es morgen isst. (aus 3,4)
6. Niemand kann ändern, dass Hasker es morgen essen wird. (aus 2,5)
7. Hasker kann es nicht unterlassen, morgen ein Käseomlett zu essen. (aus 6)
8. Nun ist Hasker aber im libertinären Sinn frei. (Prämisse: Freiheitserfahrung) Widerspruch zu 7.

Haskers anschließende Überlegung: Aufgrund des Widerspruchs ist eine der Prämissen aufzugeben. An 4 und 8 will er nicht rütteln. Man muss also entweder 1 verneinen (Zukünftiges ist noch nicht wahr) oder 2 modifizieren (Gott weiß alles wissbare Wahre, und Zukünftiges ist wahr, aber noch nicht wissbar). In beiden Fällen kennt Gott zukünftige freie Taten nicht, q.e.d.¹⁰

Haskers Gegner können 2 wie folgt modifizieren: Gott weiß zeitlos alles Wahre, nicht zu jeder Zeit (bes. nicht vor) dem Ereignis, oder könnten die Existenz Gottes ablehnen. Auch könnten sie 4 bestreiten (das Feststehen der Vergangenheit) oder auch 8 bestreiten (die libertinäre Freiheit).

1.5. Logische Trugschlüsse

Häufig begangene *logische Trugschlüsse / Argumentationsfehler* sind die folgenden (begeht man diese Fehler bewusst, spricht man von *Sophismen* – in Anlehnung an die Sophisten, vgl. Fußnote 3 – andernfalls von *Paralogismen*):

1. *Äquivokation (Verwendung mehrdeutiger Worte*; siehe Abschnitt 1.20), z.B. *Quaternio Terminorum in einem Syllogismus* (siehe Bsp. 2ab auf S. 4), oder *Fallacia accidentis (Vieldeutigkeit von „ist“: Eigenschaften einer Eigenschaft werden dem Eigenschaftsträger zugesprochen)*: „die Wand ist weiß, weiß ist eine Farbe, also ist die Wand eine Farbe“.
2. *Zirkelschluss (Petitio principii, Circulus vitiosus, Hysteron Proton, begging the question)*: Man setzt voraus, was zu beweisen ist. Bsp. Gott existiert, weil dies in der Bibel steht, und was in der Bibel steht ist, wahr, weil sie Gottes Wort ist.
3. *Naturalistischer Fehlschluss* vom Sein auf das Sollen/Gutsein (Bsp. 4, S. 4) oder vom Sollen/Ideal auf reales Sein (Bsp. 7ab, S. 5).
4. *Schluss vom faktischen auf das notwendige Sein* (ab esse ad necesse). Man schließt daraus, dass etwas ist (bzw. war bzw. sein wird) darauf, dass es notwendigerweise ist (bzw. war bzw. sein wird). Eine Unterart ist er *fatalistische Fehlschluss*: Dass morgen X passieren wird, ist entweder wahr oder falsch. In beiden Fällen steht die Zukunft schon fest, und wir sind unfrei. – Richtig schließt man: Wenn es wahr bzw. falsch ist, dass X geschehen wird, dann wird X geschehen bzw. nicht geschehen; aber über den *Modus* des künftigen Ereignisses (ob X aus *Freiheit* oder *gezwungenermaßen* geschehen bzw. nicht geschehen wird) lässt sich daraus (ohne Zusatzannahmen) nichts folgern.
5. *Intensionaler Fehlschluss*: In *intensionalen Kontexten* (wo die Rede ist von subjektiven Einstellungen, z.B. Wissen, Glauben, Fürchten; oder von *Normen* wie erlaubt/verboten; oder von Modalitäten wie notwendig/möglich) *darf man nicht Gleiches durch Gleiches ersetzen*. Bsp. Aus „Fritz = Franz“ und „NN. weiß, dass Fritz = Fritz ist“ folgt nicht: „NN. weiß, dass Fritz = Franz ist“.
6. *Post hoc, ergo propter hoc* (danach, also deshalb) oder *Cum hoc, ergo propter hoc* (mit diesem, also deswegen), zwei Fehlschlüsse vom zeitlichem Zusammenhang auf Ursächlichkeit oder Notwendigkeit: Bsp. Die Sonne geht auf, nachdem (und daher: weil) der Hahn kräht.
7. *Fallacia consequentis* (aus einem Wenn-Dann-Satz „wenn A, dann B“ wird fälschlich auf die Umkehrung geschlossen: „wenn B, dann A“ oder ebenso falsch auf „wenn nicht A, dann nicht B“, Letzteres ist der sog. *falsche Modus Tollens*; zum echten siehe Kap. 5). Bsp. „Wenn Peter läuft, bewegt er sich“, also: „wenn er sich bewegt, läuft er“, und „wenn er nicht läuft, bewegt er sich nicht“.
8. *Fallacia compositionis (Trugschluss der Komposition)*: Hat jeder Teil eine Eigenschaft, schließt man, dass dies auch für die Gesamtheit gilt, z.B.: Jede Blume ist schön, also auch der Strauß. Ein Trugschluss ist auch das Umgekehrte, die *Fallacia divisionis*: Die Fläche ist rot, also auch ihre Atome. Der Fehler ist die Identifikation von *Distriutivbedeutung (sensus divisus) & Kollektivbedeutung (sensus compositus)*.
9. *Unzulässige Quantorenvertauschung* oder *Quantorenschwindel*: Aus „für jeden ... gibt es ein ...“ folgert man fälschlich „Es gibt ein für jeden ...“, z.B. folgt aus „Für jeden Topf gibt es einen Deckel“ nicht: „Es gibt einen Deckel, der auf jeden Topf passt.“
10. *Falsche/imperfekte Disjunktion (falsches Dilemma)*: Man zählt Alternativen falsch oder unvollständig auf. Bsp.: Jedes Tier ist weiblich oder männlich; dieses ist nicht männlich, also weiblich (jedoch gibt es geschlechtslose Tiere).
11. *Metabasis eis allo genos* (Wechsel der Gattung, Grenzüberschreitung): Übertragung eines Beweises/Satzes von einem Gebiet (in dem er gilt) auf ein anderes (z.B. „alles ist relativ, das hat ja die Relativitätstheorie bewiesen“).
12. *Ignoratio elenchi (Unkenntnis der Streitfrage, „Thema verfehlt“)*: Man liefert einen nicht zur Behauptung passenden Beweis (Bsp. „Die Lehre der Sekte XY ist wahr: Denn viele ihr Beigetretenen sehen nun einen neuen Sinn in ihrem Leben“).
13. *Appelle an Emotionen*, z.B. *argumentum ad baculum (baculum=Ohrfeige)* („es kann nicht Ihr Ernst sein, dass ...“) oder *argumentum ad misericordiam (Mitleids-Appell)*: „Man muss X wenigstens darin Recht geben, dass ...“
14. *Argumentum ad ignorantiam (Berufung auf Unwissenheit)*. Eine These wird für falsch erklärt mit der Begründung, dass für sie kein Beweis vorliegt, z.B. „es gibt keine Außerirdischen, denn niemand hat sie gesehen“. Dagegen gilt: „the absence of evidence is not evidence of absence“. Dieser Fehlschluss heißt auch *a nescire ad non esse* (vom Nichtwissen auf das Nichtsein). Verwandt ist der *verifikationalistische (oder positivistische) Fehlschluss* aus der Nichtwahrnehmbarkeit/Nichtmessbarkeit auf Nichtexistenz und das *Argumentum ex silentio (aus dem Schweigen)*: aus der Nichterwähnung von X in historischen Quellen schließt man, dass X nicht geschehen ist, oder aus der Nichterwähnung einer Schrift A in einer Schrift B, dass der Autor von B die Schrift A nicht kannte und/oder A erst nach B's Tod verfasst wurde.
15. *Genetischer Fehlschluss*: Eine These wird nicht aufgrund inhaltlicher Kriterien, sondern wegen ihrer Herkunft oder mit Blick auf ihre Vertreter und Gegner gerechtfertigt oder verworfen. Es gibt mehrere Unterarten:
 - a. *Argumentum ad hominem*: Eine These wird durch Diskreditierung ihres Vertreters bestritten (P behauptet X, P ist aber unglaubwürdig, weil inkompetent oder böswillig, also ist X falsch).
 - b. *Argumentum ad verecundiam (falsches Autoritätsargument)*: Man beweist eine These damit, dass eine irrtumsfähige Autorität sie vertritt.
 - c. *Argumenten ad populum*: Berufung auf allgemeine Anerkennung („Heute behauptet niemand mehr, ...“)
 - d. *Tu quoque – Argument (Retorsion)*: Dem Gegner wird gezeigt, dass sein Vorwurf auch auf ihn selbst zutrifft.

Bemerkung: Die Schlüsse 14 und 15 sind nur falsch, wenn die Schlussfolgerung als *sicher* und nicht bloß als *wahrscheinlich* oder *relativ* glaubwürdig hingestellt wird. – Es gibt auch *Schlüsse, deren Korrektheit umstritten ist*, z.B. der *Schluss vom Denken auf das Sein* (gilt oder gilt nicht: „X ist nicht denkbar/vorstellbar => X kann nicht sein“?)

Übung 2: Formulieren Sie möglichst plausibel (a) einen genetischen Fehlschluss, (b) ein Argumentum ad ignorantiam oder ex silentio, (c) eine Fallacia compositionis (d) ein falsches Dilemma und (e) einen weiteren Fehlschluss ihrer Wahl.

¹⁰ q.e.d. (für „quod erat demonstrandum“, lat. was zu beweisen war) markiert das Ende eines Beweises. Dafür schreibt man auch w.z.b.w. oder □ oder ■.

1.6. Aussagen, Urteile und Sachverhalte

Die fundamentalsten Träger von Wahrheit oder Falschheit sind nach ontologischer Auffassung *Sachverhalte*,¹¹ nach mentalistischer Auffassung *Urteile* und nach sprachlicher Auffassung *Aussagen*, die man sich in der modernen Logik in geschriebener (nicht: gesprochener) Form vorstellt. Eine Aussage (sprachliche Ebene) drückt ein Urteil aus (gedankliche Ebene), dieses ist ein auf einen Sachverhalt gerichteter Gedanke (ontologische Ebene). Verschiedene Aussagen (z.B. in verschiedenen Sprachen) können dasselbe Urteil ausdrücken und verschiedene Urteile (z.B. verschiedener Personen) denselben Sachverhalt.

1.7. Aussagen und Sätze

Aussagen (engl. statements, lat. assertorische Sätze, griech. apophantische Sätze) gehören zur Klasse der Sätze. *Sätze* sind geschriebene oder gesprochene selbständige *Verständigungseinheiten*, ihre semantische Funktion besteht darin, dem Vernehmenden (dem Leser/Hörer) etwas zu verstehen zu geben. Sie setzen sich in der Regel aus verschiedenen *Bedeutungseinheiten* (Teilsätzen, Wörtern, Wortteilen) zusammen; die kleinsten selbständigen bedeutungstragenden Sprachsequenzen (mit inhaltlicher oder rein grammatischer Bedeutung) heißen *Morpheme* (z.B. enthält das Wort „ununterscheidbar“ vier Morpheme: „un“ „unter“ „scheid“ und „bar“; das Wort „Tische“ enthält zwei Morpheme: den Wortstamm „Tisch“ und das „e“ zur Bezeichnung des Plurals). In logischen Kunstsprachen ist im Unterschied zu Alltagssprachen *jedes Zeichen* ein Morphem.

Aussagesätze sind von *Frage-*, *Befehls-*, *Wunsch-*, und *Ausrufesätzen* zu unterscheiden, in denen Fragen, Befehle/Bitten, Wunsch und Gefühle zum Ausdruck kommen; sie sind auch von *performativen Sätzen* zu unterscheiden, die das Gesagte bewirken (z.B. „ich nehme dich zur Frau“, „hiermit verurteile ich Sie zum Tode“). Aussagesätze bringen demgegenüber (nur) einen bestehenden oder auch nicht bestehenden Sachverhalt behauptend zum Ausdruck; grammatisch haben sie also die Funktion von Behauptungs- oder Aussagesätzen.

Genauer gesagt ist eine *Aussage im logischen Sinn* ein im Rahmen der vorausgesetzten Sprache syntaktisch korrekt formulierter schriftlicher Aussagesatz, dem (1) in *eindeutiger* und (2) wenigstens im Zeitrahmen des logischen Diskurses in *unveränderlicher* Weise genau einer der beiden *Wahrheitswerte* (wahr, falsch) zukommt.

Dabei ist gleichgültig, ob der Wahrheitswert *objektiv vorgegeben* ist oder *durch willkürliche intersubjektive Vereinbarung* (im Rahmen eines logischen Diskurses) festgelegt wurde; ob er bekannt oder unbekannt, erkennbar oder unerkennbar ist.

Während im Zentrum der klassischen Logik Aussagen stehen, versuchen Logiker heute, auch andere Sätze mit einzubeziehen.

Beispiele für Aussagen: „Öl ist billig“ (sofern dies vereinbarungsgemäß eindeutig als wahr oder falsch bewertet wird).

- „Die Erde dreht sich um sich selbst“ (objektiv wahr für die Dauer des Diskurses – erkennbar a posteriori).
- „Jeder Schimmel ist weiß“ (zeitlos objektiv wahr – erkennbar analytisch a priori durch triviale Begriffsanalyse).
- „Es gibt unendlich viele Primzahlen“ (zeitlos objektiv wahr – erkennbar analytisch a priori durch Deduktion).
- „Wollen setzt Erkennen voraus“ (zeitlos objektiv wahr – erkennbar vielleicht synthetisch a priori).
- „In 100 Jahren stirbt die Menschheit aus“ (objektiv wahr oder falsch – auch wenn wir den Wahrheitswert nicht kennen).
- „zwei plus zwei ist fünf“ (zeitlos objektiv falsch – die Falschheit ist erkennbar analytisch a priori durch Deduktion).

Gegenbeispiele: „Carnap ist babig.“ (kein syntaktisch korrekter Satz).

- „Ist jemand hier?“ (syntaktisch korrekter Satz, der aus syntaktischen Gründen keinen Wahrheitswert haben kann).
- „Ich lüge jetzt.“ (syntaktisch korrekter Satz, dem kein *eindeutiger* Wahrheitswert zugeordnet werden kann).
- „X ist krank“ (syntaktisch korrekter Satz ohne eindeutigen Wahrheitswert, dem aber ein solcher gegeben werden könnte).

1.8. Variablen, ihre Belegung und Ersetzung

Eine *Variable* ist ein Zeichen, dem ein nichtleerer Bereich von Objekten als *Objektbereich* zugeordnet ist, so dass das Zeichen „in unbestimmter Weise“ für die Objekte dieses Bereichs steht. Als Objektbereich kann man auch alle Objekte schlechthin zulassen: Dann ist die Variable eine *allgemeine Objektvariable*, die für jedes Objekt schlechthin stehen kann. Als allgemeine Objektvariablen verwendet man im Deutschen gewöhnlich die Buchstaben X und Y. Eine Variable darf vorübergehend als Bezeichnung für ein beliebiges Objekt ihres *Objektbereichs festgelegt werden, und eine solche Festlegung heißt eine Belegung der Variablen*. Man unterscheidet nun zwischen *freien und gebundenen* Exemplaren einer Variablen in einem Ausdruck. Die gebundenen Exemplare erfüllen eine rein syntaktische Funktion (siehe Abschnitt 1.15) und dürfen bei der Deutung des Ausdrucks nicht als Objektbezeichnungen verwendet werden (siehe unten). Für Belegungen gilt in der Logik die Vereinbarung, dass verschiedene freie Exemplare ein und desselben Variablen-Zeichens (z.B. verschiedene freie Exemplare des Buchstabens X) im selben Ausdruck immer Bezeichnungen für ein und dasselbe Objekt sind, während freie Exemplare verschiedener Variablen-Zeichen (z.B. X und Y) sowohl verschiedene Objekte als auch ein und dasselbe Objekt bezeichnen dürfen.

1.9. Variablenbelegung, Konstantenbewertung und Interpretation von Ausdrücken

Die Belegung der Variablen, die in einem Ausdruck (d.h. in einem Satz oder einem bedeutungstragenden Satzteil) vorkommen, ist der erste Schritt in der Interpretation oder Gesamtbewertung des Ausdrucks. Was zu der Belegung der Variablen dann eventuell noch hinzukommen kann, ist die genaue Festlegung der Bedeutung (Bewertung) der übrigen bedeutungstragenden Bestandteile des Ausdrucks, der sog. Konstanten (die eventuell kontextabhängig sein kann). Z.B. muss zur Interpretation des Satzes „X geht zur Bank“ zuerst die Variable X belegt werden (z.B. mit der Bedeutung „Peter“) und dann noch erklärt werden, was man im gegebenen Kontext genau mit „Bank“ meint (z.B. eine bestimmte Bank im Park oder ein bestimmtes Geldinstitut).

1.10. Aussage, Aussageform und Formel

Ein Satz, der zwar keine Aussage ist, aber Variablen enthält, bei deren fester Interpretation er in eine Aussage übergehen würde, heißt eine Aussageform. Aussagen und Aussageformen fasst man als (logische) Formeln zusammen.

¹¹ Diese heißen im Englischen *propositions* (Propositionen) im Gegensatz zu *sentences* (Sätze). Frege bezeichnet sie als *Gedanken* (womit der nicht Denk-Akte meinte, sondern dasjenige auf der Gegenstandsebene, auf das sich Denk-Akte beziehen; synonym zu „das Gedachte“).

1.11. Tautologie (Allgemeingültigkeit), Kontradiktion (Unerfüllbarkeit) und Erfüllbarkeit

Eine Formel (Aussage oder Aussageform), die bei jeder zulässigen Interpretation ihrer Variablen und Konstanten in eine wahre bzw. falsche Aussage übergeht, heißt allgemeingültig (oder eine Tautologie) bzw. unerfüllbar (oder eine Antilogie oder Kontradiktion). Gibt es mindestens eine Interpretation, nach welcher die Aussage wahr ist, heißt sie erfüllbar.

Bemerkung: Dass eine Aussage erfüllt ist oder gilt, sagen wir dagegen genau dann, wenn sie (in der gerade vorausgesetzten Interpretation) wahr ist. Die Rede von Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit nimmt dagegen Bezug auf *alle* Interpretationen.

Bsp.: Wenn X eine Formel ist, ist „ X oder nicht X “ ein allgemeingültige Tautologie, und „ X und nicht X “ eine unerfüllbare Kontradiktion. Ebenso ist „eine Bank ist eine Bank“ eine Tautologie (gilt unabhängig davon, wie „Bank“ interpretiert wird).

Für „ F ist allgemeingültig“ schreibt man „ $\models F$ “ oder „ $\Rightarrow F$ “. Für Erfüllbarkeit und Unerfüllbarkeit gibt es kein eigenes Zeichen: Da F genau dann eine Kontradiktion ist, wenn „nicht F “ eine Tautologie ist, können wir für „ F ist unerfüllbar“ schreiben „ \models nicht F “ bzw. „ \Rightarrow nicht F “. Und für „ F ist erfüllbar“ „nicht \models nicht F “ bzw. „nicht \Rightarrow nicht F “.

1.12. Äquivalenz, Implikation und andere logische Verhältnisse

Zwei Formeln F_1 und F_2 heißen „gleichwertig“ oder logisch äquivalent, wenn sie bei jeder Interpretation denselben Wahrheitswert haben. Man schreibt dann $F_1 \Leftrightarrow F_2$. Bsp.: „ $X = Y$ “ und „ $Y = X$ “ sind äquivalent: Es gilt $X = Y \Leftrightarrow Y = X$.

Zwei Formeln heißen „gegenwertig“, logisch kontravalent, logisch antivalent oder kontradiktorisch und man sagt, dass sie *im kontradiktorischen Gegensatz* zueinander stehen, wenn sie bei jeder Interpretation verschiedene Wahrheitswerte haben. Man schreibt dann $F_1 \nabla F_2$. So sind die Formeln „ $X = Y$ “ und „ $Y \neq X$ “ kontravalent, d.h. es gilt $X = Y \nabla Y \neq X$. Sind F_1 und F_2 äquivalent (bzw. kontravalent), so sind F_1 und „nicht F_2 “ kontravalent (bzw. äquivalent).

Die beiden Formeln heißen konträr (entgegengesetzt), und man sagt, dass sie *im konträren Gegensatz* zueinander stehen, wenn sie bei keiner Interpretation zugleich wahr (wohl aber eventuell zugleich falsch) sein können. Man schreibt dann $F_1 \uparrow F_2$. Man

benennt häufig noch verschiedene Arten des konträren Gegensatzes: Der konträre Gegensatz ist *privativ*, wenn eine der Formeln eine Privation (ein Beraubtsein oder Nicht-Haben) einer Vollkommenheit bezeichnet, die andere dagegen das Ausgestattetsein mit dieser Vollkommenheit ausdrückt (z.B. „ X ist gesund“ und „ X ist krank“). Der konträre Gegensatz ist *relativ*, wenn die Formeln die beiden Glieder einer zweiseitigen, nicht selbstbezüglichen Relation (Beziehung) in ihrer Entgegensetzung beschreiben (z.B., wenn die betrachtete Relation die Vater-Sohn-Beziehung ist: „ X ist Vater von Y “ und „ X ist Sohn von Y “; oder wenn die betrachtete Relation die Kleiner-Größer-Beziehung ist: „ X ist größer als Y “ und „ X ist kleiner als Y “); schließlich ist der konträre Gegensatz *polar*, wenn die Formeln die in einem bestimmten Spektrum äußersten Gegensätze beschreiben, also eine jede das äußerste Gegenteil von dem beschreibt, was die andere beschreibt (z.B. „jeder Mensch ist gerecht – kein Mensch ist gerecht“, „ X ist notwendig – X ist unmöglich“, „ X ist extrem fleißig – X ist extrem faul“ oder „ X ist allwissend – X weiß nichts“).

Zwei Formeln heißen subkonträr, und man sagt, dass sie *im subkonträren Gegensatz* zueinander stehen, wenn sie bei keiner Interpretation zugleich falsch (wohl aber eventuell zugleich wahr) sein können, z.B. „es gibt einen Menschen, der gerecht ist – es gibt einen Menschen, der nicht gerecht ist“ (vorausgesetzt ist hierbei, dass es überhaupt Menschen gibt). Man schreibt dann $F_1 \nabla F_2$.

Eine Formelmengemenge M (die keine, eine oder mehrere Formeln enthalten kann) impliziert eine Formel F , wenn für jede Interpretation, für die alle in M enthaltenen Formeln (falls es solche gibt) wahr sind, auch F wahr ist; man schreibt dann $M \models F$ oder $M \Rightarrow F$. Ist M die leere Menge \emptyset , so gilt offenbar $\emptyset \models F$ genau dann, wenn F eine Tautologie (also allgemeingültig) ist, d.h. genau dann wenn $\models F$ gilt. Enthält M genau eine Formel F_0 , schreibt man für $M \models F$ bzw. $M \Rightarrow F$ auch $F_0 \Rightarrow F$ (lies: F_0 impliziert F) bzw. $F \Leftarrow F_0$ (lies: F folgt aus F_0). Bsp: Es gilt „ X ist 18 Jahre alt $\Rightarrow X$ ist erwachsen“. Unter der Umkehrung (Konversion) von $F_1 \Rightarrow F_2$ versteht man die Implikation $F_2 \Rightarrow F_1$, für die man auch $F_1 \Leftarrow F_2$ schreibt. Ist eine Implikation wahr, muss dies nicht für ihre Konversion gelten („ X ist erwachsen $\Rightarrow X$ ist 18 Jahre alt“ ist falsch). Wenn aber eine Implikation $F_1 \Rightarrow F_2$ und zugleich ihre Konversion $F_2 \Rightarrow F_1$ gilt, gilt auch die Äquivalenz $F_1 \Leftrightarrow F_2$; und wenn diese gilt, gilt auch die Implikation $F_1 \Rightarrow F_2$ und ihre Konversion. Die Äquivalenz ist also gleichbedeutend damit, dass die entsprechende Implikation und ihre Umkehrung zugleich wahr sind. Gilt $F_1 \Rightarrow F_2$, sagt man, dass F_1 *superaltern* (übergeordnet) im Verhältnis zu F_2 ist, und F_2 *subaltern* (untergeordnet) im Verhältnis zu F_1 , und man sagt dann, dass die Formeln *im subalternen Gegensatz* zueinander stehen.

Von den „vier Gegensätzen“ (kontradiktorisch, konträr, subkonträr, subaltern) ist der kontradiktorische am größten (hier haben die Formeln immer verschiedene Wahrheitswerte), der zweitgrößte Gegensatz ist der konträre (hier können die Formeln zwar gemeinsam falsch sein, aber wie beim kontradiktorischen Gegensatz nicht gemeinsam wahr, so dass sie sich, wie man sagt „gegenseitig - von der Wahrheit – ausschließen“, denn die Wahrheit der einen verunmöglicht die Wahrheit der anderen); der drittgrößte Gegensatz ist der subkonträre (hier schließen sich die Formeln nicht mehr aus, d.h. sie können beide wahr sein, aber immerhin können sie nicht beide falsch sein), und der schwächste Gegensatz ist schließlich der subalterne (denn hier können die Formeln sowohl beide wahr als auch beide falsch sein; jedoch liegt ein Minimum an Gegensätzlichkeit noch darin, dass die eine Formel der anderen übergeordnet ist, so dass, wenn diese wahr ist, die andere gezwungenermaßen auch wahr sein muss, aber wenn die übergeordnete falsch ist, die andere wahr oder auch falsch sein darf).

1.13. Kennzeichnung, Kennzeichnungsform und Term

Wenn ein Satz „über“ ein oder mehrere Objekte etwas zu verstehen geben will, muss der Satz Teile (d.h. Morpheme oder Zusammensetzungen von Morphemen) enthalten, die diese Objekte bezeichnen. Im Kontext der Logik nennt man solche Satzteile *Terme* (von Terminus = Abgrenzung), weil ein Logiker die Objekte, über die er redet, in möglichst genauer Abgrenzung von anderen Objekten beschreibt. Oft, aber nicht immer, enthält eine Aussage genau zwei Terme: Den **Subjektsterm** (der das Objekt bezeichnet, „von dem“ etwas ausgesagt wird, welches auch das „Subjekt“ heißt) und den **Prädikatsterm** (der bezeichnet, „was“ vom Subjekt ausgesagt wird). Bsp.: In der Aussage „Fifi ist ein Hund“ ist „Fifi“ der Subjektsterm und „ein Hund“ der Prädikatsterm. Terme können Morpheme sein (z.B. „Fifi“), und somit in logischen Kunstsprachen einzelne Zeichen, aber Terme können auch Zusammensetzungen von Morphemen sein (z.B. „der Hund von Baskerville“); im letzteren Fall spricht man von *zusammengesetzten Termen*. Terme können schließlich auch Variablen enthalten, die erst interpretiert werden müssen, bevor der

Term ein konkretes Objekt bezeichnet (z.B. „der Hund von X“): solche Terme heißen *Kennzeichnungsformen*. Kennzeichnungsformen können, müssen aber nicht zusammengesetzt sein, denn auch jede einzelne Variable („X“) ist ja offenbar bereits eine Kennzeichnungsform. Terme, die direkt (ohne den Umweg einer Variableninterpretation) ein Objekt bezeichnen, die also Konstanten sind, heißen schließlich *Kennzeichnungen*.

1.14. Offene und geschlossene Ausdrücke

Unter (logischen) *Ausdrücken* versteht man alle in der Logik verwendeten selbständigen Verständigungs- und Bedeutungseinheiten. Dazu gehören

- (1) Terme, d.h. (a) Kennzeichnungen und (b) Kennzeichnungsformen, und
- (2) Formeln, d.h. (a) Aussagen und (b) Aussageformen.

Das sind in der mathematischen Logik und in der klassischen allgemeinen Logik auch schon *alle* Ausdrücke; in modernen Erweiterungen können aber noch weitere Sätze hinzukommen, z.B. Fragen und Befehle.

Ein Ausdruck hat, wenn er ein Term (somit eine Bedeutungseinheit) ist, die *semantische Funktion*, ein Objekt zu bezeichnen, oder wie man auch sagt: *auf ein Objekt zu referieren*; wenn er aber ein Satz ist (somit eine Verständigungseinheit), hat er die semantische Funktion, *etwas über Objekte zu verstehen zu geben*. Nun kann ein Ausdruck diese seine semantische Funktion entweder direkt ausüben, oder erst, nachdem gewisse Variablen interpretiert wurden. Im ersten Fall heißt der Ausdruck *ge-schlossen*, im zweiten *offen*. Zu den offenen Ausdrücken gehören also Kennzeichnungsformen und Aussageformen, zu den ge-schlossenen Kennzeichnungen und Aussagen. In der klassischen Logik zerfallen die Ausdrücke somit in folgende vier Arten:

1. geschlossene Terme, die unmittelbar ein Objekt bezeichnen (= Kennzeichnungen),
2. geschlossene Formeln, die unmittelbar einen Sachverhalt beschreiben (= Aussagen),
3. offene Terme, die ein Objekt erst nach Variablenbelegung bezeichnen (= Kennzeichnungsformen),
4. offene Formeln, die einen Sachverhalt erst nach Variablenbelegung beschreiben (= Aussageformen).

Das folgende Schaubild fasst dies zusammen:

	geschlossen	offen
Term	Kennzeichnung	Kennzeichnungsform
Formel	Aussage	Aussageform

Die Aussagen teilt man nach ihrer Semantik ein in wahre (= geltende, erfüllte) und falsche (nicht geltende, nicht erfüllte).

Ein Ausdruck heißt *nach Interpretation der Variablen x, y, . . . geschlossen*, wenn er *immer dann*, wenn man alle diese Variablen belegt (und nötigenfalls alle Konstanten bewertet), seine semantische Funktion ausübt. Beispiele:

- (1) Die offene Formel $x = x$ ist nach Interpretation der Variablen x geschlossen, und
- (2) der offene Term $\{x, y\}$ ist nach Interpretation von x und y geschlossen (nicht aber nach Interpretation von x allein).
- (3) Die Ausdrücke $x = x$ und $\{x, y\}$ sind auch nach Interpretation von x, y, z geschlossen (da z in ihnen nicht vorkommt).
- (4) Jede Variable x ist ein offener Term, und zwar ein solcher, der nach Interpretation von x geschlossen ist.
- (5) Jeder Ausdruck ohne Variablen übt seine Funktion direkt aus, ist daher geschlossen (schlechthin).
- (5) Jeder Ausdruck ohne Variablen ist auch nach Interpretation *von beliebigen Variablen* geschlossen.
- (6) Jeder beliebige Ausdruck ist „nach Interpretation *aller* Variablen“ geschlossen.

1.15. Freie und gebundene Variablen

Auch in einem geschlossenen Ausdruck können Variablen vorkommen.

So sind die Ausdrücke

- „für jedes x gilt: $x = x$ “,
- „es gibt (mindestens oder genau) ein x , so dass $x = 6$ “,
- „dasjenige x , für das gilt: x war im Jahre 2000 der Oberbürgermeister von München“,
- „die Menge aller x , für die gilt: $x < 6$ “

geschlossen (die ersten beiden sind Aussagen, die letzten beiden Kennzeichnungen), *obgleich* in ihnen Exemplare der Variablen x vorkommen. Interpretiert man nämlich die Variable x (zum Beispiel als Bezeichnung für die Erde), so darf diese Interpretation auf die hier vorkommenden Exemplare von x *nicht* angewendet werden, was man daran erkennt, dass ein Einsetzen von „die Erde“ für x hier zu unsinnigen Zeichenreihen führt. Solche Variablenexemplare heißen *gebunden* oder für eine Interpretation *nicht freigegeben*. Sie üben eine rein syntaktische Funktion aus und daher kann man sie ohne Bedeutungsverlust durch Nichtvariablen (etwa *Pronomen*) ersetzen, so dass man den gemeinten Sachverhalt auch variablenfrei ausdrücken kann (so kann z.B. den ersten Ausdruck gleichwertig ersetzen durch: „für jedes *Objekt* gilt: *dieses* ist mit *sich* identisch“). Die Variablenexemplare dagegen, die nicht in dieser Weise ersetzbar sind, gelten in einem Ausdruck als zur Interpretation freigegeben und heißen kurz frei, so etwa die Exemplare von x und y in „ $x = y$ “ und „ $y < 6$ “. Setzt man für sie Objektbezeichnungen ein, erhält an immer sinnvolle Ausdrücke.

Übung 3: Bringen Sie ein Beispiel für

- a) eine Kennzeichnungsform, b) eine Kennzeichnung, c) zwei äquivalente Aussageformen, d) zwei konträre Aussageformen, e) eine Aussage. Dabei soll jeder angegebene Ausdruck zusammengesetzt sein und mindestens eine Variable x enthalten.

1.16. Fusion von Termen und Formeln und das Ersatzobjekt

Der Vater der modernen Logik, Gottlob Frege, hat die äußert flexible und praktisch vorteilhafte sog. *Ausdruckslogik* erfunden, in der man alle Ausdrücke, also Terme und Formeln, gewissermaßen „gleich behandelt“. Man erreicht dies in zwei Schritten:

- 1) Zunächst verleihen wir allen geschlossenen Formeln neben ihrer Funktion, nach Interpretation ihrer Konstanten und freien

Variablen einen Sachverhalt zu beschreiben (was nach Frege der „Sinn“ der Formel ist), zusätzlich die Funktion, ein bestimmtes Objekt zu bezeichnen: Und zwar soll jede wahre bzw. falsche Formel eine Bezeichnung für „das Wahre“ (bezeichnet mit \top) und „das Falsche“ (bezeichnet mit \perp) sein, was ja nach Frege zwei abstrakte „Gegenstände“ sind. In dieser Bezeichnungsfunktion besteht die Fregesche „Bedeutung“ der Formel. Moderne Logiker, die sich nicht auf die Fregesche Ontologie festlegen wollen, definieren an dieser Stelle einfache „das Wahre“ und „das Falsche“ als Bezeichnung für zwei konkretere Objekte, üblicherweise die Zahlen 1 und 0 („das Wahre“ := \top := 1 und „das Falsche“ := \perp := 0).

Beispiel: Die wahre Aussage „ $1 < 2$ “ ist nun zugleich eine Bezeichnung für \top . Ebenso bezeichnet „ $1 \neq 1$ “ das Objekt \perp .

- 2) Jeden geschlossenen Term A benutzen wir außer zur Bezeichnung eines Objekts zur Aussage des Sachverhalts, „dass A das Wahre bezeichnet“. Demnach ist A falsch, wenn A etwas anderes als \top bezeichnet, und sonst wahr. So kann man jetzt die Personen-Kennzeichnung „Peter“ als „falsche“ Sachverhaltsbeschreibung sehen, weil „Peter“ nicht „das Wahre“ bezeichnet. Dagegen sind „ \top “ oder „der von \perp verschiedene Wahrheitswert“ wahre Sachverhaltsbeschreibungen.

Insgesamt haben wir nun erreicht, dass jeder Ausdruck sowohl ein Objekt bezeichnet als auch einen Sachverhalt beschreibt, so dass der *semantische* Unterschied zwischen Termen und Formeln aufgehoben ist: Jeder Term kann „formelartig“ und jede Formel „termartig“ gebraucht werden. Eine solche Gleichbehandlung nimmt die von Frege inspirierte Ausdruckslogik vor. Allerdings unterscheidet sich auch in dieser Logik eine Formel *syntaktisch* von einem Term, und dieser Unterschied bleibt auch weiterhin semantisch relevant: *Solange der Kontext nicht das Gegenteil erkennen lässt, sollen Terme stets als Objektbezeichnungen und Formeln stets als Sachverhaltsbeschreibungen* fungieren. Sagen wir aber, dass ein Ausdruck A „gilt“, „wahr ist“, „nicht erfüllt ist“ oder ähnlich, so verwenden wir ihn als Sachverhaltsbeschreibung (gebrauchen ihn „formelartig“), *auch wenn er syntaktisch ein Term ist*. Sagen wir dagegen, dass A gleich einem Objekt oder A Element einer Menge ist oder ähnlich, so benutzen wir ihn als Objektbezeichnung (gebrauchen ihn „termartig“), *auch wenn er syntaktisch eine Formel sein sollte*.

Eine weitere auf Frege zurückgehende Idee ist die Wahl eines Objekts \perp als „Ersatzobjekt“ oder „Joker“ \perp , das von \top und \perp verschieden sein soll und normalerweise nicht inhaltlich relevanter Gegenstand eines objektsprachlichen Diskurses ist. Z.B. kann man \perp als die Klasse \mathbb{D} aller Dinge definieren. Man legt dann fest, dass Ausdrücke der Form „dasjenige x , für das gilt ...“ im Fall, dass es nicht genau ein solches x gibt, den Joker \perp bezeichnet; ebenso bezeichnen Ausdrücke der Form „ein x , für das gilt ...“ im Fall, dass es gar kein solches x gibt, den Joker \perp . Der Joker ist auch das quasi-Ergebnis aller „undefinierten“ Rechenoperationen, in dem der Taschenrechner „error“ ausgibt: z.B. $1:0 = \perp$. Was wir insgesamt durch die Fusion von Termen und Formeln sowie durch Einführung des Ersatzobjektes erreichen, ist, dass jeder syntaktisch korrekt gebildete Ausdruck, sobald man alle seine Variablen belegt und alle seine Konstanten bewertet, (a) ein bestimmtes Objekt bezeichnet, und (b) als „wahr“ oder „falsch“ gewertet werden kann (je nachdem, ob das bezeichnete Objekt „das Wahre“ \top ist, oder nicht).

1.17. Sprachen verschiedener Stufe

Eine *Objektsprache* (Sprache 1-ter Stufe) ist eine Sprache, die man gebraucht, um über nichtsprachliche Objekte zu sprechen.

Eine *Metasprache* (Sprache 2-ter Stufe) ist eine Sprache, in der man über eine Objektsprache spricht (z.B. in der Linguistik).

Eine *Meta-Metasprache* (oder Sprache 3-ter Stufe) wäre eine solche, in der man über eine Metasprache spricht usw.

Wenn man die Alltagssprache gleichzeitig als Objekt- und Metasprache verwendet, haben die Wörter einen objektsprachlichen und einen metasprachlichen Sinn. Benutzt man ein Wort *im metasprachlichen Sinn*, kann man dies durch den Gebrauch von Anführungszeichen andeuten. Beispiele: Sagt man: *München hat 1,5 Million Einwohner*, wird „München“ im objektsprachlichen Sinn verwendet. Sagt man aber *„München“ hat 7 Buchstaben*, verwendet man München im metasprachlichen Sinn.

Zur logischen Metasprache gehören die in den Abschnitten 1.11, 1.12 eingeführten (und in 2.1 sowie 5 noch einzuführenden) Zeichen $=$, $|\Rightarrow$, \Rightarrow , \Leftarrow , \Leftrightarrow , \neq , \perp , \forall , \neg , \equiv , \vdash sowie \therefore und \because . Demgegenüber gehören die in Kap. 5 einzuführenden Zeichen \rightarrow , \leftarrow , \leftrightarrow , \times , $=$, zur Objektsprache und sind die objektsprachlichen Entsprechungen zu den metasprachlichen Zeichen \Rightarrow , \Leftarrow , \Leftrightarrow , \neq , \equiv . Zur Metasprache gehören auch die in Abschnitt 1.25 einzuführenden Definitionszeichen $:=$ und $:\Leftrightarrow$.

1.18. Klammern und andere Maßnahmen zur Vermeidung vieldeutiger Ausdrücke

Oft setzt man einfache Aussagen zu komplizierteren Aussagen zusammen, z.B. mit Hilfe von der sog. logischen *Junktoren* (Verbindungswörtern) wie „nicht“, „und“, „oder“, „wenn“ usw. Dabei kann es zu Mehrdeutigkeiten kommen.

Sind etwa A und B einfache Aussagen, so ist „nicht A und B “ ein Satz, der für zwei verschiedene Aussagen stehen könnte:

(1) Entweder man will sagen: „Es gilt nicht, dass A und zugleich B gilt“

(2) Oder: „Es gilt nicht A , und zugleich gilt B “.

Diese beiden Aussagen haben einen durchaus verschiedenen Sinn und können sogar verschiedene Wahrheitswerte haben: Denn wenn A wahr und B falsch ist, wäre die zusammengesetzte Aussage (1) wahr, aber (2) wäre falsch.

Also ist „nicht A und B “ doppeldeutig, solange nicht geklärt ist, ob (1) oder (2) gemeint ist.

Im Fall (1) wird „ A und B “ als Sinneinheit zusammengefasst, die dann als Ganze negiert wird, und im Fall (2) wird „nicht A “ als Sinneinheit zusammengefasst, die das Wort „und“ dann als Ganze mit B verbindet. Man muss also, um Eindeutigkeit herzustellen, so oder so gewisse Satzteile zu Sinneinheiten zusammenfassen. Hierzu gibt es folgende Methoden:

1. *Methode: Klammern*. Am intuitivsten ist es, das jeweils Zusammengehörige *einzukreisen* oder *einzurahmen*: Man schreibt also, wenn man (1) meint:

„nicht $\boxed{A \text{ und } B}$ “

und wenn man (2) meint, „ $\boxed{\text{nicht } A}$ und B “.

Aus schreibtechnischen Gründen benutzt man statt der Kreise bzw. Rahmen gewöhnlich runde oder eckige *Klammern*, die den Kreis oder Rahmen andeuten, schreibt also

wenn man (1) meint, „nicht $(A \text{ und } B)$ “,

und wenn man (2) meint, „ $(\text{nicht } A)$ und B “.

2. *Methode: Lücken*. Eine zweite Möglichkeit ist es, verschieden große Lücken zu verwenden: Die zusammengehörigen Teile sind dann die enger zusammengestellten. Zur Verdeutlichung setzt man dabei manchmal noch Punkte in die Lücken. Man schreibt

also, wenn man (1) meint: „nicht . A und B“,
und wenn man (2) meint: „nicht A . und B“

3. *Methode: festgelegte Stärken der Verbindungswörter bzw. Verbindungszeichen.* Eine dritte Möglichkeit ist es, zwar die Abstände alle gleich groß zu machen, jedoch bestimmte „Stärken“ / „Bindungskräfte“ von speziellen Verbindungszeichen (Junktoren) zu vereinbaren: Man stellt sich Junktoren mit einer mehr oder weniger starken Anziehungskraft ausgestattet vor, so dass kräftigere („stärkere“) Zeichen die umgebenden Zeichen stärker anziehen als weniger kräftige („schwächere“). Speziell vereinbart man, dass das *Strichzeichen* \neg (für „nicht“) stärker ist als die *Hütchen* \wedge (für „und“) und \vee (für „oder“), und dass diese wieder stärker sind die *Pfeile* \rightarrow (für „folgt“, „wenn-dann“) und \leftrightarrow (für „äquivalent“, „genau dann wenn“). Man stellt sich nun vor, dass die Junktoren ihre Anziehungskräfte ausüben, und was als Ergebnis dieses Kräfteingens näher beieinander stehen würde, wird nach der Lückenkonvention als Sinneinheit gelegen. Mit dieser Konvention bedeutet also $\neg A \wedge B$ dasselbe wie „nicht A . und B“ und somit auch dasselbe wie „(nicht A) und B“. Man kann sich auf diese Weise Klammern und verschiedene Abstände sparen; eine analoge „Stärke“-Konvention ist auch in der Mathematik üblich, wo man mit der Regel „Punkt vor Strich“ meint, dass das Multiplikations- und Divisionszeichen stärker ist als das Plus- und Minuszeichen.

4. *Methode: polnische Notation.* Eine vierte Möglichkeit, bei der man wie bei der dritten ganz ohne Klammern und Abstände auskommt, sich aber auch die Festlegung von Stärken sparen kann, ist der Gebrauch der sog. polnischen Notation (die so heißt, weil sie in den 1920er Jahren vom polnischen Logiker Jan Łukasiewicz entworfen wurde): Man setzt die Junktoren alle links vor die Aussage(n), auf die sie sich beziehen, schreibt also z.B. „und A B“ (bzw. $\wedge AB$) statt „A und B“.

Demnach schreibt man,

wenn man (1) meint: $\neg \wedge AB$ („nicht und AB“)

und wenn man (2) meint: $\wedge \neg AB$ („und nicht AB“)

Diese raffinierte, aber künstlich wirkende Methode wird aber nur in *formalen Kunstsprachen* verwendet. Gegenüber der polnischen Notation heißt die gewöhnliche Notation, bei welcher Junktoren zwischen die Ausdrücke gesetzt werden, auf die sie sich beziehen, die *Infixnotation*. In der *Praxis halbformaler Sprachen* werden meist die *erste bis dritte Methode gleichzeitig* eingesetzt; dabei ist stillschweigend vereinbart, dass man zuerst die Klammern beachtet; wenn dann noch Unklarheiten bestehen, beachtet man Abstände; und wo gleiche Abstände stehen, beachtet man schließlich die festgelegte Stärke der Zeichen. In der *Alltagssprache* wird noch eine *fünfte Methode angewendet*: Diese besteht einfach im Gebrauch einer *ausführlichen alltagssprachlichen Wiedergabe*. Beispiele dafür waren unsere obigen eindeutigen Formulierungen (1) und (2).

Übung 4: In der Allgemeinen Habilitationsordnung der Universität Augsburg (vom 11. Dezember 2003, §8 Abs. 3 Satz 1) heißt es: Zur Bewertung der pädagogischen Eignung eines Habilitanden sollen „*Evaluierungsergebnisse und schriftlich dokumentierte Unterrichtseinheiten oder Unterrichtsbesuche herangezogen werden*“. Erklären Sie, warum dieser Text zweideutig ist und formulieren Sie zwei eindeutige Versionen, die den beiden Deutungsmöglichkeiten entsprechen.

1.19. Begriffe

Auf der psychologisch-mental Seite entsprechen den Termen *Begriffe* (Begriff = lat. Conceptus oder Terminus mentalis = griech. Horos). Z.B. entspricht der Term „Fifi“ einen Individualbegriff, und der Term „Hund“ einem Allgemeinbegriff. Wie auf der sprachlichen Ebene Aussagen Terme als Bestandteile enthalten, so enthalten auf der mentalen Ebene Urteile Begriffe als Bestandteile; Terme sind die Versprachlichungen der Begriffe, so wie Aussagen die Versprachlichungen der Urteile sind. Die mentalen Entsprechungen von Kennzeichnungsformen nennt Frege „ungesättigte“ Begriffe; diejenigen von Kennzeichnungen „gesättigt“. Zu einem Begriff gehört eine *Intension* (ein Inhalt) und eine *Extension* (ein Umfang):

- Die *Intension* (nach Frege auch der *Sinn*) eines Begriffs ist die Gesamtheit der im Denken des Begriffs zusammenkommen inhaltlichen Merkmale (wozu beim Begriff „Mensch“ etwa Sinnenwesen, rational, Füße, kann in der Regel sprechen, soll ethisch handeln etc. gehört);
- die *Extension* (nach Frege auch die *Bedeutung*) eines Begriffs ist die Gesamtheit aller Einzeldinge, die dem Inhalt entsprechen (die, wie man sagt, „unter den Begriff fallen“ und welche die „Instanzen“ des Begriffs heißen), also beim Begriff „Mensch“ die Menge aller Menschen.

Es gibt *leere Begriffe*, deren Extension die leere Menge ist, die aber trotzdem einen Inhalt haben, z.B. der Begriff „eckiger Kreis“ oder „Einhorn“. Weiter gibt es *Individualbegriffe*, zu deren Extension genau ein Individuum gehört, z.B. der Begriff „Sokrates“. Schließlich gibt es *Allgemeinbegriffe* wie „Kreis“, „Mensch“ etc., deren Extensionen endliche oder unendliche Vielheiten sind. Extension und Intension verhalten sich nach dem „Reziprozitätsgesetz“ umgekehrt zueinander (je mehr Merkmale zur Intension gehören, desto kleiner ist die Extension: Denn je mehr Einzelheiten der Begriff enthält, desto schärfer und somit umfangsärmer wird er, d.h. desto weniger Objekte fallen darunter, oder nach Kant: „Je mehr ein Begriff unter sich enthält, desto weniger enthält er in sich und umgekehrt“). So sind (wenn man von den leeren Begriffen absieht) die Individualbegriffe diejenigen mit den meisten Merkmalen, ja mit einer unübersichtlichen und wissenschaftlich unkontrollierbaren Menge („individuum est ineffabile“; „Wissenschaft gibt es nicht vom Einzelding“; „omnis scientia est universalium“); während Begriffe mit dem größten Umfang (etwa der Begriff „das Sein“) die inhaltsärmsten sind. Man erhält ausgehend vom Einzelding immer allgemeinere Begriff durch immer weitere *Abstraktion* (abstrahere = abziehen), d.h. indem man von der Idee des Einzeldings wiederholt Merkmale „abzieht“, entfernt, ausblendet, nicht beachtet; umgekehrt erhält man ausgehend von Allgemeinbegriffen wieder weniger allgemeine, konkretere Begriffe durch *Konkretion* (concretum = zusammengewachsen), d.h. indem man zum Begriff Merkmale hinzufügt, bis man schließlich wieder das ganz konkrete Einzelding vor Augen hat. Die abstrakteren Begriffe heißen den jeweiligen konkreteren, aus denen sie durch Abstraktion hervorgehen, *übergeordnet*, und konkreteren heißen den abstrakteren, aus denen sie durch Konkretion hervorgehen, *untergeordnet*. Ist A ein B untergeordneter (und folglich B ein A übergeordneter) Begriff, heißt A (relativ zu B) ein *Artbegriff* und B (relativ zu A) ein *Gattungsbegriff*. Die (nichtleeren) Begriffe bilden also eine Hierarchie, eine symbolische Pyramide, an deren Basis die Individualbegriffe stehen und an deren Spitze der höchste Gattungsbegriff des Seins

steht (oder wenn man diesen nicht als eigentlichen, „univoken“ Begriff akzeptiert (siehe Abschnitt 1.20) mehrere höchste Gattungsbegriffe wie z.B. bei Aristoteles die Begriffe Substanz, Quantität, Qualität usw. (siehe Abschnitt 1.21).

Verschiedene Begriffe können denselben Umfang haben (sie heißen dann umfangsgleich oder *äquipollent*); z.B. sind „Morgenstern“ und „Abendstern“ (zwei Individualbegriffe mit Venus als einziger Instanz) oder „Vieleck mit drei Ecken“ und „Vieleck mit drei Seiten“ (zwei Allgemeinbegriffe mit der Menge aller Dreiecke als Umfang) *äquipollent*. Solche Begriffe haben nach Frege „dieselbe Bedeutung, aber verschiedenen Sinn“. Zur Unterscheidung zwischen Sinn und Bedeutung siehe auch den Abschnitt über Freges Bedeutungstheorie in Abschnitt 1.24.

1.20. Äquivok, univok und analog

Man nennt ein Wort bzw. einen Wortgebrauch in einem bestimmten Kontext *homonym* bzw. *äquivok* („gleich-namig“), wenn das Wort dort für zwei oder mehrere Begriffe verwendet wird, die disparat sind und daher völlig unähnliche Dinge bezeichnen. Auch diese verschiedenen Begriffe/Dinge heißen dann zueinander *homonym/äquivok*. Beispiel: das Wort „wagen“, wenn es in den Sätzen „Der Wagen fährt“ und „wie kannst du es wagen?“ verwendet wird. Der *äquivoke* Wortgebrauch im gleichen Kontext heißt auch eine *Äquivokation*; dies ist oft Quelle von Missverständnissen und logischen Trugschlüssen.¹²

Man nennt ein Wort bzw. Wortgebrauch in einem bestimmten Kontext *synonym* bzw. *univok* („zusammen-namig“ bzw. „ein-namig“) oder im Deutschen *gleichbedeutend*, wenn es dort immer für denselben Begriff steht bzw. im gleichen Sinn gebraucht wird. Beispiel: das Wort „Tier“, wenn es in den Sätzen „ein Hund ist ein Tier“ und „eine Katze ist ein Tier“ verwendet wird. Auch die so bezeichneten verschiedenen Attribute an verschiedenen Dingen (etwa die konkrete Tierheit als Eigenschaft eines Hundes und die konkrete Tierheit als Eigenschaft einer Katze) bezeichnet man als *synonym/univok*.

Man nennt ein Wort bzw. einen Wortgebrauch *paronym* bzw. *analog* („bei-namig“ bzw. verhältnismäßig, entsprechend, proportional), wenn das Wort dort für zwei oder mehrere Begriffe verwendet wird, die zwar verschieden, aber doch aufeinander hin-geordnet sind und daher ähnliche Dinge bezeichnen. Beispiele: Das Wort „Licht“ in den Sätzen „mach das Licht an“ und „mir geht ein Licht auf“ – im einen Fall meint man Licht, welches das sinnliche Sehen ermöglicht, im anderen „geistiges“ Licht, eine Erkenntniskraft. Ein klassisches Beispiel ist das Wort „gesund“ in seiner Anwendung auf Speisen, Menschen und das Aussehen. Auch diese Begriffe / Dinge heißen dann zueinander *analog*. Man fasst zueinander analoge Begriffe auch zu einem einzigen Oberbegriff zusammen, der dann ein analoger Begriff heißt; gewöhnliche Begriffe nennt man demgegenüber *univok*. – In der Metaphysik streitet man sich, ob der Seinsbegriff ein solcher analoger Begriff ist (so die aristotelisch-thomistische Philosophie) oder ob es sich um einen univoken Begriff handelt (so Duns Scotus).

1.21. Kategorien

Logiker teilen gern die Terme / Begriffe und bei ontologischen Ambitionen auch das Sein in verschiedene oberste Klassen oder Gattungen ein, die sie „Kategorien“ nennen.

Klassisch ist die von **Aristoteles** († 322 v. Chr.) in seiner „Kategorienschrift“ vorgenommene Einteilung der sprachlichen Terme bzw. Seienden in „zehn Kategorien“ (lat. Prädikamente, „Ausageweisen“):

- | | |
|---|--|
| 1. <i>Substanz</i> (letzter Eigenschaftsträger) | z.B. Sokrates, Platon, Mensch, Pferd |
| 2. <i>Quantität</i> (Ausdehnung) | z.B. zwei Ellen lang |
| 3. <i>Qualität</i> (Beschaffenheit) | z.B. weiß, lesekundig |
| 4. <i>Relation</i> (Beziehung) | z.B. größer als, halb so groß wie, Ursache von ... |
| 5. <i>Locus</i> (Ort) | z.B. auf dem Marktplatz |
| 6. <i>Tempus</i> (Zeit) | z.B. gestern, voriges Jahr |
| 7. <i>Situs</i> (Lage) | z.B. stehend, sitzend |
| 8. <i>Habitus</i> (Anhaben) | z.B. beschuht, bewaffnet |
| 9. <i>Aktion</i> (Setzen einer Wirkung) | z.B. schneidet, läuft, sieht |
| 10. <i>Passion</i> (Erleiden einer Wirkung) | z.B. wird geschnitten |

Die *Substanzen* definiert Aristoteles als letzte Eigenschaftsträger und unterscheidet individuelle („erste“) Substanzen (Sokrates, Platon) von den durch Allgemeinbegriffe bezeichneten („zweiten“) Substanzen (Mensch, Pferd). Alle Nichtsubstanzen (die in die Kategorien 2-10 eingeteilt werden) heißen *Akzidenzien* und sind ausgestaltende Eigenschaften der Substanzen. Somit scheint Aristoteles eigentlich eine Zweiteilung vorauszusetzen, die den Kategorien vorgeordnet wäre.

Eine ganz andere Kategorientafel von **zwölf Kategorien** hat **Kant** († 1804) aufgestellt. Sie sind die obersten Schemata, nach dem denen der menschliche Verstand die Dinge logisch beurteilt:

- A. Kategorien der Quantität (nach der Anzahl der Subjekte in einer Aussage: „ein S ist P“, „einige S sind P“, oder „alle S ...“)
A1. *Einheit*, A2. *Vielheit*, A3. *Allheit*
- B. Kategorien der Qualität (nach der Verbindung des Subjekts mit dem Prädikat: „S ist P“, „S ist nicht P“ oder „S ist Nicht-P“)
B1. *Realität* (d.h. Bejahung), B2. *Negation*, B3. *Limitation*
- C. Kategorien der Relation (nach den Verhältnissen Subjekt-Prädikat, Grund-Folge, Zueinander von Gliedern einer Einteilung)
C1. *Substanz-Akzidenz-Relation*, C2 *Grund-Folge-Relation*, C3 *Wechselwirkungs-Relation*
- D. Kategorien der Modalität (nach dem Realitätsgehalt: „ist *möglicherweise*“, „ist *wirklich*“, „ist *notwendigerweise*“)
D1. *Möglichkeit*, D2. *Dasein*, D3. *Notwendigkeit*

Bemerkung: Kant deduziert diese Kategorien aus der Urteilslehre:

Die Kategorien A1,A2,A3 der Quantität leitete Kant ab aus der Einteilung der Urteile in *singuläre*, *partikuläre* und *universelle*;
Die Kategorien B1,B2,B3 der Qualität aus der Einteilung der Urteile in *affirmative* (bejahende), *negative* (verneinende) und die von Kant sog. „*unendlichen*“ oder „*limitierenden*“ Urteile „S ist Nicht-P“ (die in ihrer Sinnhaftigkeit umstritten sind); siehe zu

¹² Siehe die Quaternio Terminorum in Beispiel 2 auf S. 4.

Qualität und Quantität eines Urteils auch Kap. 4.

Die Kategorien C1,C2,C3 aus der Einteilung der Urteile in *kategorische* (einfache Verbindung von Subjekt und Prädikat), *hypothetische* (wenn-dann-Urteile) und *disjunktive* (entweder-oder-Urteile);

die Kategorien D1,D2,D3 schließlich aus der Einteilung der Urteile in *problematische* (A ist möglicherweise B), *assertorische* (A ist wirklich B) und *apodiktische* (A ist notwendigerweise B).

1.22. Urteile und verschiedene Arten wahrer Urteile

Auf der psychologisch-mental Seite entsprechen den Formeln (Aussagen) die *Urteile*. Wahre Urteile werden je nach dem Erkenntnisgrund ihrer Wahrheit eingeteilt in apriorische und aposteriorische:

- Ein wahres Urteil ist *aposteriorisch* (*a posteriori* = im Nachhinein), wenn seine Wahrheit durch (sinnliche) Erfahrung erkennbar ist, sei es unmittelbar (etwa durch Hinschauen) oder mit Messgeräten. Man spricht von *Tatsachenwahrheiten*, Kant spricht von „*Urteilen a posteriori*“. Allgemeine Wahrheiten („es gilt immer, dass ...“) nennt man *Gesetze*, allgemeine aposteriorisch ersichtliche Gesetze heißen *Naturgesetze* und *naturgesetzlich notwendig*; ein Beispiel ist die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.
- Dagegen ist ein wahres Urteil *apriorisch* (*a priori* = im Voraus), wenn seine Wahrheit ohne sinnliche Erfahrung (durch reines Denken „mit geschlossenen Augen“) erkennbar ist. Derart erkennbare Wahrheiten heißen auch „*Vernunftwahrheiten*“, Kant spricht von „*Urteilen a priori*“. Sie heißen auch *logisch notwendig* und *logische Gesetze*. Dazu gehören auch mathematische Gesetze (Bsp.: „nach jeder Primzahl gibt es eine weitere, die größer ist als sie“).

Die Hauptunterschiede zwischen aposteriorischen physikalischen und apriorischen logischen Gesetzen sind folgende:

- Man erkennt nämlich physikalische Gesetze durch (unvollständige!) *Induktion* („Hinaufführung“; Schluss vom Besonderen auf das Allgemeine), d.h. indem man viele Erfahrungen der gleichen Art macht und dann extrapolierend vermutet, es werde nie eine Ausnahme geben. Beispiel: Jeden Morgen ist bisher die Sonne aufgegangen, also wird sie dies immer tun. Dagegen erkennt man logische Gesetze entweder durch *unmittelbare Evidenz* oder durch *Deduktion* („Hinabführung“, „Ableitung“; logischer Schluss vom Allgemeinen oder Prinzipiellen auf das Besondere), die von unmittelbar evidenten Prämissen ausgeht, d.h. durch einen logisch korrekten Beweis aus unmittelbar einsichtigen Prämissen.¹³
- Während man nie sicher sein kann, ob ein vermeintliches physikalisches Gesetz tatsächlich gültig ist (weil ihm entgegenstehende neue Erfahrungen nicht ausgeschlossen sind), ist man bei logischen Gesetzen nicht auf Erfahrungen angewiesen und daher sicher, dass sie gültig sind (wenn man von möglichen Irrtümern durch Unaufmerksamkeit beim Herleiten absieht).
- Der wichtigste Unterschied ist: Physikalische Gesetze gelten im *wirklichen Universum*, aber nicht in jeder *möglichen Welt* (eine „Welt“ meint hier den Gesamtzusammenhang der Wirklichkeit, einschließlich den alle früheren und späteren Momente umfassenden Verlauf des Universums), während logische Gesetze in jeder möglichen Welt gelten müssen (d.h. sie hätten auch gegolten, wenn die Wirklichkeit eine andere gewesen wäre als sie ist). Man nennt nun ein Gesetz bzw. Objekt bzw. eine Eigenschaft eines Objekts (im strengen Sinn) „*notwendig*“, wenn das Gesetz in jeder möglichen Welt gilt bzw. das Objekt in jeder möglichen Welt existiert bzw. wenn das Objekt in jeder möglichen Welt diese Eigenschaft hat. Das Gegenteil von notwendig heißt *kontingent*. So sind also physikalische Gesetze kontingent, logische aber notwendig.

Beispiel für aposteriorisches Urteil (Naturgesetz): Eine Jungfrau kann kein Kind bekommen; Beispiel für ein apriorisches Urteil (logisches Gesetz): Ein Jungeselle kann nicht verheiratet sein.

1.23. Analytisch & synthetisch im Zusammenhang mit apriorisch & aposteriorisch

Im Zusammenhang mit dem Begriffspaar *a priori* / *a posteriori* benutzt Kant auch das Begriffspaar *analytisch* / *synthetisch*.

- Ein wahres Urteil heißt nach Kant *analytisch*, wenn seine Wahrheit durch Analyse (Zergliederung) der in ihm vorkommenden Begriffe erkannt wird. Bsp: die Urteile „ein Schimmel ist weiß“, „ein Schimmel ist ein Pferd“ sind wahr, weil der Begriff „Schimmel“ ja als „weißes Pferd“ definiert ist, so dass man durch eine Analyse = Zergliederung des Begriffs erkennt, dass das Prädikat „weiß“ in ihm enthalten ist, darum „ist“ der Schimmel weiß. Demnach basieren also analytisch wahre Urteile auf „trivialen“ Deduktionen. Man weitet heute den Begriff des „analytisch wahren Urteils“ aus auf sämtliche logisch deduzierbare Aussagen (so schon Frege). In diesem weiteren Sinn sind auch mathematische Urteile wie „in der Peanoschen Arithmetik gilt $7 + 5 = 12$ “ und „in der euklidischen Geometrie ist die Winkelsumme im Dreieck 180° “ analytische Urteile.
- Ein wahres Urteil heißt nach Kant *synthetisch*, wenn es sich nicht durch eine Begriffsanalyse ergibt, wenn also der Prädikatsbegriff durch Synthese (Zufügung) zum Subjektbegriff hinzukommt. Bsp.: „Alle Körper sind schwer“ – die Schwere ist im Begriff des Körpers als einer „ausgedehnten Substanz“ nicht enthalten, wir fügen sie aufgrund sinnlicher Erfahrung dem Körperbegriff „von außen“ hinzu. Wenn man „analytisch“ im modernen, weiteren Sinn versteht (also als gleichbedeutend mit „aus unmittelbar evidenten Prämissen deduktiv erschließbar“), bedeutet „synthetisch“ entsprechend die Negation von „analytisch“ in diesem weiteren Sinn. Nach Kant sagen analytische Urteile nur Triviales / Selbstverständliches, was in den Begriffen bzw. Satzstrukturen schon enthalten ist, während die synthetischen Urteile wirklich unsere Erkenntnis erweitern.

Wie ist das Verhältnis der Begriffe *analytisch/synthetisch* und *apriorisch/aposteriorisch*? Klar ist, dass *analytisch & synthetisch* einander *ausschließen*, ebenso wie *apriorisch & aposteriorisch* und auch *analytisch & aposteriorisch*. Dagegen gibt es Urteile, die

¹³ Die „vollständige Induktion“ in der Mathematik ist eigentlich ein verkappter deduktiver Beweis. – Neben *Induktion* und *Deduktion* wird seit Peirce († 1914) auch die *Abduktion* diskutiert: Abduktion ist das Aufstellen einer zunächst unsicheren Hypothese, die eine beobachtete Tatsache erklären würde. „Die überraschende Tatsache C wird beobachtet; aber wenn A wahr wäre, würde C eine Selbstverständlichkeit sein; folglich besteht Grund zu vermuten, dass A wahr ist.“ Aus der abduktiv eingeführten Hypothese werden deduktiv Folgerungen abgeleitet, die dann durch Beobachtungen überprüft werden, und wenn diese Überprüfung fortlaufend positiv ausfällt, ist diese wiederum eine induktive Bestätigung der Hypothese und macht sie zu einer glaubwürdigen These. Auf diese Weise wirken Abduktion, Deduktion und Induktion beim Aufstellen naturwissenschaftlicher Thesen über Naturgesetze zusammen. Damit könnten Naturgesetze natürlich niemals absolut bestätigt werden: Der *Verifikationismus* (Carnap, 1930), wonach eine naturwissenschaftliche Theorie durch empirische Mittel (Beobachtung und Messung) verifiziert – endgültig bestätigt – werden kann, hat kaum noch Anhänger. Weitgehend durchgesetzt hat sich stattdessen der *Falsifikationismus* (Popper, 1934), wonach naturwissenschaftliche Theorien immer nur relativ glaubwürdig gemacht werden können, und zwar dadurch, dass sie empirisch testbare Voraussagen machen, die überprüfbar (falsifizierbar!) sind und dann ständigen Versuchen ihrer Falsifikation standhalten, was ihre Glaubwürdigkeit ständig erhöht, jedoch ohne sie jemals hundertprozentig absichern zu können.

analytisch und apriorisch sind: Und das sind genau diejenigen, die durch logisches Folgern gewonnen werden. Und es gibt Urteile, die synthetisch und aposteriorisch sind: diejenigen, die durch (sinnliche) Erfahrung gewonnen werden:

	apriorisch	aposteriorisch
analytisch	logische Folgerungen	-----
synthetisch	????????????????	Erfahrungsurteile

Kant fragte sich, „ob es *synthetische Urteile a priori* gibt“. Er bejahte diese Frage und sah in den synthetischen Urteilen a priori die interessantesten Urteile überhaupt. Da sich diese Urteile weder auf *Erfahrung* noch auf *Strukturen des Gesagten* gründen, meinte Kant, dass diese Urteile auf *Strukturen unserer Anschauung und unseres Denkens* beruhen: Unsere Erkenntnisvermögen können die Dinge nicht anders darstellen. Seine Beispiele für synthetische Urteile a priori (z.B. „7 + 5 = 12“, „Materie bleibt erhalten“, „alle Veränderung hat eine Ursache“) sind allerdings heute sämtlich umstritten, weil sie teils als analytisch gewertet werden („7 + 5 = 12“), teils als widerlegt gelten („Materie bleibt erhalten“), und teils als zumindest zweifelhaft angesehen werden („alle Veränderung hat eine Ursache“).¹⁴ Echte synthetische Urteile a priori müssten unmittelbar evidente Sätze sein, und als solche kommen vor allem die ersten Voraussetzungen (Axiome) mathematischer und logischer Theorien in Frage (z.B. der Satz vom Widerspruch, die Axiome der Mengenlehre, Arithmetik und Geometrie), aber auch einige nicht zur Logik und Mathematik gehörige Wesensgesetze, auf welche vor allem die phänomenologische Philosophie aufmerksam gemacht hat (z.B. „Wollen setzt Erkennen voraus“; „Farbe ist nicht ohne Oberfläche denkbar“, „Gedanken haben keine Ausdehnung“ usw.) Dabei ist es problematisch, mit Kant die Grundlage für die Erkenntnis dieser Sätze in die Struktur unserer Erkenntnisvermögen zu verlegen, weil die Erkenntnis dann gar nicht wahr sein muss, und somit keine wirkliche Erkenntnis wäre. Eine Alternative zur Kant’schen Erklärung ist die phänomenologische, die in Anlehnung an Husserl († 1938) als Grundlage eine *nichtsinnliche Erfahrung* postuliert, ein *unmittelbares Gewahrwerden* notwendiger Seinsgesetze.

1.24. Bedeutungstheorien

- a) *mentalistische Bedeutungstheorie* (Locke, † 1704): Worte stehen immer für *Ideen im menschlichen Geist*.
- b) *referentielle Bedeutungstheorie* (Frege, † 1925): Diese ist für die moderne mathematische Logik richtungweisend. Frege unterscheidet scharf zwischen dem *Sinn* und der *Bedeutung* eines Ausdrucks bzw. Begriffs (siehe hierzu Abschnitt 1.19), während in den anderen Theorien beides mehr oder weniger identifiziert wird. Die *Bedeutung* ist der bezeichnete Gegenstand, sein *Sinn* ist der im Ausdruck bzw. Begriff erscheinende inhaltliche Aspekt des Gegebenseins. Ausdrücke / Begriffe mit derselben Bedeutung können verschiedenen Sinn haben, z.B. ist die Bedeutung von „Abendstern“ und „Morgenstern“ dieselbe (nämlich der Planet Venus), aber der Sinn ist verschieden (es werden verschiedene Erscheinungsformen der Venus angesprochen). Eine Besonderheit der Fregeschen Logik ist noch, dass nicht nur Terme (insbesondere Kennzeichnungen), sondern auch Formeln (insbesondere Aussagen) eine Bedeutung haben: Die Aussagen referieren auf ihren Wahrheitswert, so dass nach Frege wahre Aussagen den Wahrheitswert „wahr“ (den Frege „das Wahre“ nennt) bezeichnen, falsche Aussagen aber den Wahrheitswert „falsch“. Alle wahren Aussagen „bedeuten“ also dasselbe (nämlich das „Wahre“), aber sie sprechen verschiedene Aspekte des Wahren an und haben daher einen verschiedenen Sinn.
- c) *kontextuelle Bedeutungstheorie, semantischer Holismus* (Wittgenstein, † 1951; John Austin, † 1960): Wörter und Sätze haben *gar keine selbständige Bedeutung*, eine Bedeutung erschließt sich nur durch den Gebrauch der Worte und Sätze im „Sprachspiel“ (Wittgenstein) und durch den „Sprechakt“ (Austin). Das bloße Aussprechen eines Satzes ist ein *lokutionärer Akt*. Kommt eine Absicht hinzu, ist es ein *illokutionärer Akt*. Übt er eine Wirkung auf den Hörer aus, ist es schließlich ein *perlokutionärer Akt*. Nur in den Absichten und Wirkungen liegt die außersprachliche Bedeutung.

1.25. Definitionen

Allgemeines. Eine *Definition* (Festlegung, Eingrenzung, Bestimmung) eines Ausdrucks (oder mentalistisch: eines Begriffs) soll entweder seine schon vorhandene Bedeutung oder allgemeiner seine semantische Funktion erklären oder diese Bedeutung präzisieren oder dem Ausdruck, falls er noch gar keine Bedeutung hat, eine Bedeutung erstmalig zuzuschreiben, und zwar durch Rückgriff auf die schon bekannte Semantik anderer Ausdrücke / Begriffe mit möglichst präziser Bedeutung. Der zu erklärende, präzisierende oder neu einzuführende Ausdruck / Begriff heißt das *Definiendum*, der bekannte bzw. alte Ausdruck/Begriff mit präziserer Bedeutung, auf den man bei der Definition zurückgreift, heißt das *Definiens*. Man schreibt

Bei der Erklärung / Einführung eines neuen Terms:	Bei der Erklärung / Einführung einer neuen Formel:
<p style="text-align: center;">Definiendum := Definiens, z.B. Schimmel := weißes Pferd (:= wird gelesen: „ist per Def. äquivalent“ oder „gleich“) statt := verwendet man auch := (vgl. ≡ in Abschnitt 2.1)</p>	<p style="text-align: center;">Definiendum :<=> Definiens, z.B. a kleiner gleich b :<=> a ist kleiner oder gleich b (:<=> wird gelesen: „ist definitionsgemäß äquivalent“)</p>

Man fordert für eine Definition:

1. *Austauschbarkeit salva veritate* („bei gleichbleibender Wahrheit“): In möglichst jeder Aussage – abgesehen von den in der Gleichheitslogik (siehe Kap. 2) zu behandelnden Ausnahmen – soll ein Austausch von Definiens und Definiendum den

¹⁴ Die Apriorizität des Ursächlichkeitsgrundsatzes hatte schon David Hume († 1776) in Zweifel gezogen, dieser Grundsatz beruhe auf dem Fehlschluss: „Post hoc, ergo propter hoc“ (weil B der Erfahrung nach bisher immer *nach* A eingetreten ist, schließe man ungerechtfertigterweise, dass B *wegen* A eintritt, d.h. dass A Ursache von B sei. Hume glaubte dennoch, dass der Ursächlichkeitsgrundsatz wahr ist, aber nur als empirisch gerechtfertigte kontingente Tatsache. Doch ist die Apriorizität (und somit absolute Notwendigkeit) des Ursächlichkeitsgrundsatzes wiederum etwa von Alexius Meinong († 1920) mit interessanten Argumenten verteidigt worden, worauf hier nicht weiter eingegangen werden kann.

Wahrheitswert unberührt lassen. Gewöhnlich ist das Definiendum einfach eine Abkürzung für das Definiens. Das ist offensichtlich bei dem Wort „Schimmel“ der Fall, das man definiert als „weißes Pferd“. Dagegen würde man verstoßen, wenn man etwa ein Wort kontextabhängig definiert, so dass es nicht immer für ein und dasselbe Definiens steht.

2. *Nichtzirkularität*: Das Verständnis des Definiens darf das Verständnis des Definiendum nicht schon voraussetzen (erst recht darf das Definiendum nicht im Definiens vorkommen). So darf man „Philosophie“ nicht definieren als „Wissenschaft, in der Philosophie betrieben wird“. Aber auch, wenn man „links“ durch „wo der Daumen rechts ist“ definiert, und dann „rechts“ durch „wo der Daumen links ist“, verstößt man gegen das Prinzip der Nichtzirkularität.
3. *Nichtredundanz*: Das Definiens soll möglichst kurz sein, also keine überflüssigen Merkmale nennen. Z.B. kann man in der Definition des Dreiecks als „ein Vieleck mit drei Ecken und drei Innenwinkeln“ das „und drei Innenwinkeln“ streichen, da jedes Vieleck mit drei Ecken notwendigerweise auch drei Innenwinkel hat.
4. *Präzision*: Sie muss *genau angemessen* sein (nicht zu weit oder zu eng), *möglichst einfach verständlich*, und wirklich *aufklärend* (das Definiens darf nicht unklarer sein als das Definiendum – dieser Fehler heißt „*obscurum per obscurius*“), und sollte *möglichst nicht negativ* formuliert sein (man sage, was es „ist“, nicht bloß, was es „nicht ist“).

Rekursive Definition. In einer sog. *rekursiven Definition* verstößt man scheinbar gegen die Nichtzirkularität; man definiert z.B. die Potenz zuerst durch $x^1 := x$ (Rekursionsanfang), dann aber für alle anderen Fälle durch $x^{n+1} := x^n \cdot x$ (Rekursionsgleichung). Bei dieser Rekursionsgleichung kommen links und rechts vom Gleichheitszeichen Potenzen vor. Das ist jedoch nur scheinbar zirkulär, weil die neu einzuführende Potenz links durch eine schon bekannte Potenz rechts erklärt wird. Es handelt sich also nicht um ein zirkuläres, sondern gewissermaßen um ein „spiralförmiges“ Vorgehen.

Definitionsschema. Oft benutzt man beim Definieren Variablen für Ausdrücke, so dass man viele Definitionen simultan durch eine einzige Zeile darstellt (dies ist auch bei den gerade betrachteten rekursiven Definitionen der Fall). Es handelt sich dann nicht um eine Einzeldefinition, sondern um ein sog. „*Definitionsschema*“, das für viele (eventuell unendlich viele) einzelne Definitionen steht. Z.B. kann man alle mit dem „Heiratssymbol“ ∞ gebildeten Ausdrücke simultan definieren durch die Zeile:

Für Frauen f und Männer m definieren wir: $f \infty m \Leftrightarrow f$ ist verheiratet mit m .

Dieses Definitionsschema steht simultan für alle Einzeldefinitionen, die man erhält, wenn man für die Exemplare der Variablen f solche eines beliebigen Ausdrucks a_f einsetzt, und für jene von m solche eines beliebigen Ausdrucks a_m (der von a_f verschieden oder auch mit ihm identisch sein kann). Bezeichnet der für f eingesetzte Term a_f eine Frau und der für m eingesetzte a_m einen Mann, hat die Definition ihre natürliche Bedeutung, d.h. sie macht $a_f \infty a_m$ zu einer *wahren Aussage*, falls die durch a_f und a_m bezeichneten Personen verheiratet sind, und sonst zu einer *falschen Aussage*. Wann immer aber a_f und a_m geschlossene Ausdrücke sind, die keine Frau bzw. keinen Mann bezeichnen, entsteht ebenfalls eine *falsche Aussage*. Setzt man schließlich einen offenen Term (z. B. eine Variable) für m oder f ein, erhält man eine *Aussageform*.

Die einem Definitionsschema eventuell vorgeschaltete Bedingung (wie in unserem Beispiel „für Frauen f und Männer m “) könnte man so auffassen, dass wenn diese nicht erfüllt ist, gar keine Definition vorgenommen wird. In diesem Sinn sollten Bedingungen aber nur dann verstanden werden, wenn sie *explizit auf Ausdrücke oder auf bestimmte Arten von Ausdrücken Bezug nehmen* (z. B. „für Variablen x und Ausdrücke A sei definiert: ...“). Nehmen dagegen Bedingungen nicht explizit auf Ausdrücke Bezug, so sollen sie lediglich den Zweck haben, den Leser darauf hinzuweisen, *welches die vorgesehenen Fälle sind, für welche man den neu definierten Ausdruck konzipiert hat*, in denen man ihn also einzusetzen gedenkt – ohne jedoch andere Fälle auszuschließen. Man vermeidet auf diese einfache Weise undefinierte Ausdrücke (siehe auch Abschnitt 1.16).

Real- und Nominaldefinition. Eine *Realdefinition* möchte einem realen Phänomen auf den Grund gehen und seine Wesensmerkmale erfassen. Beispiele sind die klassische Versuche, den Menschen zu definieren (siehe unten). Eine *Nominaldefinition* ist eine Festlegung des Sprachgebrauchs; sie heißt *deskriptiv* (auch: lexikalisch, analytisch) oder *stipulativ* (auch: synthetisch), je nachdem, ob sie sich am bereits bestehenden Sprachgebrauch orientiert oder ob sie einen neuen Sprachgebrauch einführen will; schließlich heißt sie *explikativ*, wenn sie zwar keinen radikal neuen Sprachgebrauch einführt, aber ein im gewöhnlichen Sprachgebrauch unklares Wort näher erklärt (explikative Definitionen nehmen oft Philosophen vor, wenn sie unklare Worte wie z.B. „Materie“, „Person“, „Wert“, „Gerechtigkeit“ usw. zu explizieren versuchen). Eine stipulative Definition kann nicht falsch oder richtig sein (es handelt sich um Festlegungen/Festsetzungen), das kann aber eine deskriptive und erst recht eine Realdefinition (hier handelt es sich zumindest teilweise um eine Feststellung des Vorgegebenen).

Definitionen in der modernen Mathematik und der modernen formalen Logik sind ausschließlich stipulativ, also weder wahr noch falsch; sie können stattdessen nur unbrauchbar oder mehr oder weniger gut brauchbar sein.

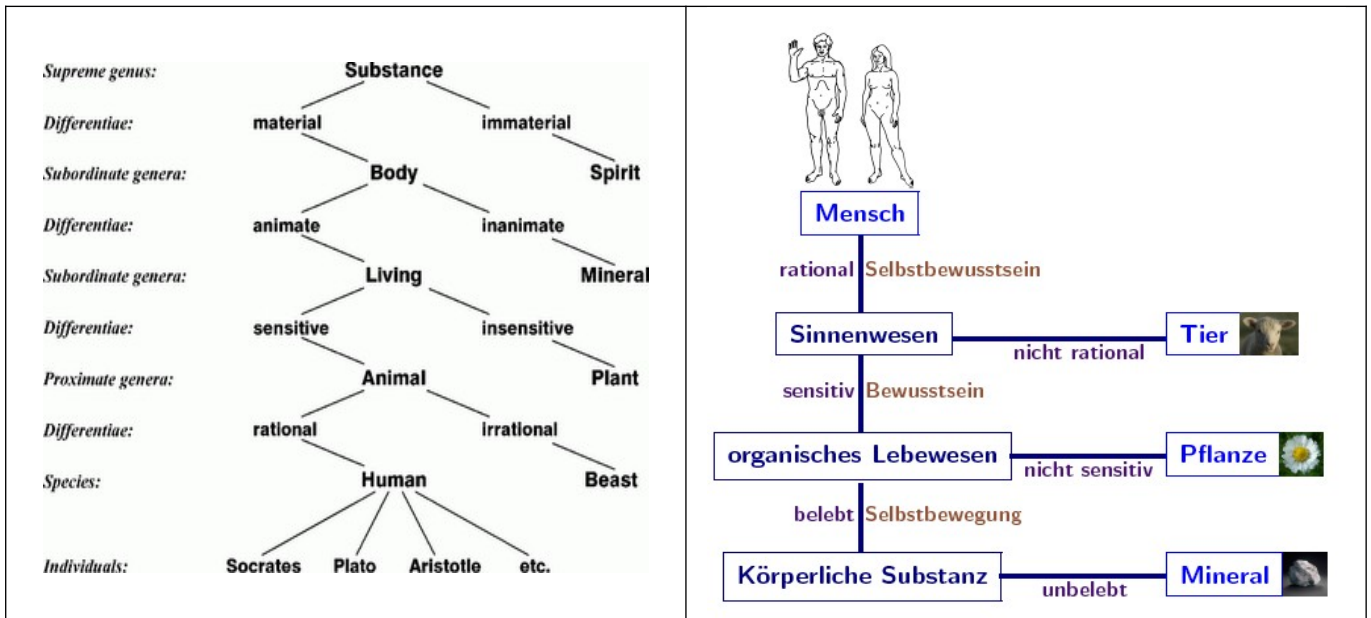
Klassische Begriffsdefinition. Bei der *klassischen Begriffsdefinition* besteht das Definiens aus zwei Begriffen:

- dem Gattungsbegriff, unter den der neue Begriff fällt (sog. *genus proximum*, die nächst höhere Gattung) und
- der *spezifischen* (artbildenden) *Differenz*, die den Begriff von anderen unter die Gattung fallenden Begriffen abgrenzt.

So definiert man in der aristotelischen Philosophie, wie sie Porphyrius darstellt („Baum des Porphyrius“),

- den *Menschen* als „rationales Sinnenwesen“ Gattung: Sinnenwesen; spezifische Differenz: rational
- das *Sinnenwesen* als „sensitives Lebewesen“ Gattung: Lebewesen; spezifische Differenz: sensitiv
- das *Lebewesen* als „selbstbewegten Körper“ Gattung: Körper; spezifische Differenz: selbstbewegt
- den *Körper* als „ausgedehnte Substanz“ Gattung: Substanz; spezifische Differenz: ausgedehnt

Ausführlich wäre die Definition des Menschen demnach „eine rationale sensitive selbstbewegte ausgedehnte Substanz“;



Nichtklassische Definitionen. Neben den bislang betrachteten *klassischen Definitionen* gibt weitere, bei denen die Festlegung ganz andersartig erfolgt:

a) bei *impliziten* Definitionen werden Ausdrücke durch Regeln für den kontextuellen Gebrauch definiert (vgl. die hierzu passende kontextuelle Bedeutungstheorie). Ein Beispiel hierfür ist, wie in der modernen axiomatischen Geometrie die Begriffe Punkt, Gerade und Ebene „definiert“ werden: nicht durch explizite Definition, sondern indem man einfach bestimmte Grund-Sätze (Axiome) angibt, die für sie gelten sollen.

b) *operationale* Definitionen bestehen in Handlungsvorschriften (etwa Vorschriften zur Messung oder Herstellung). Beispiel: Eine Fläche heißt *eben*, wenn sie eine durch das Dreiplattenverfahren (das gegeneinander Abschleifen von drei Flächen) hergestellte Fläche ist oder wenn sie ein durch eine solche Fläche abdeckbarer Ort ist.

c) *(epi)deiktische* Definitionen bestehen im hinweisenden Zeigen auf ein Exemplar, das die zu definierende Eigenschaft hat. Hiermit verwandt ist das Verfahren zur Verdeutlichung von nicht weiter analysierbaren sog. Urphänomenen (wie „Zeit“, „wirken“, „leben“, „Bewusstsein“, „erkennen“, „wollen“, „lieben“, „heilig“, „Religion“, „Wahrheit“, „Freiheit“), das darin besteht, dass man so lange auf Beispiele und Gegenbeispiele verweist, bis der Lernende den Begriff in sich selbst konzipiert: „Es ist so wie ..., aber nicht so wie Kannst du es dir nun selbst vorstellen?“

Definitionsartige Vereinbarungen. Als Letztes sind zu erwähnen *definitionsartige Vereinbarungen*, bei denen es sich nicht um wirkliche Definitionen handelt:

1. *nicht-semantische* (also syntaktische oder pragmatische) sprachliche Bestimmungen.
2. metasprachliche *schreibtechnische Vereinbarungen*, die inhaltlich nicht (für die Objektsprache) spracherweiternd sind, die man trifft, um von der Systematik einer logischen Sprache abweichende, aber bequem lesbare *Varianten von Ausdrücken als metasprachliche Namen* für die eigentlichen Ausdrücke einzuführen. Dies geschieht z.B., wenn man die klammerlosen Ausdrücke der „polnischen Notation“ als die eigentlichen Ausdrücke einer logischen Sprache eingeführt hat, aber in konkreten Diskursen weiterhin die alltagssprachlich vertraute Syntax verwenden möchte, bei denen dann Klammern oder Abstände zur Vermeidung von Doppeldeutigkeiten zu benutzen sind. Zweites Beispiel: Wenn man in der Syntax einer logischen Sprache nur Zeichenreihen (nebeneinander stehende Zeichen) zulässt, kann man zur besseren Lesbarkeit vereinbaren, auch gewisse Schreibweisen mit unter- oder ineinander stehenden Zeichen als Namen für die eigentlichen Ausdrücke zu benutzen.
3. *Festlegungen des Objektbereichs von Variablen* (z.B. „seien m und n natürliche Zahlen“).
4. *Belegungen von Variablen* (z.B. „sei nun x die kleinste Primzahl größer als 1050“).
5. Einführung einer *nur vorübergehend verwendeten Abkürzung*, die man etwa nur im Rahmen eines Beweises verwendet möchte (z.B. „stehe x^* für den Term $x^2/\neg(x+1)$ “).

Übung 5: Notieren Sie, ob jede der folgenden Definitionen korrekt ist und was gegebenenfalls fragwürdig ist; machen sie eventuell Verbesserungsvorschläge. Um was für eine Definition (deskriptiv, stipulativ, explikativ) handelt es sich?

- (1) Junggesellen sind unverheiratete Männer.
- (2) Frauen sind unergründlich.
- (3) Katzen sind Lebewesen.
- (4) Philosophen sind nachdenkliche Menschen.
- (5) Ein Kreis ist Linie, die aus kreisförmig angeordneten Punkten besteht.
- (6) Theologie ist alles, was nicht Natur- und Kulturwissenschaft ist.
- (7) Die Vergangenheit ist der Friedhof der Möglichkeiten.
- (8) Eine gerade Zahl ist eine natürliche Zahl, bei der sich nach Division durch zwei nicht der Rest 0 ergibt.
- (9) Ein Cousin ersten Grades von x ist eine männliche Person, dessen Vater ein Onkel von x ist.
- (10) Ein Mensch ist ein vernunftbegabtes Lebewesen.
- (11) Ein Mensch ist ein lachen könnendes Lebewesen.
- (12) Ein Mensch ist ein zweibeinig ungefedertes Lebewesen.
- (13) Personen sind kommunikationsfähig und ihrer selbst bewusste Säugetiere.
- (14) Personen sind ein Spezialfall von Lebewesen.
- (15) Substanzen sind maximal selbständige Dinge.
- (16) Wissen ist gerechtfertigt wahrer Glaube.
- (17) Das logische „oder“ ist ein Wort, das die Verbindung von Aussagen zu einer komplexeren Aussage erlaubt.
- (18) Linguistik ist die Wissenschaft, die Sprache untersucht und erforscht.
- (19) Architektur ist Stein gewordene Musik.

Versuchen Sie selbst eine Definition der folgenden Begriffe (überlegen Sie zuerst, welche Art von Definition hier angemessen

wäre): (a) Metaphysik, (b) Logik, (c) Engel, (d) Teilmodulprüfung.

1.26. Wahrheitstheorien

Was ist Wahrheit? Zu dieser „Pilatusfrage“ (Joh 18,38) gibt es im Wesentlichen folgende Antworten:

- a) klassisch ist die *Korrespondenztheorie / Übereinstimmungstheorie* (Aristoteles, Thomas von Aquin, Kant, Tarski): Eine Aussage bzw. ein Urteil ist wahr, wenn der entsprechende Sachverhalt besteht (also eine Übereinstimmung oder Korrespondenz zwischen dem Satz bzw. Urteil und der Wirklichkeit besteht, eine *adaequatio intellectus et rei*). Allerdings ist dies keine adäquate „Definition“ der Wahrheit, da hier Wahrheit im Definiens vorausgesetzt werden muss: Etwas ist definitionsgemäß wahr, wenn es *wahr* ist, dass es mit der Wirklichkeit übereinstimmt.¹⁵ Verwandt mit der Korrespondenztheorie ist die *Redundanztheorie* von Ramsey († 1930): Da „p ist wahr“ genau dann wahr ist, wenn einfach nur „p“ gilt, wird der Wahrheitsbegriff in dieser Theorie als *semantisch überflüssig* angesehen.
- b) Nach der *Gegenstandstheorie* (Frege, † 1925) ist Wahrheit („das Wahre“) keine Eigenschaft, sondern ein Gegenstand (oder, wie Frege sagt, ein „Umstand“), der nicht weiter analysierbarer / definierbar ist (siehe Fußnote 15 und Abschnitt 1.16), den aber alle wahren Aussagen bezeichnen. Es ist einer der zwei Pole („das Wahre“, „das Falsche“) des logischen Universums, auf den sich alle Aussagen beziehen (siehe Abschnitt 1.29). Sowohl die Korrespondenztheorie als auch die Gegenstandstheorie der Wahrheit haben sich als Grundlagen der Logik bewährt, obwohl beide philosophisch ihre Dunkelheiten haben.
- c) Unzureichende oder zumindest mit der Logik nur schwer verträgliche Theorien sind dagegen:
 - die *pragmatischen* Wahrheitstheorie (James, Dewey), wonach Wahrheit ist, was sich allgemeine Anerkennung erwirbt, weil es für den Menschen nützlich, erfolgreich und lebensdienlich ist (Wahrheit wird mit Nützlichkeit gleichgesetzt);
 - die *Konsenstheorie* (Habermas, Apel), wonach Wahrheit ist, worauf man sich im herrschaftsfreien Diskurs einigt;
 - die *Kohärenztheorie* (Bradley, Neurath), wonach eine Aussage wahr ist, wenn man sie widerspruchsfrei (konsistent) und zwanglos in das Gesamtsystem der Wissenschaft eingliedern kann.

1.27. Das Kontradiktionsprinzip

Als das fundamentalste logische Gesetz gilt das **Kontradiktionsprinzip**. Dies hat zwei Aspekte:

- (K1) Von den Sachverhalten (bzw. Urteilen bzw. Aussagen) „S“ und „nicht S“ ist stets genau einer wahr.
(K2) Ein Sachverhalt (bzw. ein Urteil bzw. eine Aussage) „S“ ist entweder wahr oder falsch.¹⁶

(K1) ist das K-Prinzip bzgl. *Bejahung und Verneinung*, (K2) *dasjenige bzgl. des Wahrheitswertes*.

Man pflegt dieses Prinzip gewöhnlich aufzuteilen in zwei Prinzipien

(1) den **Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch**:

- (1a) bzgl. Bejahung und Verneinung, dass „S“ und „nicht S“ *nicht zugleich gilt*, also *höchstens eins von beiden* gilt.
(1b) bzgl. des Wahrheitswertes besagt dieser, dass S *höchstens* einen Wahrheitswert (also nicht beide) hat, und

(2) den **Satz vom ausgeschlossenen Dritten** (das sog. „*Tertium non datur*“)

- (2a) bzgl. Bejahung und Verneinung, dass *mindestens* eines von beiden (S oder nicht S) gilt.
(2b) bzgl. des Wahrheitswertes besagt dieser, dass jeder Sachverhalt *mindestens* einen der beiden Wahrheitswerte hat, und

Bemerkung 1: Im engeren Sinne versteht man unter dem Satz vom Widerspruch und dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten die Sätze (1a) und (2a); in dieser Form sind sie auch von Aristoteles ausgesprochen worden. Für den Satz (1b) ist die Bezeichnung *Konsistenzprinzip* vorgeschlagen worden, und Satz (2b) heißt auch das *Bivalenzprinzip*.

Bemerkung 2: Klassisch behauptet man nur, dass „S“ und „nicht S“ nicht „gleichzeitig“ und „in derselben Hinsicht“ zugleich wahr sein können (Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch), und eine entsprechende Einschränkung macht man auch bei den anderen Behauptungen. Denn ist es klar, dass unter Umständen zwei gegensätzliche Aussagen „S“ und „nicht S“ zu verschiedenen Zeiten wahr sein können, ebenso bezüglich verschiedener Standpunkte etc. Das liegt aber nur daran, dass „S“ und „nicht S“ *nicht vollständig und nicht präzise genug* formuliert sind, man hat einfach den in der jeweiligen Behauptung vorausgesetzten Zeitbezug, Standpunktsbezug usw. weggelassen. Gehen wir von vollständiger explizierter Formulierung aus, in dem relevanten alle Bezüge zur Zeit, Ort und anderen relativierenden Faktoren enthalten sind, kann man die Einschränkungen „gleichzeitig“ und „in derselben Hinsicht“ weglassen.

1.28. Warum gilt das Kontradiktionsprinzip?

Die sprachorientierte moderne Logik formuliert das Prinzip lediglich für Aussagen: *Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch, und die Aussagen A und nicht A haben stets verschiedene Wahrheitswerte*. Vom Standpunkt der modernen Logik her gesehen sind diese Feststellungen pure Selbstverständlichkeiten. Man betrachtet hier nämlich Aussagen als Zeichenreihen, denen man nach festen Regeln eines von zwei Objekten w und f zuordnet, die man als Repräsentanten der beiden „Wahrheitswerte“ auffasst, und nennt eine Aussage falsch bzw. wahr, wenn man ihr w bzw. f zugeordnet hat. Dabei ordnet man der Aussage „nicht A“ stets genau dann w bzw. f zu, wenn man zuvor der Aussage A das Objekt f bzw. w zugeordnet hat. Dass in dem so konstruierten System die genannten Prinzipien gelten, ist nicht verwunderlich, *weil die logische Sprache gerade so aufgebaut wird, dass sie gelten*.

Man kann genauso gut alternative Logik-Systeme entwerfen, z.B. eine *dreiwertige Logik* mit den drei Wahrheitswerten w, f und u (für „unentschieden“), und dann legt man die Semantik so fest, dass vorgenannte Prinzipien jetzt *nicht* mehr gelten. Und damit, so meinen manche, sind diese alten und verstaubten Prinzipien keine wirklich „ewig gültigen“, die uns vorgegeben wären und nach denen wir uns richten müssten.

Aber: Ganz so einfach ist das nicht. Damit nämlich die Festlegungen des Logikers (egal ob er eine zwei- oder mehrwertige Logik

¹⁵ So ist Freges Kritik an dieser Theorie nachvollziehbar; er kann ihr allerdings keine bessere Definition entgegensetzen, sondern begreift Wahrheit als undefinierbares Urphänomen: „Wahrheit ist offenbar etwas so Ursprüngliches und Einfaches, dass eine Zurückführung auf noch Einfacheres nicht möglich ist“ (Frege, Logik (1897), in: Nachgelassene Schriften, Hamburg, 2. Aufl. 1983, S. 140).

¹⁶ Manche legen Wert darauf, dass man die Wahrheitswerte *wahr/falsch* nur Urteilen und Aussagen, nicht Sachverhalten zuschreibt; bei Sachverhalten habe man statt dessen vom *bestehen/nicht bestehen* zu reden. Wer will, kann die Prinzipien in Bezug auf Sachverhalte entsprechend umformulieren.

aufbauen will) einen *wirklich* feststehenden Sinn haben, muss er sich auf die Gültigkeit eines tiefer liegendes Kontradiktionsprinzip verlassen können, das nicht mehr auf der Aussage-Ebene, sondern auf der Sachverhaltsebene liegt. Denn bei seinen „Festlegungen“ greift der Logiker ja auf Sachverhalte von der Art zurück, *dass einer bestimmten Zeichenreihe A der Wahrheitswert w oder f oder u zugeordnet worden ist*. Dass aber *diese* Sachverhalte ebenfalls den beiden Kontradiktionsprinzipien unterliegen, ist eine vorgegebene *ontologische* Tatsache, welche die Logik nicht geschaffen hat, sondern voraussetzen muss. Denn es wäre für die Logik fatal, könnte der Logiker sich nicht a priori darauf verlassen, dass es einer bestimmten Aussage entweder w als Wahrheitswert zugeordnet hat oder dies nicht getan hat, und dass der Sachverhalt, dass er dieser Aussage w zugeordnet hat, entweder zutrifft oder nicht, d. h. entweder wahr oder falsch ist.

Das Kontradiktionsprinzip ist also *Bedingung der Möglichkeit logischen Redens*. Ein regelrechter (zirkelfreier) „Beweis“ für dieses Prinzip aber ist nicht möglich, weil es bei jedem Beweis schon vorauszusetzen ist. Es ist hier also an unmittelbare Einsicht zu appellieren, wir haben es anscheinend mit einem synthetischen Urteil a priori zu tun.

1.29. Über die dem Kontradiktionsprinzip zugrundeliegende logische Intuition

Auf der ontologischen Ebene folgt das Kontradiktionsprinzip in seiner ersten Formulierung „S ist entweder wahr oder falsch“ keinesfalls aus einer bloßen Analyse der Sachverhalte S, sondern kommt erst durch eine Zusammenschau der Begriffe „Sachverhalt“, „wahr“ und „falsch“ zum Vorschein.¹⁷ Ebenso ist zur zweiten Formulierung („Entweder S oder nicht S ist wahr“) zu sagen, dass der aus „S“ durch Negation gebildete neue Sachverhalt „nicht S“ nicht schon per Definition ein solcher ist, dessen Wahrheitswert nicht mit dem von S identisch ist. Die der Negation zugrunde liegende Intuition dürfte vielmehr lediglich die Beobachtung sein, dass jeder Sachverhalt S immer genau einen *artgleichen Partner* besitzt, den man mittels Negation durch „nicht S“ beschreiben kann. Negiert man diesen wieder, erhält man den mit „nicht nicht S“ beschreibbaren Sachverhalt, der aber nicht ein dritter Sachverhalt, sondern mit S selbst identisch ist.¹⁸ Es sind „S“ und „nicht S“ artgleiche Sachverhalte, da sie denselben Inhalt vorgeben, dessen Bestehen einmal bejaht und einmal verneint wird. Es begründen also Bejahung und Verneinung ein „Auseinander“ artgleicher Sachverhalte, und so könnte man denken, dass Bejahung und Verneinung zwei Punkte eines abstrakten Universums sind, mit denen die positiven bzw. negativen Sachverhalte koinzidieren. Das wäre richtig, wenn man jeden Sachverhalt *in objektiver Weise* als positiv oder negativ charakterisieren könnte. Doch dies scheint nicht immer zwanglos möglich zu sein.¹⁹ Dagegen ist stets offenbar objektiv stets festgelegt, *welcher von beiden Sachverhalten der wahre und welcher der falsche ist*. Die beiden „Punkte“, welche das Auseinander der beiden Sachverhalte bewirken, sind daher nicht Bejahung und Verneinung, sondern Wahrheit und Falschheit. Diese Einsicht liegt dem Kontradiktionsprinzip bezüglich Verneinung und Bejahung zugrunde: Dass nämlich die beiden artgleichen, durch „S“ und „nicht S“ beschriebenen Sachverhalte sich stets so auf die beiden Wahrheitswerte verteilen, dass stets beide Wahrheitswerte mit je einem der Sachverhalte koinzidieren. Wir haben demnach ein Universum mit nur zwei Punkten vor uns, mit denen sämtliche Sachverhalte koinzidieren, und diese beiden Punkte können in Anlehnung an Freges Philosophie als die *Wahrheitswerte* „wahr“ (oder: *das Wahre*) und „falsch“ (oder: *das Falsche*) identifiziert werden. Dieses „logische Universum“ ist offensichtlich weder ein zeitliches noch ein räumliches, sondern neben Raum und Zeit noch ein drittes, die Wirklichkeit ebenso wie Raum und Zeit bestimmendes. –

Zusatz: Interessant ist noch, dass das Wahre und das Falsche keineswegs gleichberechtigte Pole sind. Denn erstens sind es die wahren und nicht die falschen Sachverhalte, welche die Wirklichkeit bestimmen, und zweitens ist auch rein logisch das Wahre gegen über dem Falschen ausgezeichnet, und zwar wie folgt: Ist S ein wahrer Sachverhalt, so ist „S ist wahr“ ein neuer wahrer Sachverhalt; ist dagegen S ein falscher Sachverhalt, so ist „S ist falsch“ keineswegs ein neuer falscher, sondern wieder ein neuer wahrer Sachverhalt. So gibt es also eine rein logisch begründete „Asymmetrie“ zwischen Wahrheit und Falschheit.

1.30. Paradoxien / Antinomien

Paradoxien (von griech. „para“ = „an vorbei“ und „doxa“ = „Meinung / Glaube“, also an der Meinung vorbei, unerwartet, unglaublich) sind Phänomene, die Gültigkeit der logischen Anschauungen in Frage stellen. Extrem paradoxe Phänomene heißen auch *Antinomien* (von griech. „anti“ = „gegen“ und „nomos“ = „Gesetz“, also gegen ein vermeintlich logisches Gesetz verstoßend); die weniger extremen Paradoxien nennt man manchmal auch *Pseudoparadoxien*.

Das älteste logische Paradoxon ist die *Lügner-Antinomie* des Kreters *Epimenides* (um 600 v. Chr., teilweise zu den „sieben Weisen“ der griechischen Antike gerechnet),²⁰ die im Neuen Testament (Tit 1,12) überliefert ist: „Die Kreter lügen immer“.²¹ Sagt Epimenides nun hier die Wahrheit, so lügen die Kreter immer, also lügt er. Lügt er jedoch, so scheint er die Wahrheit zu bestätigen, dass Kreter immer lügen, er sagt also die Wahrheit. – Eine einfachere Form des Paradoxons stammt von Eubulides (um 350 v. Chr., siehe S. 2): „Ich lüge jetzt“ – was genau dann gelogen ist, wenn es nicht gelogen ist.

Wieder eine andere Form verbirgt sich in den beiden folgenden Sätzen

Satz 1: Der nächste Satz ist wahr. – Satz 2: Der letzte Satz ist falsch.

¹⁷ Per Definition ist ein Objekt allein schon dann ein wahrer bzw. falscher Sachverhalt, wenn das Objekt als wahr bzw. falsch beurteilt werden muss – unabhängig davon, ob es womöglich *zugleich* als falsch bzw. wahr zu beurteilen wäre. Trivial ist allerdings der Satz vom ausgeschlossenen Dritten, wenn er bezüglich des Wahrheitswertes ausgesprochen wird: Denn dass ein Sachverhalt mindestens einen Wahrheitswert hat, gilt per Definition des Sachverhalts: Sachverhalte bestehen (sind wahr) oder bestehen nicht (sind falsch).

¹⁸ Dagegen sind die Aussagen „A“, „nicht A“ und „nicht nicht A“ drei voneinander verschiedene Aussagen, von denen die erste und die letzte äquivalent (aber nicht gleich) sind.

¹⁹ Denn ob z. B. der mit „X ist gerade“ beschriebene Sachverhalt positiv und der mit „X ist nicht gerade“ negativ ist, hängt von der Formulierung ab, man könnte ja den ersten Sachverhalt auch durch „X ist nicht krumm“ beschreiben und den zweiten durch „X ist krumm“.

²⁰ Nach Platon (Protagoras 343a) waren dies der erste Naturphilosoph *Thales* von Milet, *Pittakos* von Mytilene, *Bias* von Priene, der Gesetzgeber *Solon* von Athen, *Klebulos* von Lindos, *Myson* von Chenai und *Chilon* von Sparta. – Andere Siebenerlisten weichen mehr oder weniger hiervon ab, manche erwähnen unter den Sieben auch den kretischen Seher und Reinigungspriester *Epimenides*.

²¹ Im Titusbrief wird der Spruch einem nicht namentlich genannten kretischen „Propheten“ zugeschrieben; Clemens von Alexandrien schreibt (um 200 n. Chr.) das Zitat dem Epimenides zu.

FAZIT: Das Lügner-Paradoxon zeigt in allen seinen Varianten, dass unsere Erwartung (doxa), dass jeder beliebige syntaktisch korrekt gebildete Aussagesatz einer natürlichen Sprache entweder wahr oder falsch (und somit eine echte Aussage im logischen Sinn) ist, falsch ist. Ontologisch kann man das so deuten, dass der Begriff der Wahrheit in seiner weitesten Form (wenn wir ihn auf alle syntaktisch korrekten Aussagesätze ausdehnen), letztlich widersprüchlich ist, also dem Kontradiktionsprinzip nicht mehr gerecht wird. Die Wurzel des Übels scheint hier die *Selbstbezüglichkeit* (Zirkularität) zu sein, die eine *Unendlichkeit* (im Sinne von Unabgeschlossenheit) des Bedeutungszuweisungsprozesses impliziert: Denn die Entscheidung, ob der Satz wahr ist oder nicht, kommt hier niemals zum Abschluss (vgl. hierzu eine sog. „Endlosschleife“ in der Programmierung).

Erst im 20. Jahrhundert begann man sich intensiver mit Antinomien zu beschäftigen. Anstoß dafür war die Entdeckung einer neuen Antinomie im Jahre 1901, der sog. **Russellschen Antinomie**. Gottlob Frege hatte im ersten Band seiner Grundgesetze der Arithmetik (1893) als fünftes „Grundgesetz“ ein Axiom angeführt, welches voraussetzt, dass es zu jedem Begriff eine Menge gibt, der genau die Instanzen des Begriffs angehören. Anders gesagt: Zu jeder beliebigen präzise beschreibbaren Eigenschaft existiert eine Menge, die genau diejenigen Objekte enthält, welche diese Eigenschaft haben. Frege war „auf’s Höchste überrascht“, als ihm Bertrand Russell 1902 brieflich einen Begriff mitteilte, zu dem es offenbar *keine* entsprechende Menge gibt (Russell hatte darüber, wie er sagt, bereits ein Jahr nachgedacht, so dass die Entdeckung ins Jahr 1901 fällt). Es existiert keine Menge Ru, deren Elemente die Mengen X sind, die sich nicht selbst enthalten (für die also $X \notin X$ gilt). Diese „Russellsche Menge“ Ru wäre dadurch charakterisiert, dass für jede Menge X dann und nur dann $X \in Ru$ gilt, wenn $X \notin X$ gilt, was ein vollkommen klares Kriterium zu sein scheint, das für jede Menge X klärt, ob sie Element von Ru ist oder nicht. Wenn dies Kriterium aber für *jede* Menge X gelten soll, muss es auch für Ru selbst in der Rolle von X gelten: Dann aber besagt es, dass $Ru \in Ru$ dann und nur dann gilt, wenn $Ru \notin Ru$, was absurd ist. Es existiert also zu dem Begriff „Menge der Mengen, die sich nicht selbst enthalten“ keine Menge, deren Elemente genau die Instanzen dieses Begriffs sind. In seinem Antwortbrief an Russell bekannte Frege, ihm scheinbar nun „die einzig mögliche Grundlage der Arithmetik überhaupt zu versinken“. Von diesem Schlag hat er sich nicht mehr erholt. Ein in seinen letzten Lebensjahren 1924/25 geplanter „Neuer Versuch zur Grundlegung der Arithmetik“ blieb unvollendet.

Russell stellte dieser Mengen-Antinomie 1918 das analog aufgebaute **Barbier-Paradoxon** zur Seite: Ein Barbier entschließt sich, in einem Dorf alle diejenigen und nur diejenigen Männer zu rasieren, die sich nicht selbst rasieren. Dann aber muss er sich selbst genau dann rasieren, wenn er sich nicht rasiert – und das geht nicht. Das Barbier-Paradoxon gilt jedoch im Gegensatz zur Russellschen Mengen-Antinomie als *Pseudoparadoxon*, also ein leicht lösbares. Denn was daraus zu schließen ist, ist ja lediglich, dass ein solcher Entschluss, wie ihn der Barbier gefasst hat, eben unmöglich durchführbar ist; er hat bei der Formulierung seines Entschlusses nicht an sich selbst gedacht, und somit Unmögliches formuliert. Dies ist nicht weiter beunruhigend, denn dass manche Vorsätze sich bei genauerem Hinsehen als undurchführbar erweisen, kommt durchaus öfter vor. Anders ist es bei der Russellschen Menge. Zwar muss man hier ganz analog schließen, dass eine solche Menge nicht existiert, doch wurde diese Nichtexistenz als ein „verwirrendes und ungewöhnliches Ergebnis“ empfunden, „einfach unerklärlich“, weil gegen das durch Frege ausgesprochene, scheinbar „logische“ Prinzip der Mengenbildung verstoßend. Bei weiterem Nachdenken fand man hier auch einen anderen und interessanteren Ausweg als den, dass nichts dergleichen existiert: Es könnte nämlich eine Nichtmenge geben (sog. Unmenge, eine Kollektion höherer Art), welche genau die Mengen enthält, die sich nicht selbst enthalten: Unmengen sind im Gegensatz zu Mengen Vielheiten, die so groß sind, dass sie nicht zu einer Einheit zusammengefasst werden können, die wieder Element einer größeren Einheit sein kann (siehe hierzu Abschnitt 3 über Mengenlehre).

Die Russellsche Antinomie beflügelte Logiker, nach weiteren derartigen Paradoxien zu suchen, und es tauchten bald eine ganze Reihe davon auf, über die bis heute diskutiert wird. Wer auf eine gute Paradoxie stößt, den kann sie als Herausforderung an das Denken ein Leben lang begleiten und zum Denken anspornen: Zumindest bei Russell selbst war dies der Fall. So seien hier noch drei weitere in 20. Jahrhundert entdeckte Paradoxien genannt:

Das **Richard-Paradoxon**: 1905 entdeckte Jules Richard das folgende Paradoxon. Er stellte sich vor, dass alle mit endlich vielen Worten beschreibbaren Zahlen $x_1, x_2, x_3 \dots$ in einer gedanklichen Liste zusammengestellt sind. Man kann sich dann aber eine Zahl z denken, die mit 0,.... (also einer Null vor dem Komma) beginnt und die sich von der n -ten Zahl x_n in der Liste stets dadurch unterscheidet, dass ihre n -te Nachkommastelle die der n -ten Nachkommastelle von x_n folgende Ziffer ist (dabei gelte die Ziffer 0 als die der 9 folgende). Die so gebildete Zahl z unterscheidet sich somit von jeder Zahl in der Liste, also steht sie nicht in der Liste und dürfte daher nicht mit endlich vielen Worten beschreibbar sein – aber sie lässt sich dennoch mit endlich vielen Worten exakt beschreiben, denn das haben wir ja im letzten Absatz gerade getan.

Das **Berry-Paradoxon**: 1908 wurde von Russell ein ähnliches Paradoxon veröffentlicht, auf das der Bibliothekar George Berry gestoßen war und das dieser Russell mitgeteilt hatte: Man geht von der mathematisch bewiesenen und leicht einsehbaren Tatsache aus, dass es zu jeder Eigenschaft E, die auf gewisse natürliche Zahlen zutrifft, stets eine kleinste natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft gibt. Z.B. ist 2 die kleinste Zahl mit der Eigenschaft, „gerade“ zu sein, 100 die kleinste Zahl mit der Eigenschaft, im Zehnersystem durch drei Ziffern darstellbar zu sein usw. Berry betrachtet nun die Eigenschaft, in der englischen Sprache nicht mit weniger als 19 Silben benannt werden zu können. Die kleinste dieser Zahlen kann man nun aber als „the least integer not namable in fewer than nineteen syllables“ bezeichnen, was eine Benennung mit nur 18 Silben ist.

Schließlich das **Grelling-Paradoxon**, das 1908 von Kurt Grelling beschrieben wurde: Es gibt Eigenschaftswörter, die eine Eigenschaft bezeichnen, die auf sie selbst zutrifft. So ist das Wort „dreisilbig“ selbst dreisilbig, und das Wort „deutsch“ selbst deutsch. Solche Wörter nennt Grelling „autologisch“. Bei den meisten Wörtern ist dies *nicht* der Fall. So ist etwa das Wort „einsilbig“ nicht einsilbig. Solche Eigenschaftswörter, die also eine Eigenschaft ausdrücken, die auf diese selbst nicht zutrifft, nennt Grelling „heterologisch“. Nun scheint klar zu sein, dass jedes Eigenschaftswort entweder autologisch oder heterologisch sein muss. Man kann daher fragen: Ist das Eigenschaftswort „heterologisch“ selbst heterologisch?

- Wenn *ja*, darf die Eigenschaft, die es ausdrückt, nicht auf es selbst zutreffen. Also ist es dann *nicht* heterologisch.
- Wenn *nicht*, muss die Eigenschaft, die es ausdrückt, auf es selbst zutreffen. Also ist es dann *doch* heterologisch.

Somit ist das Wort „heterologisch“ genau dann heterologisch, wenn es nicht heterologisch ist.

FAZIT: Die Begriffe Benennbarkeit/Beschreibbarkeit (Richard/Berry) und des Elementseins/Zutreffens (Grelling/Russell) sind ebenso wie der Wahrheitsbegriff (Lügner-Antinomie) in bestimmten Kontexten widersprüchlich. Die Wurzel dieser Paradoxien ist hier, dass die Sprach- bzw. Reflexionsebene, auf der ein Begriff gebildet wird, „eine Stufe über“ der Ebene steht, denen die Instanzen des Begriffs angehören, so dass beim Versuch, über die Zugehörigkeit von höherstufigen Objekten zum Begriffsumfang zu entscheiden, wieder das Problem der Zirkularität/Unendlichkeit auftritt.

Mit all diesen Paradoxien/Antinomien ist nun aber keinesfalls „das Kontradiktionsprinzip und somit die Logik widerlegt“, sondern es ist nur aufgewiesen, dass wir Schwierigkeiten haben, die Phänomene des Unendlichen und der Selbstbezüglichkeit adäquat und klar zu erfassen. Dennoch sind unsere logischen Intuitionen nicht schlechthin falsch oder untauglich. Diesbezüglich sollte man unterscheiden zwischen *vollkommen klaren* Ideen, welche sich uns nach Art der wahren logischen Grundgesetze als unwiderlegbar präsentieren – hier scheint ein Irrtum ausgeschlossen – und *weniger klaren* Anschauungen, die eher den Charakter von sich aufdrängenden Vermutungen haben. Die irrige Anschauung z.B., die durch das Russellsche Paradoxon zerschlagen wurde, gehört eindeutig zur zweiten Kategorie. Dies hat auch Frege gewusst, und es ist sehr bezeichnend, wie er den verminderten Grad der Evidenz beschrieben hat, die er für sein fünftes Grundgesetz in Anspruch nahm. „Ich habe mir nie verhehlt, dass es nicht so einleuchtend ist, wie die anderen, und wie es eigentlich von einem logischen Gesetz verlangt werden muss“, schrieb er im Nachwort zum Band II seiner *Grundgesetze der Arithmetik*. „Und so habe ich denn“, heißt es weiter, „im Vorwort zum ersten Bande S. VII auf diese Schwäche hingewiesen“. Tatsächlich findet man an der bezeichneten Stelle des 1893 verfassten ersten Bandes – acht Jahre vor Russells Entdeckung (!) – die folgenden, fast prophetisch anmutenden Worte: „Ein Streit kann . . . nur um mein Grundgesetz der Werteverläufe (V) entbrennen, das von Logikern vielleicht noch nicht eigens ausgesprochen ist, obwohl man danach denkt . . . Ich halte es für rein logisch. Jedenfalls ist hiermit die Stelle bezeichnet, wo die Entscheidung fallen muss.“

2. Gleichheitslogik

2.1. Die eigentliche Gleichheitslogik

Unter der *qualitativen Identität* (Gleichheit im weiteren Sinn) versteht man die Identität von (inneren) Eigenschaften, die auch bei verschiedenen Eigenschaftsträgern gegeben sein kann. Bsp.: gleich große Kugeln aus demselben Material. Unter der *numerischen Identität* (Gleichheit im engeren Sinn) versteht man eine Beziehung, die Objekte zu sich selbst haben: *Jedes Objekt ist mit sich selbst und nur mit sich selbst (numerisch) identisch*. Ist a numerisch identisch mit b, so auch qualitativ identisch bzgl. aller inneren Eigenschaften. Nach Leibniz' *Principium Identitatis Indiscernibilium* (Indiszernibilitätsprinzip) soll auch die Umkehrung gelten (demnach gäbe es keine sich völlig gleichenden verschiedenen Dinge), aber das ist philosophisch umstritten. – Den Sachverhalt, dass a und b numerisch identisch sind, stellt man in einer *Gleichheitsaussage (Gleichung)* dar, indem man

$$a = b \text{ [lies: „a ist gleich b“] \quad schreibt}$$

was wahr ist, wenn die Terme a und b links und rechts vom Gleichheitszeichen = bzw. von Ungleichheitszeichen \neq ein und dasselbe Objekt bzw. verschiedene Objekte bezeichnen. Die Zeichen = und \neq beziehen sich auf unsere Objektsprache.

Sind T_1 und T_2 Terme, schreibt man $T_1 \equiv T_2$ [lies: T1 und T2 sind äquivalent],

wenn die Terme *bei jeder* zulässigen Interpretation dasselbe bezeichnen (also nach jeder Belegung der Variablen und Bewertung der Konstanten in T_1 und T_2 immer $T_1 = T_2$ gilt). Das Zeichen \equiv gehört der Metasprache an, in der wir über Zeichenreihen (statt direkt über die bezeichneten Objekte) reden. Wenn $T_1 \equiv T_2$ gilt, so auch $T_1 = T_2$, aber nicht umgekehrt. Ist z.B. T_1 die Variable x und T_2 die Variable y, kann man x und y als Bezeichnung für dasselbe Objekt interpretieren, und dann gilt $x = y$, aber nicht $x \equiv y$, da man x und y auch als Bezeichnung für verschiedene Objekte interpretieren kann. Dagegen gilt $x \equiv x$.

Ein philosophisches Rätsel über Gleichheitsaussagen ist das von Antisthenes (um 365 v. Chr.), dem Gründer der Kyniker-Schule, aufgestellt: Man kann nichts Bedeutsames durch eine Gleichheitsaussage sagen. Denn: Man sagt entweder $a = a$ oder $a = b$.

Nun ist „ $a = a$ “ zwar wahr, aber nicht bedeutsam, während „ $a = b$ “ zwar bedeutsam, aber nicht wahr ist.

Die Lösung des Rätsels, die Frege fand, besteht darin, dass „a“ und „b“ links und rechts vom Gleichheitszeichen verschiedene Bezeichnungen für dasselbe Objekt sind, die außer dem Objekt, was sie bezeichnen, noch jeweils eine verschiedene Konnotation (Mitbezeichnung) haben, d.h. sie bezeichnen verschiedene Aspekte dieses Objekts. Die Gleichung gibt also Auskunft darüber, dass diese Aspekte im selben Objekt zusammenkommen. Bsp.: Die Gleichung „Abendstern = Morgenstern“ drückt die bedeutungsvolle und lehrreiche (erst durch intensive astronomische Forschung ermittelte) Tatsache aus, dass Abendstern und Morgenstern ein und derselbe Planet ist.

Für Gleichungen gelten die folgenden unmittelbar evidenten Gesetze, die man als „Axiome der Gleichheitslogik“ bezeichnet:

1. Reflexivität: Für alle a gilt: $a = a$.
2. Symmetrie: Für alle a, b gilt: $a = b \Rightarrow b = a$ (aus $a = b$ folgt $b = a$).
3. Transitivität: Für alle a, b, c gilt: $a = b$ und $b = c \Rightarrow a = c$ (aus $a = b$ und $b = c$ folgt $a = c$).
4. Ersetzbarkeitsregel (von Leibniz): Seien a, b Kennzeichnungen, sei A(a) ein Ausdruck, in dem a vorkommt, und A(b) der Ausdruck, den man erhält, wenn man ein oder mehrere in Exemplare von a in A(a) durch b ersetzt. Wenn dann $a = b$ gilt, haben A(a) und A(b) dieselbe Bedeutung, d.h. es sind entweder beides Terme (Kennzeichnungen), die dasselbe Objekt bezeichnen, oder beides Formeln (Aussagen) mit demselben Wahrheitswert.
Kurz: Die Ersetzung von a durch b in A(a) ändert die Semantik nicht.
Formal: $a = b \Rightarrow A(a) = A(b)$, falls A(a) ein Term (eine Kennzeichnung) ist
und $a = b \Rightarrow A(a) \Leftrightarrow A(b)$, falls A(a) eine Formel (eine Aussage) ist.

Beispiele für die Anwendung der Ersetzbarkeitsregel:

Beispiel 1: Wir betrachten den Ausdruck der Hut von Fritz (was eine Kennzeichnung ist).

Angenommen, Fritz und Franz sind zwei Namen für dieselbe Person, so gilt „Fritz = Franz“.

Daraus folgt nach der Ersetzbarkeitsregel, dass auch „der Hut von Fritz = der Hut von Franz“ gilt.

Beispiel 2: Wir betrachten den Ausdruck Fritz ist 1,80 Meter groß (was eine Aussage ist).

Gilt wieder „Fritz = Franz“, so haben die Aussagen „Fritz ist 1,80 Meter groß“ und „Franz ist 1,80 Meter groß“ denselben Wahrheitswert, d.h. wenn die eine wahr ist, so auch die andere; wenn die eine falsch ist, so auch die andere.

Beispiel 3: Wir betrachten den mathematischen Ausdruck $7+5 = \frac{60}{5}$ (eine wahre Aussage). Nun sind 5 und $6-1$ verschiedene

Terme, die dasselbe Objekt bezeichnen (die Zahl fünf). Daher müssen nach dem Ersetzbarkeitsaxiom aus obiger Aussage wahre Aussagen entstehen, wenn man das erste oder zweite Exemplar der „5“ (oder beide) durch „ $6-1$ “ ersetzt, d.h. es sind auch

$$7+6-1 = \frac{60}{5} \text{ sowie } 7+5 = \frac{60}{6-1} \text{ und } 7+6-1 = \frac{60}{6-1} \text{ wahre Aussagen.}$$

Aus den Gleichheitsaxiomen kann man weitere Eigenschaften der Gleichheit ableiten (deduzieren). Um zu zeigen, wie dies geht, beweisen wir eine klassische Eigenschaft der Gleichheit, nämlich die

Komparativität: „Wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, sind sie auch einander gleich“,
formal: $a = c$ und $b = c \Rightarrow a = b$.

Beweis: Man kann dies allein mit den klassischen Axiomen der *Symmetrie* und *Transitivität* beweisen, und zwar so:

Sei $a = c$ und $b = c$. Per *Symmetrie* folgt aus $b = c$, dass $c = b$.

Aus $a = c$ und $c = b$ folgt dann weiter per *Transitivität*, dass $a = b$, q.e.d.

Die wirklich unverzichtbaren Axiome der Gleichheit sind bloß die Reflexivität und die Ersetzbarkeitsregel:

1. Reflexivität:	Für alle a gilt: $a = a$.
2. Ersetzbarkeitsregel:	Für alle a, b gilt: aus $a = b$ folgt für jeden Term $A(a)$, dass $A(a) = A(b)$, wobei $A(b)$ aus $A(a)$ durch Ersetzung eines oder mehrerer Exemplare der Kennzeichnung a durch die Kennzeichnung b hervorgeht.

Bemerkung: Hier haben wir die Ersetzbarkeitsregel eingeschränkt auf *Terme*. Aus $a = b$ folgt auch, dass jede *Formel* $A(a)$ denselben Wahrheitswert wie $A(b)$ hat; aber das lässt sich mit der Ersetzbarkeitsregel in der obigen Fassung wie folgt beweisen:

Beweis: Ist $A(a)$ eine Formel, so „der Wahrheitswert von $A(a)$ “ ein Term, also folgt aus $a = b$ und der Ersetzbarkeitsregel in der obigen Fassung, dass „der Wahrheitswert von $A(a) = \text{der Wahrheitswert von } A(b)$ “ ist, also haben $A(a)$ und $A(b)$ denselben Wahrheitswert, q.e.d. – Wir können also auf der Basis der obigen Axiome weiterhin die volle Ersetzbarkeitsregel benutzen.

Mit den obigen zwei Axiomen lassen sich nun die Symmetrie und die Transitivität wie folgt beweisen:

Symmetrie:	Für alle a,b gilt: $a = b \Rightarrow b = a$.
------------	--

Beweis: Sei $a = b$ vorausgesetzt. Per *Reflexivität* gilt auch $a = a$. In dieser wahren Formel dürfen wir nach der Ersetzbarkeitsregel das linke „a“ durch „b“ ersetzen. Wenn wir das tun, erhalten wir $b = a$. q.e.d.

Transitivität:	Für alle a,b, c gilt: $a = b$ und $b = c \Rightarrow a = c$.
----------------	---

Beweis: Übung 6a

Mit Hilfe der Ersetzbarkeitsregel lassen sich auch die folgenden mathematischen Umformungsregeln für Gleichungen ableiten:

Aus der Gleichung $a = b$ (mit Termen a und b, die Zahlen bezeichnen), folgt, dass auch die Gleichung gültig ist, die man erhält, wenn man	
a) auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Zahl c addiert:	(d.h. es gilt $a = b \Rightarrow a + c = b + c$)
b) auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Zahl c multipliziert:	(d.h. es gilt $a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$)
c) auf beiden Seiten der Gleichung die Wurzel zieht:	(d.h. es gilt $a = b \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$)

Beweis: Übung 6b

Bei genauer Überlegung stellt sich allerdings heraus, dass diese Regel gewissen *Einschränkungen* unterworfen werden muss:

- Es gilt $2 = 10 - 8$. Ersetzen wir nun aber in dem Term $22+5$ die zweite „2“ durch „10-8“, so erhalten wir $210-8+5$. Nach der Ersetzbarkeitsregel müsste also $22+5 = 210-8+5$ gelten, was falsch ist. Das liegt an einer Schwäche der üblichen Zahlenbezeichnungen, die nicht völlig den Standards einer idealen logischen Sprache entspricht, nämlich daran, dass die zweite „2“ von „22“ hier gar kein Objekt bezeichnet (in einer logisch idealen Sprachen sollte für die Zahl 22 nur ein einziges Symbol stehen: dann könnte natürlich dieses Problem nicht auftreten). – Für die Ersetzbarkeitsregel ergibt sich also die Einschränkung:
Man darf die Ersetzungen nur in Satzteilen vornehmen, die eine im Ausdruck intendierte selbständige Bedeutung haben.
- Es gilt $2 = 10 - 8$. Ersetzen wir nun aber in dem Term $2 \cdot 2$ die zweite „2“ durch „10-8“, so erhalten wir $2 \cdot 10 - 8$. Nach der Ersetzbarkeitsregel müsste also $2 \cdot 2$ dieselbe Zahl wie $2 \cdot 10 - 8$ bezeichnen, was falsch ist. Das liegt an der Punkt-vor-Strich-Regelung, die bewirkt, dass in $2 \cdot 10 - 8$ zuerst die 2 mit 10 multipliziert wird und vom Ergebnis 8 abgezogen wird, anstatt dass mit $10 - 8$ multipliziert wird. Wieder spielt uns die Syntax der mathematischen Sprache hier einen Streich, indem der eingesetzte Term „auseinandergerissen“ wird (indem nur ein Teil von ihm, nämlich der mit 10 bezeichnete Teil, mit 2 multipliziert wird), während wir intendieren, dass er zusammenbleibt und als Ganzes mit 2 multipliziert wird. Man verhindert dies gewöhnlich, indem man um den eingesetzten Term Klammern setzt, die ihn „zusammenhalten“. Bei dieser richtigen Einsetzung stimmt dann alles: $2 \cdot 2 = 2 \cdot (10 - 8)$. – Für die Ersetzbarkeitsregel heißt dies: *Man muss bei der Einsetzung sicherstellen, dass der eingesetzte Term als semantische Einheit erhalten bleibt.*
- Dieses Problem gibt es auch in der Sprache der Prädikatenlogik: Hier muss man die sog. *Variablenkollision* vermeiden (siehe unten S. 48): Man muss vermeiden, dass ein Variablenexemplar, das vor dem Einsetzen frei war, nach dem Einsetzen versehentlich gebunden wird. Sei z.B. $x = y$ eine Gleichung mit Variablen x und y (die bei einer bestimmten Belegung wahr sein soll, in der wir x und y als Bezeichnungen für ein und dieselbe Zahl 2 interpretieren). Dann ist in dieser Interpretation auch die Formel $\exists x \text{ gibt eine Zahl } x, \text{ so dass } x < y$ wahr (denn sie besagt, dass es eine Zahl gibt, die kleiner als 2 ist). Setzen wir hier aber für y die Variable x ein, erhalten wir: „es gibt ein x, so dass $x < x$ ist“ (was falsch ist, da keine Zahl kleiner als sie selbst ist). Es gerät hier das eingesetzte x in den Einflussbereich der Wendung „es gibt ein x, so dass ...“, was der Aussage einen radikal anderen Sinn verleiht. *Man muss also beim Einsetzen Variablenkollision vermeiden.*
- Es gelte Fritz = Franz, d.h. beides ist dieselbe Person. Nun könnte Peter eine Person sein, die nicht weiß, dass Fritz und Franz dieselbe Person ist. Nun ist sicherlich wahr: $\text{Peter weiß, dass Fritz} = \text{Fritz ist}$. Nach der Ersetzbarkeitsregel müssten wir also das zweite „Fritz“ durch „Franz“ ersetzen können, und so sollte wahr sein, dass $\text{Peter weiß, dass Fritz} = \text{Franz ist}$. Aber das kann falsch sein. Dasselbe Problem haben wir, wenn statt „Peter weiß ...“ die Wendung „Peter glaubt ...“, „Peter hofft ...“, „Peter will ...“ in der zu ersetzenden Aussage vorkommt. Wissen, Glauben, Hoffen, Wollen, Erlauben usw. nennt man *propositionale Einstellungen* (engl. propositional attitudes). An diesen scheitert die Ersetzbarkeitsregel aus semantischen Gründen, während sie in den Ausnahmen a bis c aus syntaktischen Gründen scheiterte. Auch, wenn man in Satzteilen, die *Normen* (Verpflichtung/Erlaubnis) oder *Modalitäten* (notwendig / zufällig / möglich) aussagen, Ersetzungen durchführt, gilt die Ersetzregel aus semantischen Gründen nicht immer. Bsp.: Die Anzahl der Planeten (unseres Sonnensystems) ist 8, und $8 \text{ ist notwendigerweise eine gerade Zahl}$. Ersetzen wir darin „8“ durch „die Anzahl der Planeten“ erhalten wir jedoch die falsche Aussage $\text{die Zahl der Planeten ist notwendigerweise eine gerade Zahl}$. Allerdings ist die Anomalie bei Modalitäten dadurch heilbar, dass man als Terme nur sog. „starre Designatoren“ verwendet (deren Bedeutung in jeder möglichen Welt bzw. in allen möglichen Kontexten dieselbe Bedeutung haben). Die „Zahl der Planeten“ ist kein starrer Designator, insofern sie nur in der wirklichen Welt mit 8 identisch ist, in anderen möglichen Welten aber eine andere Zahl sein kann. Ein starrer Designator ist dagegen „die Zahl der Planeten in dieser Welt“; dieser Ausdruck darf auch in modalen Aussagen bedenkenlos durch „8“ ersetzt werden. Einstellungen, Modalitäten und Normen sind Spezialfälle von sog. *intensionalen Kontexten*, die in einem Satz vorkommen, wenn seine Wahrheit nicht allein von der Wahrheit seiner Teilausdrücke und den bezeichneten Objekten abhängt. In mathematischen Formeln kommen intensionale Kontexte nicht vor, so dass man dieses Problem hier ignorieren kann. – Es ergibt sich also die Einschränkung: *Die Ersetzbarkeitsregel gilt nicht für Sätze/Satzteile, die intensionale Kontexte involvieren. Ein Verstoß gegen diese Regel ist der sog. intensionale Fehlschluss.*

Zusatz: Es gelte Fritz = Hubert. $\text{Fritz fängt mit F an}$ ist wahr, doch $\text{Hubert fängt mit F an}$ ist falsch. Hier werden die Terme Fritz und Hubert äquivok verwendet (einmal objektsprachlich, dann metasprachlich). Dieser Fehler ist also ein einfacher Äquivokationsfehler, der in jeder logischen Argumentation vermieden werden muss. Das hat also nichts speziell mit der Ersetzungsregel zu tun.

Übung 6: Beweisen Sie (a) den Satz über Transitivität und (b) den Satz über die Umformungsregeln für Gleichungen.

2.2. Exkurs: Die Bedeutung von „ist“ / „sein“.

In einfachen Aussagen verbindet man den Subjektterm mit dem Prädikatsterm durch das Wort „ist“. In dieser Stellung bezeichnet man das Wort „ist“ als die *Kopula*, die in manchen Sprachen (etwa im Lateinischen) oft gar nicht zum Ausdruck kommt. Die Kopula ist nicht immer durch das Gleichheitszeichen ersetzbar, sie hat oft eine andere Bedeutung. Die Nichtbeachtung dieser Äquivokation führt zu sophistischen Fehlschlüssen wie „Sokrates ist Mensch, Thales ist Mensch, also: Sokrates ist Thales“. Man vergleiche:

- (0) Sokrates ist Sokrates,
- (1) Sokrates ist (dieser) Mensch,
- (2) Sokrates ist (dieses) Lebewesen,
- (3) Sokrates ist (dieses) vernunftbegabte Seiende,
- (4) Sokrates ist (dieses) am Tag *T* nachdenkend(e Seiende),
- (5) Sokrates ist (dieses) während seiner Dialoge umhergehend(e Seiende),
- (6) Sokrates ist (dieses) von Platon verschieden(e Seiende),
- (7) Sokrates ist (dieses) am Tag *T* klüger als Platon (Seiende),
- (8) Sokrates ist (dieses) von Platon erkannt(e Seiende).

Die mit den hier vorkommenden Prädikaten „Sokrates“, „Mensch“, „Lebewesen“ usw. gemeinten Objekte (Sein, Sokratessein, Menschsein, Lebewesensein usw.) sind *konkrete Attribute* von Sokrates; diese sind von den eventuell gleich lautenden konkreten Attributen eines anderen Objekts zu unterscheiden. Das durch „ist“ bezeichnete Verhältnis eines Objekts zu einem seiner Attribute bedeutet nur selten die unterschiedslose Identität, die man mit dem Zeichen = ausdrückt (hier nur in Beispiel (0)). Meist handelt es sich um eine Beziehung ganz eigener Art: „dieses *X* ist dieses *A*“ meint, dass *A* an der *seinsmäßigen* Konstitution des Objekts *X* beteiligt ist, die nichts mit der räumlichen oder zeitlichen Zusammensetzung des Objekts zu tun hat: Das Menschsein ist weder ein räumlicher noch ein zeitlicher Ausschnitt des Sokrates (wie es sein Kopf oder seine Kindheit wäre), sondern ein *seinsmäßiger*: ein Ausschnitt von all dem, was Sokrates eben „ist“. Man kann diese Attribute in zwei wesentlich verschiedene Arten einteilen:

1. Einige Attribute kommen dem Objekt notwendigerweise zu, *unabhängig von seiner Entfaltung im Wirken*, und charakterisieren also das unentfaltete Sein des Objekts. Diese Attribute heißen *essentielle Attribute* (von lat. *Essentia* = *Wesen*) oder *Wesensattribute*. So gehören das Sokratessein, Menschsein, Lebewesensein und Vernünftigkeitsein zu den essentiellen Attributen des Sokrates (Bsp. (0) bis (3)). Die Gesamtheit der essentiellen Attribute heißt das *physische Wesen* des Objekts.²²
2. Andere Attribute charakterisieren das, was das Objekt „über das eigene Selbst hinaus“ ist, z.B. durch seine Entfaltung im eigenen Wirken, etwa gehen und nachdenken, aber auch durch seinen Bezug zu Raum und Zeit oder zu anderen Seienden (die übrigen Beispiele). Sie heißen *akzidentielle Attribute* (von. *accidens* = zufällig hinzukommend). Diese Attribute sind Ergänzungen, die den durch die Wesensattribute schon vollständig bestimmten Sokrates weiter ausgestalten und entfalten.

Anstatt *konkreter Attribute* („Sokrates ist *dieser* Mensch“, „*dieses* Lebewesen“) kann das „ist“ in einem Satz auch einem Subjekt *abstrakte Attribute* zuschreiben: „Sokrates ist *ein* Mensch“, „*ein* Lebewesen“. In diesem Fall will man sagen, das Sokrates unter den abstrakten Begriff „Mensch“, „Lebewesen“ usw. fällt, also eine Instanz des Begriffs ist, d.h. zu seinem Umfang gehört. Das Wort „ist“ hat dann die Bedeutung „gehört zu / ist Element von“ und entspricht dem mathematischen Elementzeichen \in , d.h. „Sokrates ist (ein) Mensch“ könnte man formalisiert darstellen durch die Formel „ $S \in M$ “, wobei „*S*“ für Sokrates und „*M*“ für die Menge aller Menschen steht. Ist auch der Subjektbegriff ein abstrakter Allgemeinbegriff („ein Mensch ist ein Lebewesen“), entspricht das „ist“ schließlich dem mathematischen Teilmengenzeichen \subseteq , d.h. ein solcher Satz wäre formalisiert darzustellen durch „ $M \subseteq L$ “, wobei „*M*“ die Menge der Menschen und „*L*“ die Menge der Lebewesen ist, und bedeutet, dass *M* Teilmenge von *L* ist, also alle Elemente von *M* in *L* liegen. Insgesamt hat also „ist“ als Kopula vier Bedeutungen:

- 1) = (Subjekt und Prädikat sind identisch)
- 2) \in (das Subjekt ist Element des Prädikats)
- 3) \subseteq (das Subjekt ist Teilmenge des Prädikates)
- 4) Eine Bedeutung ohne mathematische Entsprechung (das Prädikat ist ein *seinsmäßiges Konstitutivum* des Subjekts).

Die Gleichheitslogik betrachtet nur Aussagen, in denen „ist“ die Bedeutung (1) hat; (2) und (3) gehören in die Prädikatenlogik, (3) auch in die Syllogistik, (4) ist formal-logisch bislang kaum systematisch erschlossen.

Eine andere Bedeutung von „ist“ ist die *veritative*, in der „sein“ für „wahr sein“ steht: „Es ist der Fall, dass ...“.

Neben seiner *kopulativen* und *veritativen* Verwendung wird „sein“ drittens auch noch *prädikativ* verwendet (z.B. in „Gott ist“, „alles, was ist ...“, „das Seiende“). „Sein“ steht hier für einen *transzendentalen* (= alle Kategorien überschreitenden) Begriff, und zwar den „allgemeinsten aller Begriffe“. Es ist umstritten, ob dieses „Sein“ ein *reales* Prädikat ist (Kant lehnt dies ab) und ob der entsprechende Begriff univok oder analog ist. Man kann mehrere Seinsbegriffe unterscheiden: Im weitesten Sinn steht „sein“ für jede (auch nichtexistente, widersprüchliche) *Gegebenheit*, im engeren Sinn nur für konsistente (wirkliche oder mögliche) objektive Gegebenheiten, d.h. für allgemeine *Existenz*, und im engsten Sinn nur für wirkliche (= subjekt-unabhängig wirksame) Existenz, d.h. für *Wirklichkeit*.

²² Das physische ist vom *metaphysischen* Wesen zu unterscheiden: Unter dem (oder einem) *metaphysischen Wesen* von *X* versteht man einen *möglichst kleinen* Teil des physischen Wesens: eine Gesamtheit *M* essentieller Attribute, mit der man das Objekt *definieren* kann, und zwar so, dass aus dem Vorhandensein der in *M* zusammengestellten Wesensattribute das Vorhandensein aller übrigen notwendig folgt und *auf möglichst leichte Weise* einsichtig gemacht werden kann. Das metaphysische Wesen ist also kurz gesagt so etwas wie ein „ausgezeichnetes Charakteristikum“ des Objekts. Beim Menschen bestünde das metaphysische Wesen aus den beiden Attributen des Vernünftigkeitseins und des Sinnenwesenseins, wenn die klassische Definition „der Mensch ist ein vernünftiges Sinnenwesen“ zutrifft (vgl. hierzu den obigen Abschnitt über Definitionen). Im Gegensatz zur scholastischen Tradition muss man wohl sagen, dass ein und dasselbe Objekt *mehrere* metaphysische Wesen haben kann, da es oft mehrere „gleich gute“ Definitionen derselben Sache gibt (Beispiel: das Dreieck ist eine „zusammenhängende ebene Figur mit drei Seiten“ und auch eine solche „mit drei Ecken“).

3. Grundlagen der modernen Klassen- bzw. Mengenlehre

Grundbegriffe (Menge, Klasse, Individuum). Als eine *Menge* (oder synonym: *konsistente Klasse*) bezeichnet man nach Georg Cantor († 1918) eine „Zusammenfassung von Dingen unserer Anschauung oder unseres Denkens, die wir *Elemente* der Menge nennen, zu einer Einheit“. Mengen sind nicht einfach Vielheiten, sondern *Einheiten* (Individuen), die aber *Vielheiten repräsentieren* können. Wir können sie uns vorstellen als geistige Klammern, Kreise, Behälter, Listen usw., welche die in ihnen „enthaltenen“ Objekte (ihre „Elemente“) „umfassen“. Somit sind es neuartige Objekte, die „über“ ihren Elementen stehen, insbesondere sind auch *Einermengen* (solche mit nur einem einzigen Element) keineswegs mit diesem einen Element identisch, und die *leere Menge* (mit gar keinem Element) ist nicht ein „Nichts“, sondern so etwas wie ein „leerer Gedankensack“. Die beste realistische Vorstellung von einer Menge im Cantor'schen Sinn ist, dass man sich eine Menge wie einen Begriff vorstellt (siehe Abschnitt 1.19) – also einen Gedanken, der sich auf mehrere Objekte beziehen kann – der aber im Gegensatz zu einem gewöhnlichen Begriff *rein extensional* ist, also nichts (keinerlei Intension) zu den unter ihn fallenden Objekten hinzudenkt (insbesondere z.B. keine Reihenfolge oder sonstige Beziehung zwischen den Objekten); außerdem identifizieren wir Mengen nicht mit konkret gedachten Gedanken, sondern rein „möglichen Gedankenformen“ – die also als reine Möglichkeiten auch dann „vorhanden“ wären, wenn sie niemand konkret denken würde. Allein diese sehr abstrakte Mengenvorstellung nämlich ist mit dem *Extensionalitätsaxiom* der Mengenlehre vereinbar: *Dass es keine zwei Mengen gibt, die genau dieselben Elemente haben* (daher gibt es nur eine einzige leere Menge, während es viele leere Begriffe gibt).

Die Menge, welche die Individuen a, b, c, \dots als ihre Elemente enthält, bezeichnen wir mit $\{a,b,c,\dots\}$; zu jedem einzelnen Individuum a ist $\{a\}$ die einelementige Menge, die nur a umfasst; für diese können wir auch $\{a,a\}$, $\{a,a,a\}$ usw. schreiben; es gibt auch die leere Menge $\{\}$, die gar kein Element hat und auch mit \emptyset bezeichnet wird, und viele unendliche Mengen in der Mathematik. Gewisse Standardmengen bezeichnet man gern mit sog. blackboard-Buchstaben \mathbb{A}, \mathbb{B} usw. Die wichtigsten sind:

\mathbb{N} = Menge der Natürlichen Zahlen = $\{1,2,3, \dots\}$,

\mathbb{Z} = Menge der Ganzen Zahlen = $\{\dots-2,-1,0,1,2,3, \dots\}$,

\mathbb{Q} = Menge der Quotienten / Bruchzahlen, d.h. aller Zahlen, die sich als Bruch z/n darstellen lassen mit z aus \mathbb{Z} und n aus \mathbb{N} ,

\mathbb{R} = Menge der Reellen Zahlen: Zahlen, die man als unendliche Dezimalbrüche bzw. Punkte auf der Zahlengeraden darstellt.

Vielheiten von Individuen, die „unvorstellbar groß“ (oder wie man sagt: „uferlos unendlich“) sind, so dass es keinen klaren einheitlichen abstrakten Gedanken mehr gibt, der alle diese Individuen umfasst, bezeichnet man im Gegensatz zu den konsistenten Klassen (Mengen) als *Unmengen* oder *inkonsistente Vielheiten* oder *inkonsistente*, „echte“ *Klassen*; die Individuen, aus denen eine Unmenge bestehen, bezeichnet man als (ihre) Elemente, die sie „hat“ oder „enthält“, ebenso wie wir auch von einer Menge sagen, dass sie ihre Elemente „hat“ oder „enthält“. Die echten Klassen oder Unmengen sind selbst keine Individuen, sondern Vielheiten, die so groß sind, dass sie nicht durch einen einzigen Gedanken zusammenfassbar sind, und *können daher im Gegensatz zu den Mengen nicht selbst als Elemente einer Klasse auftreten*. Damit ergibt sich auch eine Lösung des Russellschen Paradoxons: Eine „Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten“ gibt es nicht, wohl aber eine *Unmenge* (echte Klasse), die alle sich nicht selbst enthaltenden Mengen enthält. Die „nicht sich selbst enthaltenden“ Mengen sind übrigens den meisten heutigen Mengentheoretikern zufolge (welche annehmen, dass sich keine Menge selbst enthält, weil jede Menge „über“ ihren Elemente steht und dieses Annahme als *Anti-Zirkularitätsaxiom* festschreiben) einfach „alle Mengen überhaupt“. Und die Frage, ob diese „Russelsche Klasse“ selbst – wie wir sie jetzt nennen müssen – sich selbst enthält oder nicht, kann nun mit einem klaren „Nein“ beantwortet werden. Zusammen mit den konsistenten Klassen (= Mengen) bezeichnet man die inkonsistenten oder echten Klassen (= Unmengen) kurz als *Klassen*.

Ihre Elemente bezeichnen wir auch als „die Elemente der Klasse“, und sagen, dass diese „aus“ oder „von“ oder „in“ der Klasse sind oder „in der Klasse liegen“. Zu einer beliebigen Auswahl von Individuen gibt es stets eine und nur eine Klasse, welche genau diese Individuen als Elemente besitzt: Dies ist das *Komprehensionsaxiom* der Mengenlehre. Bezeichnet x ein Individuum und C eine Klasse, schreibt man für „ x ist Element von C “ kurz „ $x \in C$ “ und für „ x ist kein Element von C “ kurz „ $x \notin C$ “. Individuen, die keine Klassen (insbesondere keine Mengen) sind, bezeichnet man als *Urelemente*. Urelemente, Mengen und Unmengen fasst man als *Objekte* der Mengenlehre zusammen. Die Objekte zerfallen in Individuen (= Urelemente und Mengen) und inkonsistente Vielheiten (= Unmengen). Konsistente Vielheiten (relativ kleine, zu Einheiten zusammenfassbare Vielheiten) benötigt man nicht, denn als Ersatz für diese hat man ja die sie repräsentierenden Mengen.

Ist x eine Variable und $A(x)$ eine Aussageform, so bezeichnet man mit $\{x \mid A(x)\}$ (lies: Klasse aller x , für die gilt: $A(x)$) die Klasse, die genau diejenigen Individuen a enthält, für die $A(a)$ gilt. Es handelt sich hier um den Umfang des Begriffs der „Individuen a , für die $A(a)$ gilt“. Wenn dieser unübersichtlich groß ist, handelt es sich um eine echte Klasse, sonst um eine Menge. Man nennt die Bezeichnung $\{a,b,c,\dots\}$ eine *aufzählende* Klassenkennzeichnung, $\{x \mid A(x)\}$ eine *beschreibende* Klassenkennzeichnung. Beispiele:

– $\{x \mid x \neq x\} = \{\} = \emptyset$,

– $\{x \mid x = a\} = \{a\}$,

– $\{x \mid x = a \text{ oder } x = b\} = \{a,b\}$ usw. (man kann also die beschreibende durch die aufzählende Kennzeichnung ersetzen),

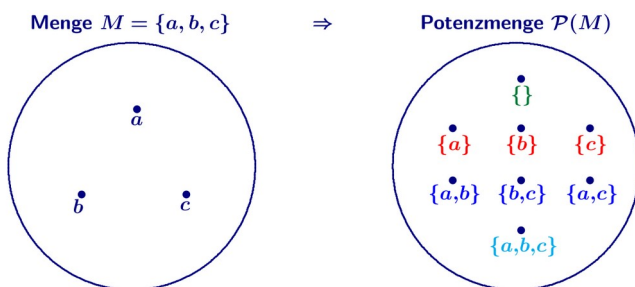
– $\{x \mid x \notin x\}$ die Russelsche Klasse (da $x \notin x$ stets wahr ist, kennzeichnet dies die Klasse $\{x \mid x \text{ ist Menge}\}$ aller Mengen \mathbb{M}),

– $\{x \mid x = x\}$ ist die größte Klasse überhaupt, die Klasse aller Individuen \mathbb{I} .

Für $\{x \mid A(x)\}$ schreibt man in der Klassenlogik auch $\kappa x A(x)$ mit dem Klassenoperator κ . Klassen veranschaulicht man durch *Klassen- bzw. Mengendiagramme* (Euler- oder Venn-Diagramme): geschlossene Kurven (meist Kreise), wobei man sich die Elemente in der umschlossenen Fläche lokalisiert denkt (die man oft in besonderer Weise schraffiert); manchmal schreibt man Bezeichnungen aller oder einiger Elemente der Menge hinein oder symbolisiert diese durch markierte Punkte der Fläche.

Beziehungen und Verknüpfungen zwischen Klassen. Sind T und C Klassen, so heißt T eine *Teilklass*e von C und zugleich C eine *Oberklasse* von T, wenn es kein Element von T gibt, das nicht auch ein Element von C ist; dann schreibt man $T \subseteq C$ oder $C \supseteq T$, und sagt, dass zwischen T und C (in dieser Reihenfolge) die Inklusionsbeziehung besteht. Insbesondere ist jede Menge C eine Teilklass von sich selbst ($C \subseteq C$) und die leere Menge ist Teilklass von jeder Klasse ($\emptyset \subseteq C$). Ist T eine von C selbst verschiedene Teilklass von C, so heißt T eine *echte Teilklass*e von C und C eine *echte Oberklasse* von T und man schreibt $T \subset C$ oder $C \supset T$. Ist M eine Menge, so sind auch alle Klassen, die „kleiner“ als M sind, Mengen, insbesondere alle Teilmengen von M. Den Satz „Ist M eine Menge und $T \subseteq M$, so ist auch T eine Menge“ nennt man das *Teilmengenaxiom*. Da demnach die Teilklassen *einer Menge* selbst Mengen sind, nennt man sie auch *Teilmengen* von M. Zu den Teilklassen einer Unmenge gehören dagegen sowohl Mengen als auch echte Klassen. Die Klasse aller Teilmengen einer Menge M nennt man die Potenzklasse $\mathcal{P}(M)$ von M. Ist M endlich und hat n Elemente, so hat $\mathcal{P}(M)$ genau 2^n Elemente.

Hat z.B. eine Menge M drei Elemente, d.h. ist $M = \{a,b,c\}$, so hat die Potenzmenge $2^3 (= 8)$ Elemente, und zwar ist $\mathcal{P}(M) = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$. Die sieben zuerst aufgezählten von den acht Teilmengen (alle außer M selbst) sind echte Teilmengen.



Ist M eine Menge und $A(x)$ eine Aussageform, so ist die Klasse $\{x \mid x \in M \text{ und } A(x)\}$ in jedem Fall eine Menge: Denn sie enthält nur gewisse Elemente a von M, und

zwar genau diejenigen, für die $A(a)$ gilt, und ist daher eine Teilmenge von M. Für diese Menge schreibt man auch $\{x \in M \mid A(x)\}$ („Menge aller x aus M, für die gilt: $A(x)$ “).

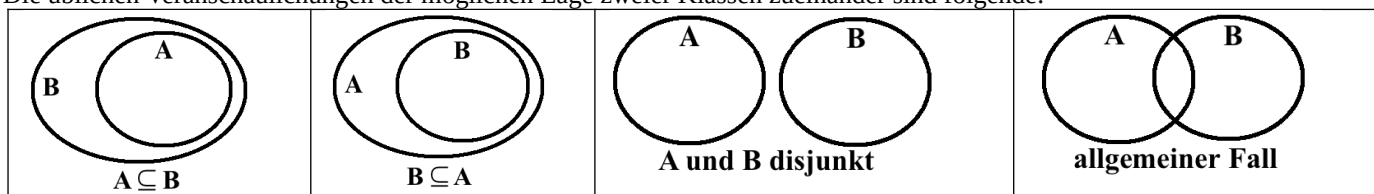
Sind C_1, C_2, \dots Klassen, so bezeichnet man diejenige Klasse V, zu deren Elementen ein Individuum genau dann gehört, wenn es Element von mindestens einer dieser Klassen ist, als *Vereinigung(klasse)* der Klassen C_1, C_2, \dots ; und diejenige Klasse S, zu deren Elemente ein Individuum genau dann gehört, wenn es zugleich Element von allen diesen Klassen ist, als *Schnitt(klasse)* der Klassen C_1, C_2, \dots . Ist die Schnittklasse die leere Klasse, haben also die aufgezählten Klassen keine gemeinsamen Elemente, so sagen wir, dass die Klassen *disjunkt* sind. Die Vereinigung bzw. den Schnitt von Klassen C_1 und C_2 bezeichnet man als $C_1 \cup C_2$ bzw. $C_1 \cap C_2$. Sind A, B Klassen, bezeichnet man die Klasse, welche genau diejenigen Individuen als Elemente hat, die in A, aber nicht in B liegen, als Differenzklasse A vermindert um B und bezeichnet sie mit $A \setminus B$.

Hier existieren Bezugspunkte zur Arithmetik: Sind A, B endliche Mengen, so gilt:

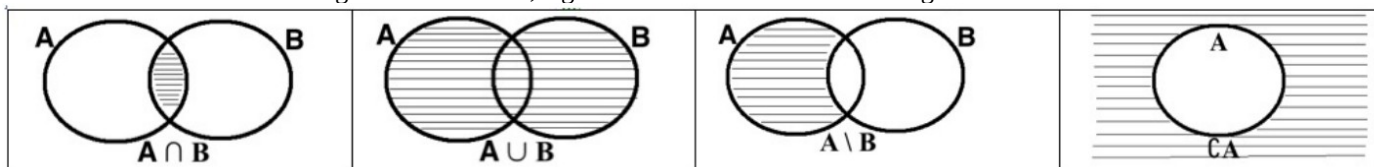
- Hat A n Elemente und B m Elemente und sind A, B disjunkt, so hat die Vereinigungsklasse $A \cup B$ n+m Elemente.
- Hat A n Elemente und B m Elemente und ist B Teilklass von A, so hat die Differenzklasse $A \setminus B$ n-m Elemente.

Oft betrachtet man in der Mengentheorie nur Klassen und Mengen, die Teilmenge ein und derselben Grundklasse \mathbb{G} sind (ist keine explizit angegeben, denke man sich die größte Klasse \mathbb{D} als Grundklasse). Man versteht dann unter dem Komplement \bar{A} einer Klasse A die Klasse $\mathbb{G} \setminus A$, die alle Elemente des Grundbereichs enthält, die *nicht* in A liegen.

Die üblichen Veranschaulichungen der möglichen Lage zweier Klassen zueinander sind folgende:



Die üblichen Veranschaulichungen der Klassen A, B gebildeten neuen Klassen sind folgende:



Ist M eine Klasse bzw. Menge, deren Elemente Mengen sind, ist $\bigcup M$ bzw. $\bigcap M$ die Vereinigungs- bzw. Schnittklasse aller in M enthaltenen Mengen. Wird für jedes i aus einer Klasse I mit $A(i)$ eine Klasse bezeichnet, so steht $\bigcup_{i \in I} A(i)$ bzw. $\bigcap_{i \in I} A(i)$ für „die Vereinigung bzw. den Schnitt aller Klassen $A(i)$ für i aus I“.

Axiome. Zu den zehn klassischen Axiomen der Zermelo-Fraenkelschen-Mengenlehre gehören außer den vier oben schon genannten (*Extensionalitätsaxiom*, *Komprehensionsaxiom*, *Anti-Zirkularitätsaxiom* und *Teilmengenaxiom*) noch sechs weitere. Ursprünglich wurden sie nur für Mengen formuliert. In seiner Erweiterung auf Klassen lautet es:

Extensionalitätsaxiom: Es gibt keine zwei Klassen mit genau denselben Elementen.

Komprehensionsaxiom: Zu jeder Auswahl von Individuen gibt es eine genau diese Individuen enthaltende Klasse.

Anti-Zirkularitätsaxiom: Es gibt keine zirkulären \in -Ketten der Form $a_1 \in a_2 \in \dots \in a_1$ (insbesondere gilt immer $a \notin a$).

Teilmengenaxiom: Jede Teilklass einer Menge ist eine Menge.

Ersetzungsaxiom: Ersetzt man in einer Menge ein Element durch ein anderes Individuum, erhält man wieder eine Menge,

Auswahlaxiom: Zu jeder Menge M, deren Elemente zueinander disjunkte nichtleere Mengen sind, gibt es eine sog. Auswahlmenge, d.h. eine Menge, die mit jedem X aus M genau ein Element gemeinsam hat.

Paarmengenaxiom: Für Individuen x,y ist {x,y} immer eine Menge.

Vereinigungsmengenaxiom: Die Vereinigungsklasse $\bigcup M$ aller Mengen, die Elemente einer Menge M sind, ist eine Menge.

Potenzmengenaxiom: Die Potenzklasse $\mathcal{P}M$ jeder Menge M ist eine Menge.

Unendlichkeitsaxiom: Es gibt eine unendliche Menge (oder: die Klasse \mathbb{N} der natürlichen Zahlen ist eine Menge).

Übung 7: Zeigen Sie, wie aus den Axiomen folgt, dass (a) die leere Klasse {} eine Menge ist, (b) alle Klassen {x} mit einem einzigen Element x Mengen sind und (c) alle endlichen Mengen (mit n Elementen) Mengen sind, (d) wenn A und B Mengen sind, auch die Schnittklasse $A \cap B$ und die Differenzklasse $A \setminus B$ eine Menge ist.

Paare. Wir wollen allgemein für Objekte x,y ein neues mengentheoretisches Objekt bestimmen, dass wir das geordnete Paar $\langle x,y \rangle$ nennen, und zwar so, dass es „auf die Reihenfolge ankommt“, so dass $\langle x,y \rangle$ im Falle $x \neq y$ von $\langle y,x \rangle$ verschieden ist. Beachte: $\{x,y\}$ kann man nicht nehmen, denn erstens ist das nur für Individuen x,y definiert, und zweitens ist $\{x,y\} = \{y,x\}$.

– Für den Fall, dass x,y Individuen sind, definieren wir als das (geordnete) (Individuen-)Paar $\langle x,y \rangle$ die Menge $\{\{x\},\{x,y\}\}$.

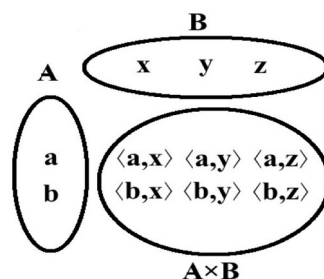
– Ist U Unmenge und y ein Individuum, sei das Paar $\langle U,y \rangle$ die Klasse aller Individuenpaare $\langle u,y \rangle$ mit u aus U.

– Ist x Individuum und V Unmenge, sei das Paar $\langle x,V \rangle$ die Klasse aller Individuenpaare $\langle x,v \rangle$ mit v aus V.

– Sind U,V Unmengen, sei das Paar $\langle U,V \rangle$ die Klasse aller Individuenpaare $\langle u,v \rangle$ mit u aus U und v aus V.

Sind x,y,z Objekte, so verstehen wir unter dem (geordneten) Tripel $\langle x,y,z \rangle$ die Klasse $\{\langle x,y \rangle, z\}$ und nennen x die *erste Komponente*, y die *zweite Komponente* und z die *dritte Komponente* des Tripels; es kommt hier auf die Reihenfolge an. Man nennt geordnete Paare auch *2-Tupel*, geordnete Tripel auch *3-Tupel* und definiert entsprechende *4-Tupel*, *5-Tupel* usw., also allgemein *n-Tupel* für jede natürliche Zahl n mit $n > 1$. Unter einem 1-Tupel versteht man jedes einzelne Objekt.

Sind A,B Klassen, bezeichnet man mit $A \times B$ („A kreuz B“) die *Kreuzprodukt-Klasse*, deren Elemente die Individuen-Paare $\langle a,b \rangle$ mit a aus A und b aus B sind. Sind A,B endlich und hat A n und B m Elemente, so hat $A \times B$ n*m Elemente.

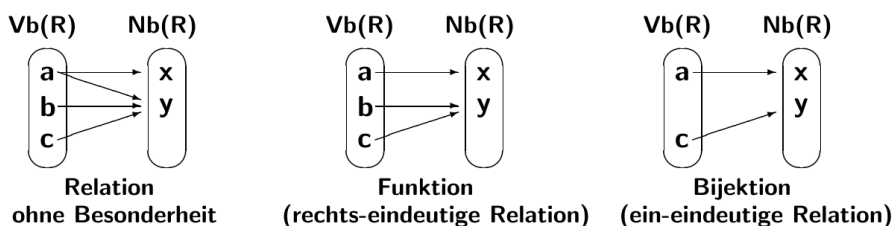


Für natürliche Zahlen n und Klassen A verstehen wir unter A^n („A-n“ oder „A hoch n“) die Klasse aller n-Tupel mit Komponenten aus A, d.h. die Klasse $A \times A \times \dots \times A$ (mit n A's); die exakte rekursive Definition lautet: $A^1 := A$ und für jedes n: $A^{n+1} := A^n \times A$.

Ist A endlich und hat a Elemente, so hat A^n genau a^n Elemente.

Relationen. Unter einer *n-stelligen Relation* (oder Beziehung, Korrespondenz) R verstehen wir eine Klasse, deren Elemente n-Tupel sind, unter einer *Relation* (schlechthin) verstehen wir eine 2-stellige Relation, also eine Klasse von Paaren. Eine 1-stellige Relation ist eine Klasse (zu 0-stelligen Relationen siehe unten). Unter dem *Feldbereich* $Fd(R)$ einer n-stelligen Relation R verstehen wir die Klasse, deren Elemente die Komponenten der Elemente der Relation sind. Sei jetzt R eine (2-stellige) Relation. Dann verstehen wir unter dem *Vorbereich* $Vb(R)$ bzw. *Nachbereich* $Nb(R)$ von R die Klasse, deren Elemente die ersten bzw. zweiten Komponenten der Elemente von R sind. Offenbar ist R stets eine Teilklasse von $Vb(R) \times Nb(R)$. Wenn $\langle x,y \rangle$ Element von R ist, sagen wir, dass R „dem Individuum x das Individuum y zuordnet“ oder „das Individuum x auf das Individuum y ausrichtet“, und können uns R als eine Menge von Zuordnungen vorstellen, die gewissen Elementen ihres Vorbereichs gewisse Elemente ihres Nachbereichs zuordnet. Für Individuen x,y und Relationen R schreibt man für $\langle x,y \rangle \in R$ kurz xRy und sagt, dass x und y (in dieser Reihenfolge) „in der Relation R stehen“. Im Fall einer n-stelligen Relation schreibt man für $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in R$ kurz $Rx_1 \dots x_n$ (standardisierte Relationsformel) und sagt, dass x_1, \dots, x_n in der Relation R stehen.

Man stellt Relationen durch sog. *Pfeildiagramme* dar, indem man links ein Mengendiagramm ihres Vorbereichs und rechts ein Mengendiagramm ihres Nachbereichs zeichnet und die Zuordnungen durch Pfeile symbolisiert, die von den links aufgeführten Elementen des Vorbereichs ausgehen und auf die entsprechenden rechts aufgeführten Elemente des Nachbereichs zeigen. Eine *Funktion* oder *eindeutige Relation* ist eine Relation, die jedem Element ihres Vorbereichs *nur ein* Element zuordnet (so dass im Pfeildiagramm von jedem links aufgeführten Element nur ein Pfeil ausgeht). Eine *Bijektion* oder *ein-eindeutige Relation* ist eine Relation, die jedem Element x ihres Vorbereichs *nur ein* Element y ihres Nachbereichs zuordnet, und bei der auch jedes Element y des Nachbereichs die Eigenschaft hat, dass die Relation *nur einem* Element x ihres Vorbereichs das y zuordnet (so dass im Pfeildiagramm von jedem linken Element nur ein Pfeil ausgeht und auf jedes rechte Element nur ein Pfeil zeigt).



Bei einer Bijektion müssen vor- und nachbereich gleich viele Elemente haben. Eine Relation κ mit endlichem Feldbereich kann man durch eine 2spaltige (oder 2zeilige) Tabelle definieren, bei der sich x und y genau dann gegenüberstehen, wenn $x R y$ gilt:

linke Relation: $Vb(R): a \ a \ b \ c$
 $Nb(R): x \ y \ y \ y$

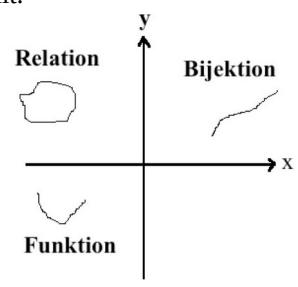
mittlere Relation: $Vb(R): a \ b \ c$
 $Nb(R): x \ y \ y$

linke Relation: $Vb(R): a \ c$
 $Nb(R): x \ y$

Eine Relation R, deren Vor- und Nachbereich jeweils eine unendliche Zahlenmenge ist, kann man besonders anschaulich durch einen Graphen in x-y-Koordinatensystemen darstellen: Man zeichnet dann eine ebene Figur (den sog. Graphen der Relation) derart, dass der Punkt (x,y) mit den Koordinaten x und y genau dann zur Figur gehört, wenn $x R y$ gilt.

Für Funktionen gilt, dass ihr Graph jede Parallele zur y-Achse höchstens einmal schneidet.

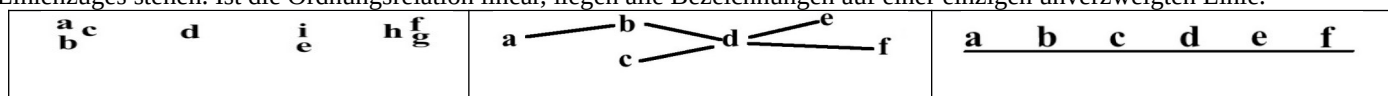
Bijektionen schneiden auch jede Parallele zur x-Achse nur einmal. Eine Relation R heißt *reflexiv*, wenn für alle x ihres Feldbereichs gilt: xRx ; und *irreflexiv*, wenn xRx stets falsch ist; *symmetrisch*, wenn gilt $xRy \Rightarrow yRx$; und *asymmetrisch*, wenn gilt $xRy \Rightarrow$ nicht yRx ; *transitiv*, wenn gilt xRy und $yRz \Rightarrow xRz$, *komparativ*, wenn gilt x_1Ry und $x_2Ry \Rightarrow x_1Rx_2$; *linear*, wenn für x, y aus dem Feldbereich von den Aussagen xRy , yRx , $x = y$ stets min. eine gilt; *trichotom*, wenn für x, y aus dem Feldbereich genau eine der Aussagen xRy , yRx , $x = y$ gilt.



Sie heißt eine *Äquivalenzrelation*, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist; eine *Ordnungsrelation*, wenn sie irreflexiv und transitiv ist (sie ist dann auch asymmetrisch); eine *lineare Ordnungsrelation*, wenn sie außerdem linear ist (dann ist sie auch trichotom).

Für Äquivalenzrelationen benutzt man als Zeichen gern \sim , für Ordnungsrelationen $<$. Äquivalenzrelationen veranschaulicht man durch *Inseldiagramme*, in denen man die zueinander in Relation stehenden Objekte durch beieinander stehende Bezeichnungen kennzeichnet. So ergeben sich Bezeichnungs-„Inseln“ derart, dass alle zur selben Insel gehörigen Bezeichnungen in der Relation stehen. Die Klassen der zur selben Insel gehörigen Objekte heißen die *Äquivalenzklassen* der Äquivalenzrelation.

Ordnungsrelationen veranschaulicht man durch *Ordnungsdiagramme*, in denen Bezeichnungen der Elemente des Feldbereichs so durch Linien verbunden werden, dass $x < y$ genau dann gilt, wenn x am linken und y am rechten Ende eines x und y verbindenden Linienzuges stehen. Ist die Ordnungsrelation linear, liegen alle Bezeichnungen auf einer einzigen unverzweigten Linie.



Für die links dargestellte Äquivalenzrelation R gilt xRy , wann immer man für x und y beliebige Elemente der Klasse $\{a,b,c\}$ einsetzt oder beliebige Elemente von $\{e,i\}$ einsetzt oder beliebige Elemente von $\{h,f,g\}$ einsetzt; außerdem gilt dRd . Die Klassen der zusammengehörigen Feldobjekte $\{a,b,c\}$, $\{e,i\}$, $\{d\}$ und $\{h,f,g\}$ sind die *Äquivalenzklassen* der Relation.

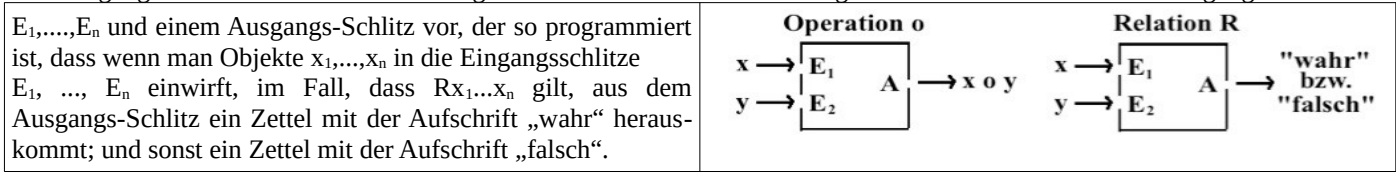
Für die in der Mitte dargestellte (nicht-lineare) Ordnungsrelation S gilt z.B. aSb , bSd , dSe , cSd , dSf und alle daraus per Transitivität ermittelbaren Beziehungen (wie aSd aSe usw.), aber es gilt z.B. weder aSc noch bSc noch cSd .

Rechts ist eine lineare Ordnungsrelation T dargestellt, für die xTy immer dann gilt, wenn x links von y dargestellt ist.

Funktionen. Eine Funktion (oder Abbildung) f ist eine eindeutige Relation, die jedem Element ihres Vorbereichs *genau ein* Element ihres Nachbereichs zuordnet. Der Vorbereich einer Funktion f heißt ihr *Definitionsbereich* $Db(f)$ und seine Elemente die *Argumente* oder *Stellen* der Funktion; ihr Nachbereich heißt ihr *Wertebereich* $Wb(f)$ und seine Elemente die *Werte* der Funktion. Ist C Klasse, heißt f „von C“ bzw. „aus C“, wenn C der Definitionsbereich bzw. eine Teilklasse des Definitionsbereichs von f ist; und f heißt „in C“ bzw. „auf C“, wenn C der Wertebereich bzw. eine Teilklasse des Wertebereichs von f ist. Die Aussage „f ist eine Funktion von A in B“ kürzt man mit „ $f: A \rightarrow B$ “ ab. Gilt $x f y$, so ist y eindeutig bestimmt und heißt „der Funktionswert von f an der Stelle x“ und wird bezeichnet mit $f(x)$ („f von x“) oder f_x („f-x“, Indeschreibweise) oder einfach durch Aneinanderreihung der Bezeichnungen mit fx (standardisierter Funktionsterm) bezeichnet. Wir sagen, dass „f das Objekt x auf das Objekt y (= $f(x)$) wirft“. Ist T(x) ein Term und C eine Klasse, schreiben wir $\{x \in C \rightarrow T(x)\}$ (lies: Funktion, die jedes x aus C auf T(x) wirft) für die Funktion, die jedes Individuum a aus C auf das Objekt T(a) wirft, das ist eine Funktion mit Definitionsbereich C. Bsp.

- Ist $f := \{x \in \mathbb{R} \rightarrow x^2\}$, so ist f die Funktion, die jeder reellen Zahl ihre Quadratzahl zuordnet. z.B. gilt $f(2) = 4$, $f(3) = 9$ usw.
- Ist $N := \{x \in K \rightarrow \text{Nachfolger von } x\}$ (mit $K =$ Menge der antiken Herrscher, die einen Thron-Nachfolger hatten), so ist N eine Funktion mit $N(\text{Saul}) = \text{David}$, $N(\text{David}) = \text{Salomon}$, $N(\text{Caesar}) = \text{Augustus}$ usw.

Operation. Eine n-stellige Operation ist eine Funktion, deren Argumente n-Tupel sind, eine Operation (schlechthin) ist eine 2-stellige Operation, also eine Funktion, deren Argumente Paare sind; eine 1-stellige Operation ist dasselbe wie eine Funktion. Gilt für eine n-stellige Operation o, dass $o((x_1, x_2, \dots, x_n)) = z$, heißt z das *Ergebnis* der Verknüpfung von x_1, x_2, \dots, x_n (in dieser Reihenfolge) durch o. Für das Ergebnis $o((a, b, \dots))$ schreibt man einfacher $o(a, b, \dots)$ oder $o_{a,b,\dots}$ (Indexschreibweise) oder reiht einfach die Bezeichnungen aneinander $o a b \dots$ (standardisierter Operationsterm). Bei gewöhnlichen (2-stelligen) Operationen schreibt man für den Operationsterm $o a b$ meist $a o b$. Beispiele für Operationen sind die Addition + und die Multiplikation \cdot . Ein nichtmathematisches Beispiel wäre diejenige Operation M, die jedem Zwillingpaar seine Mutter zuordnet. Da Leda Mutter von Castor und Pollux war, gilt $M(\text{Castor}, \text{Pollux}) = \text{Leda}$, oder $\text{Castor } M \text{ Pollux} = \text{Leda}$. Eine n-stellige Operation o kann man sich als einen Automaten mit n nummerierten Eingangs-Schlitzen E_1, \dots, E_n und einem Ausgangs-Schlitze A vorstellen, der so programmiert ist, dass wenn man bestimmte Objekte x_1, \dots, x_n in die Eingangsschlitze E_1, \dots, E_n einwirft, das dadurch festgelegte Ergebnis $o(x_1, \dots, x_n)$ aus dem Ausgangs-Schlitze herauskommt. Analog stellt man sich auch eine n-stellige Relation als Automaten mit Eingangs-Schlitzen



Aus dieser Vorstellung resultieren die Begriffe der 0-stelligen Operation (ein beliebiges Objekt, das ohne Eingabe „ausgeworfen“ wird) und de 0-stelligen Relation (ein Wahrheitswert, d.h. es gibt nur zwei 0-stellige Relationen: „das Wahre“ und „das Falsche“).

4. Syllogistik

Jedes logische Argument ist im weiteren Sinne ein Syllogismus (griech. Überlegungsverknüpfung). Im engeren Sinn aber bezeichnet man als „Syllogismus“ die hier beschriebenen, auf Aristoteles zurückgehenden deduktiven Argumente. Die *Syllogistik*, die Lehre von diesen Syllogismen, ist das Herzstück der Logik der ersten und zweiten Epoche (in der dritten Epoche ist sie durch die *Prädikatenlogik* und die moderne *Modallogik* ersetzt, verfeinert und erweitert worden). Obgleich man in einer erweiterten Syllogistik durchaus auch kompliziertere (z.B. hypothetische, disjunktive, modale etc.) Urteile behandelte, beschäftigte sich das Kernstück der Syllogistik (das hier ausschließlich dargestellt werden soll) nur mit (elementaren, kategorisch-assertorischen) Urteilen der folgenden Form, den sog. *syllogistischen Urteilen* (im engeren Sinn):

„alle/einige S sind P“ oder „alle/einige S sind nicht P“.

Je nachdem, ob über „alle“ bzw. „einige“ S geurteilt wird, heißt das Urteil universal bzw. partikulär, und dies ist seine sog. *Quantität*; je nachdem ob S und P durch „sind“ oder „sind nicht“ verbunden werden, heißt es affirmativ oder negativ, und dies ist die *Qualität* des Urteils. Es ergeben sich durch Kombination von Quantität und Qualität vier Arten syllogistischer Urteile, denen man die Vokale a,i,e,o zuordnet, die in **affirmo** (ich bejahe) und **nego** (ich verneine) vorkommen:

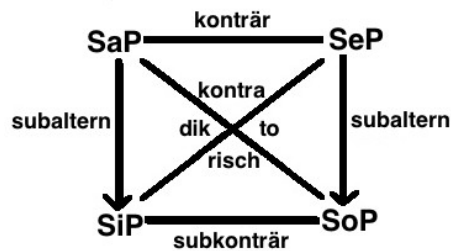
a-Urteile sind affirmativ-universal	(„alle S sind P“,	kurz „SaP“)		universal	partikulär
i-Urteile sind affirmativ-partikulär	(„einige S sind P“,	kurz „SiP“)			
e-Urteile sind negativ-universal	(„alle S sind nicht P“ / „kein S ist P“,	kurz „SeP“)	positiv	a	i
o-Urteile sind negativ-partikulär	(„einige S sind nicht P“,	kurz „SoP“)	negativ	e	o

Knittelvers als Merkspruch: „Das a bejahet allgemein, das e, das sagt zu allem: nein!
das i sagt ja, doch nicht zu allem, so lässt auch o das nein erschallen.“

Außer den *universalen* Urteilen („alle Hunde sind Tiere“) und *partikulären* Urteilen („einige Menschen sind klug“) gibt es noch Urteile einer dritten Qualität: sog. *singuläre* Urteile („Sokrates ist ein Mensch“), bei denen das Subjekt ein Individuum ist. Diese werden in der Syllogistik wie universale Urteile behandelt, d.h. „Sokrates“ versteht man im Sinne von „alles, was Sokrates ist“; und auf diese Weise werden singuläre unter universale subsumiert und nicht als eigene Kategorie behandelt (Kant dagegen hat in seiner Kategorienlehre Wert auf die Dreiteilung der Quantität wie auch auf eine Dreiteilung der Qualität bestanden – siehe Abschnitt 1.21 – seine dritte Qualität neben Affirmation und Negation ist jedoch das am meisten obsoletere und kritisierte Stück seiner Urteilslehre). Wichtig ist noch, dass in der Syllogistik folgende generelle Voraussetzungen gelten:

1. „*einige S*“ ist im Sinne von „mindestens ein S“ gemeint,
2. alle Terme stehen für *nichtleere Begriffe*, es wird immer vorausgesetzt, dass es *mindestens ein S bzw. ein P* gibt.

Die vier logischen Verhältnisse oder vier „Gegensätze“ der Kontradiktion, Kontrarität, Subkontrarität, Subalternation (vgl. 1.12) macht man sich mit Hilfe des folgenden sog. „logischen Quadrates der Syllogistik“ klar:



1. *Subalternation*: Wenn SaP wahr ist, so auch das im Quadrat darunter stehende SiP (SaP impliziert SiP) und wenn SeP wahr ist, so auch das im Quadrat darunter stehende SoP (SeP impliziert SoP), weil aus dem Allgemeinen „durch Abschwächung“ das Partikuläre folgt, da das Partikuläre dem Allgemeinen „untergeordnet“ ist: Gilt für alle S, dass oder dass nicht P, so gilt dasselbe auch für einige S – wenn man die obigen beiden generellen Voraussetzungen beachtet. Somit ist das Verhältnis von SiP zu SaP bzw. von SoP zu SeP ist das der *Subalternation* (Unterordnung).

2. *Kontradiktion*: SaP und das schräg darunter stehende SoP sind zueinander *kontradiktorisch* (kontravalent), d.h. die beiden Aussagen haben stets verschiedene Wahrheitswerte (denn wenn „alle S sind P“ falsch ist, so muss „es gibt mindestens ein S, das nicht P ist“ richtig sein); entsprechend sind auch SeP und SiP kontradiktorisch (kontravalent).

3. *Kontrarität und Subkontrarität*: SaP und SeP sind zueinander konträr, SiP und SoP subkonträr (vgl. Abschnitt 1.12).

Ein (kategorisch-assertorischer) Syllogismus im engeren Sinn ist nun ein Argument, bestehend aus drei untereinander geschriebenen Aussagen – die zwei ersten heißen *Prämissen* (Vordersätze), die dritte seine *Konklusion* (Schlussatz) – so dass (1) sowohl die beiden Prämissen als auch die Konklusion syllogistische Urteile (a-,i-,e- oder o-Urteile) ausdrücken, (2) und jeder Begriffsterm genau zweimal, und zwar in verschiedenen Urteilen, vorkommt.

Forderung (2) bedeutet: Sind S und P der Subjekts- und Prädikatsbegriff der Konklusion (man nennt dieses S den *Unterbegriff* und P den *Oberbegriff* des Syllogismus), so muss der Oberbegriff P auch in genau einer der beiden Prämissen vorkommen: Diese Prämisse heißt der *Obersatz* (praemissa maior) und ist in der gewöhnlichen Schreibweise die erste (oberste) Zeile des

Syllogismus. Die andere Prämisse heißt *Untersatz* (praemissa minor); sie muss aufgrund von (2) den Unterbegriff S enthalten.²³ Nun muss der Oberbegriff außer P noch einen weiteren Begriff M enthalten, ebenso der Unterbegriff außer S noch einen weiteren Begriff M'; dabei sind M und M' wegen (2) ein und derselben Begriff: Diesen nennt man den *Mittelbegriff*.

Schematisch hat also ein Syllogismus die folgende Form:

Erste Prämisse (Obersatz): ein syllogistisches Urteil, in dem Oberbegriff P und Mittelbegriff M vorkommen.

Zweite Prämisse (Untersatz): ein syllogistisches Urteil, in dem Unterbegriff S und Mittelbegriff M vorkommen.

Konklusion: ein syllogistisches Urteil über S und P in der Form SaP, SiP, SeP oder SoP.

Oft lässt man eine als selbstverständlich empfundene Prämisse weg oder deutet sie nur an; ebenso lässt man die Konklusion weg und oder deutet sie nur an, etwa durch „ergo“. Ein solcher unvollständiger, vom Leser zu ergänzender Syllogismus heißt ein *Enthymem* (griech. Gedankenstoß, Einfall, Erwägung). Bsp. „Alle Katzen mögen Milch, Miezi ist eine Katze, ergo.“ (Weglassen der Konklusion). Oder: „Katzen mögen Milch. Also auch Miezi.“ (Weglassen der zweiten Prämisse).

Je nach der Stellung des Mittelbegriffs in den zwei Prämissen unterscheidet man vier sog. Schlussfiguren:

erste Figur: $M \square P$ $S \square M$ ----- $S \square P$	zweite Figur: $P \square M$ $S \square M$ ----- $S \square P$	dritte Figur: $M \square P$ $M \square S$ ----- $S \square P$	vierte Figur: $P \square M$ $M \square S$ ----- $S \square P$
--	---	---	---

In der ersten und vierten Figur bilden die beiden M eine Diagonale, in der zweiten und dritten stehen sie untereinander. Um sich die Figuren zu merken, merke man sich einfach die vier Striche des Buchstabens W in der Form $\|\|/$: Diese symbolisieren in der Reihenfolge, in der sie geschrieben werden, die Lage der Mittelbegriffe in der ersten, zweiten, dritten und vierten Figur.

Da man in jeder der vier Figuren vier Möglichkeiten (a,i,e,o) für den Obersatz, vier für den Untersatz und vier für die Konklusion hat, gibt es insgesamt $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ Syllogismen (bzw. sog. Schlussweisen = „Modi“ der Syllogismen). Aber nicht alle sind korrekte Schlüsse; korrekt sind nur 24 (nämlich sechs Modi in jeder Figur). Von diesen sind fünf sog. „abgeschwächte“ oder „subalterne“ Modi: Ein subaltern Modus M ist ein solcher, zu dem es einen anderen Modus mit denselben Prämissen gibt, derart dass die Konklusion von M sofort aus der Konklusion dieses anderen Modus folgt, und zwar durch Übergang von a zu i oder von e zu o. Diesen logischen Übergang nennt man den Schluss vom Allgemeinen zum Besonderen oder das *dictum de omni et nullo* (dabei steht „de omni“ für den Schluss von der allgemeinen Bejahung a zur partikulären Bejahung i, und „de nullo“ für denjenigen von der allgemeinen Verneinung e zur partikulären Verneinung o).²⁴ Zählt man die fünf subalternen Modi nicht mit, bleiben nur 19 korrekte Syllogismen übrig (4 gehören zur ersten, 4 zur zweiten, 6 zur dritten und 5 zur vierten Figur); diese heißen *reguläre Modi*. Da Aristoteles die vierte Figur nicht mit einbezog (sie galt als ganz und gar *unnatürliche Nebenform* der ersten Figur), beschrieb Aristoteles ursprünglich nur 14 korrekte Syllogismen. Die erste Figur galt als *perfekt*, die übrigen galten als *imperfekt* und mehr oder weniger *unnatürlich*. Die gültigen Syllogismen oder gültigen „Modi“ der Syllogismen wurden erstmals um 1240 von den Scholastikern (etwa zeitgleich von *Petrus Hispanus*, der wahrscheinlich mit dem späteren Papst Joh. XXI. identisch ist, und *William of Sherwood* – die Priorität ist umstritten) durch ein spezielles Bezeichnungs- und Kodierungssystem beschrieben:

I. Figur:

Barbara	Celarent	Darii	Ferio
M a P	M e P	M a P	M e P
S a M	S a M	S i M	S i M
-----	-----	-----	-----
S a P	S e P	S i P	S o P
Barbari (subaltern)	Celaront (subaltern)		
M a P	M e P		
S a M	S a M		
-----	-----		
S i P	S o P		

II. Figur:

Baroco	Camestres	Cesare	Festino
P a M	P a M	P e M	P e M
S o M	S e M	S a M	S i M
-----	-----	-----	-----
S o P	S e P	S e P	S o P
	Camestrop (subaltern)	Cesaro (subaltern)	
	P a M	P e M	
	S e M	S a M	
	-----	-----	
	S o P	S o P	

²³ Denn S muss gemäß (2) außer in der Konklusion noch in genau einer der beiden der Prämissen vorkommen, aber im Obersatz kann S nicht enthalten sein, weil sonst im Obersatz genau wie in der Konklusion S und P vorkämen, so dass der Untersatz nur noch von S und P verschiedene Begriffe enthalten dürfte. Diese Begriffe aber kämen dann nur einmal in dem Syllogismus vor, im Widerspruch zu (2).

²⁴ Die lateinische Ausformulierung des „dictum“ lautet: „Quidquid de omnibus valet, valet etiam de quibusdam et singulis; quidquid de nullo valet, nec de quibusdam et singulis valet“.

III. Figur:

Bocardo	Darapti	Datisi	Disamis	Felapton	Ferison
M o P	M a P	M a P	M i P	M e P	M e P
M a S	M a S	M i S	M a S	M a S	M i S
-----	-----	-----	-----	-----	-----
S o P	S i P	S i P	S i P	S o P	S o P

IV. Figur:

Bamalip	Calemes	Dimatis	Fesapo	Fresison
P a M	P a M	P i M	P e M	P e M
M a S	M e S	M a S	M a S	M i S
-----	-----	-----	-----	-----
S i P	S e P	S i P	S o P	S o P
	Calemop (subaltern)			
	P a M			
	M e S			

	S o P			

Die Namen der Modi weichen in verschiedenen Quellen geringfügig voneinander ab; wird die vierte Figur nur als Nebenfigur der ersten angesehen (man vertauscht dann die Prämissen, so dass der Mittelbegriff wie in der ersten Figur angeordnet ist, und hat dann abweichend von den anderen Syllogismen den Subjektsterm im Ober- und den Prädikatsterm im Untersatz), so heißen die Modi statt Bamalip, Calemes, Dimatis, Fesapo und Fresison meist Baralipon, Celantes, Dabitis, Fapesmo, Frisesomorum.

Als Vokale kommen in den Merkwörtern der Syllogismen nur a,i,e,o vor; der erste Vokal im Merkwort bezieht sich auf die erste Prämisse, der zweite Vokal auf die zweite Prämisse, der dritte auf die Konklusion. Am Wort „Barbara“ erkennt man somit, dass bei dieser Schlussweise nur a-Urteile vorkommen.

Die **Korrektheit** der regulären Modi der ersten Figur macht man sich leicht anhand von Mengendiagrammen klar. Die subalternen Modi folgen aus den entsprechenden nicht-subalternen Modi mittels des „dictum de omni et nullo“ (siehe Fußnote 24: was für alle gilt – de omni – gilt auch von einigen und jedem einzelnen; was für keinen gilt – de nullo – gilt auch nicht von einigen und gilt von keinem einzelnen).

Was die übrigen Modi (also die regulären Modi der zweiten, dritten und vierten Figur) betrifft, so kann man sie aus den Modi der ersten Figur logisch ableiten. Wie man das macht, zeigen die Konsonanten in den Bezeichnungen dieser Modi:

- Der Anfangskonsonant gibt an, auf welchen Modus der ersten Figur der Modus rückführbar (bzw. von welchem er ableitbar ist), z.B. ist Baroco rückführbar auf Barbara, Cesare und Camestres auf Celarent usw.
- Der Buchstabe s nach einem Vokal gibt an, dass bei dieser logischen Rückführung auf den entsprechende Modus der ersten Figur eine „conversio simplex“ (einfache Vertauschung) von Subjekt und Prädikat zu erfolgen hat: Dies führt nur bei i- und e-Urteilen (Merkhilfe: simplex) offenbar zu einer äquivalenten Aussage, und wird daher nur in solchen Urteilen angewendet.
- Der Buchstabe p nach einem Vokal gibt an, dass bei der Rückführung eine „conversio per accidens“, d.h. Vertauschung von Subjekt und Prädikat, wobei zugleich a zu i und e zu o wird (also das allgemeinere a/e durch das spezielleren i/o zu ersetzen ist); so wird z.B. aus MaS ein SiM, aus SeP ein PoS usw., was eine korrekte Schlussfolgerung ist (die *nicht* umkehrbar ist).
- Der Buchstabe m steht für „mutatio praemissarum“ oder „metathesis praemissarum“, d.h. für die Anweisung, die Prämissen zu vertauschen. Das führt offensichtlich zu einem äquivalenten Schluss.
- Der Buchstabe c steht für **contradictio** oder **conversio syllogismi** und deutet an, dass ein indirekter Beweis („Widerspruchsbe-
weis“) zum Ziel führt: man zeigt mittels eines Modus der 1. Figur, dass aus der negierten Konklusion und einer der Prämissen die Negation der anderen Prämisse folgt.

Die übrigen Konsonanten der Merkwörter (d,l,n,r,t) dienen lediglich der klanglichen Abrundung.

Es folgen Beispiele für eine „Rückführung“ auf einen (bzw. für eine Ableitung aus einem) Modus der ersten Figur.

Bsp. 1. Der Modus Cesare (2. Figur) wird (wegen des Anfangsbuchstabens C) auf den Modus Celarent der 1. Figur zurückgeführt, und zwar durch conversio simplex des Obersatzes (wegen Ces-are). Das geht so:

Cesare:

PeM Vertauschen wir im Obersatz P und M (conversio simplex), erhalten wir:
 SaM

 SeP

Celarent:

MeP
 SaM

 SeP.

Bsp. 2. Der Modus Disamis (3. Figur) wird (wegen des Anfangsbuchstabens D) auf den Modus Darii der 1. Figur zurückgeführt, und zwar durch folgende Schritte: Zuerst *conversio simplex* des Obersatzes (wegen Dis-am-is), dann *metathesis praemissarum* (wegen Dis-am-is) und am Ende wieder *conversio simplex* der Konklusion (wegen Dis-am-is):

<u>Disamis:</u>			<u>Darii:</u>				
MiP	erster Schritt:	PiM	zweiter Schritt:	MaS	dritter Schritt:	MaS	Bemerkung: „S“ bezeichnet jetzt das
MaS		MaS		PiM		PiM	Prädikat, und „P“ das Subjekt
----		----		----		----	
SiP		SiP		SiP		PiS	

Bsp 3. Der Modus Bamalip (4. Figur) wird (wegen des Anfangsbuchstabens B) auf Barbara zurückgeführt: Zuerst erfolgt (wegen Bam-al-ip) eine *metathesis praemissarum*, dann (wegen Bam-al-ip) eine *conversio per accidens* in der Konklusion:

<u>Bamalip:</u>			<u>Barbara:</u>		
PaM	erster Schritt:	MaS	zweiter Schritt:	MaS	Bemerkung: Anfänger wenden oft ein, man habe im zweiten
MaS		PaM		PaM	Schritt aus SiP ein PaS gemacht, obwohl nur aus PaS gefol-
----		----		----	gert werden kann, dass SiP gilt, und nicht umgekehrt.
SiP		SiP		PaS	

Aber wer dies bemängelt, hat die Beweisstruktur nicht verstanden. Sie ist wie folgt:
Wir setzen die Bamalip-Prämissen PaM und MaS als wahr voraus und wollen zeigen, dass SiP gilt. Wenn PaM und MaS gilt, so natürlich auch MaS und PaM (1. Schritt = *mutatio*). Aber aus MaS und PaM folgt per Modus Barbara, dass auch PaS gilt. Von PaS her gelangen wir aber durch *conversio per accidens* zu SiP, der Konklusion von Bamalip, was den Beweis abschließt. – Indem wir im zweiten Schritt SiP durch PaS ersetzt haben, und so Barbara erhielten, sind wir also nicht „in Richtung der logischen Folgerung“ marschiert, sondern gewissermaßen in die „Gegenrichtung“. Das ist aber in Ordnung, da wir ja nicht ausgehend von Bamalip den Modus Barbara ableiten wollen, sondern umgekehrt von Barbara ausgehend Bamalip.

Dies ist ein Sonderfall der Anwendung der *conversio per accidens*, weil man diese hier auf die Konklusion anwendet. In den übrigen Fällen wendet man sie auf die Prämissen an, und dann verläuft die Vertauschung in der normalen Richtung, wie das folgende Beispiel zeigt:

Bsp. 4. Der Modus Felapton (3. Figur) wird (wegen des Anfangsbuchstabens F) auf Ferio zurückgeführt. Dabei erfolgt (wegen Fel-ap-ton) in der zweiten Prämisse eine *conversio per addidens*:

<u>Felapton:</u>		<u>Ferio:</u>	
MeP		MeP	
MaS	erster und einziger Schritt:	SiM	
----		----	
SoP		SoP	

Bsp. 5. Der für die kompliziertere Beweistechnik der *conversio syllogismi* stehende Buchstabe **c** im Wortinneren kommt nur bei Baroco (2. Figur) und Bocardo (3. Figur) vor. Diese Modi werden auf Barbara der 1. Figur zurückgeführt. Bsp. Bocardo:

<u>Bocardo:</u>	Die Prämissen von Bocardo MoP, MaS seien wahr. Annahme: Die Bocardo-Konklusio SoP ist falsch.
MoP	Dann ist das kontradiktorische Gegenteil SaP (siehe logisches Quadrat) wahr. Um jetzt Modus Barbara anwenden
MaS	zu können, müssen wir SaP mit einer der Prämissen MoP, MaS kombinieren. Dafür kommt nur MaS in Frage.
----	Barbara aber liefert aus SaP und MaS, dass MaP wahr ist. Dann muss das kontradiktorische Gegenteil MoP von
SoP	MaP aber falsch sein. Aber MoP ist eine der als wahr vorausgesetzten Prämissen: Widerspruch.
	Damit ist die Annahme zu verwerfen: SoP ist wahr.

Während man mit diesen Rückführungsbeweisen die *Korrektheit* aller 24 Modi schnell einsehen kann, ist es mühseliger, sich von der *Inkorrektheit* der übrigen 232 (= 256–24) Modi zu überzeugen, und somit einzusehen, dass die *Liste der korrekten Modi vollständig* ist. Die Scholastiker halfen sich hier (unter anderem!) mit den folgenden, relativ leicht (?) einsichtigen Regeln, welche die Anzahl der durch Sonderüberlegungen zu überprüfenden Modi etwas verringern.

- Wenn beide Prämissen partikulär sind, ist der Schluss inkorrekt („ex mere particularibus nihil sequitur“).
- Wenn beide Prämissen negativ sind, ist der Schluss inkorrekt („ex mere negativis nihil sequitur“).
- Ist eine der Prämissen negativ bzw. partikulär, so auch die Konklusion. Man nannte Negation und Partikularität „schwächer“ als Affirmation und Universalität; daher fasste man diese Merkregel zusammen durch den Satz „conclusio sequitur peiorem partem“ (deutsch: Die Konklusion folgt dem „schwächeren“ Teil).

Übung 8:

- Zeigen Sie analog zur Rückführung von Bocardo auf Barbara, wie man Baroco auf Barbara zurückführt.
- Zeigen Sie für Modus Camestres, wie man dessen Korrektheit mit den in seinem Namen kodierte Methoden nachweist.

5. Aussagenlogik

Wir beschreiben die Sprache der Aussagenlogik, indem wir ihre Syntax, Semantik und Pragmatik beschreiben (siehe oben S. 3).

1. Syntax

Das Alphabet (d.h. die Kollektion der Zeichen) einer formal-logischen Sprache besteht aus

- (1) einer zulässigerweise leeren Klasse von *Hilfszeichen* zur Beseitigung von Mehrdeutigkeit.
 - (2) einer zulässigerweise leeren Klasse von *Variablen*,
 - (3) einer nichtleeren Klasse von sog. *logischen Konstanten*,
 - (4) einer nichtleeren Klasse von *nichtlogischen Konstanten*.
- Die Klasse (1) der Hilfszeichen ist in der Syllogistik leer. In der Aussagenlogik kann man auch ohne Hilfszeichen auskommen, wenn man die polnische Syntax benutzt; andernfalls nimmt man als Hilfszeichen Klammern oder Trennzeichen; man muss bei der konkreten Wahl des Alphabets einer aussagelogischen Sprache festlegen, ob und welche Hilfszeichen man verwendet. Für unsere Beispielsprache wählen wir – wie meist üblich – als einzige Hilfszeichen die Klammern (und).
 - Die Klasse (2) der Variablen ist in der Syllogistik leer, und auch in der Aussagenlogik verzichtet man auf Variablen.²⁵
 - Die Klasse (3) der logischen Konstanten besteht in der Syllogistik aus den vier Buchstaben a,i,e,o. In der Aussagenlogik enthält diese Klasse das Verum \top , das Falsum \perp und ansonsten ausschließlich sog. *Junktoren*: Das sind „Verbindungszeichen“, die mit einer Reihe von n Aussagen zusammengestellt eine neue komplexere Aussage erzeugen, welche „wahrheitsfunktional“ ist, d.h. deren Wahrheitswert ausschließlich von den Wahrheitswerten der n mit dem Junktor zusammengestellten Aussagen abhängt. Man wählt als Junktoren für eine konkrete aussagelogische Sprache meist alle oder einige Zeichen aus der folgenden Liste aus: $\neg, \neg, \wedge, \vee, \dot{\vee}, \rightarrow, \leftarrow, \leftrightarrow, \leftrightarrow, \uparrow, \downarrow$, wobei manche Logiker etwas andere Zeichen benutzen. Alle Zeichen der Klassen (3) haben eine feste logische Bedeutung (siehe unten). Für die Syntax ist nur wichtig, dass man die Zeichen der Klassen (3) und (4) mit einer festgelegten Anzahl n von Ausdrücken (d.h. hier Formeln)²⁶ der aussagelogischen Sprache zusammenstellen muss, damit ein neuer Ausdruck (= eine neue Formel) der Aussagenlogik entsteht. Je nachdem spricht man von einem n -stelligen Zeichen (oder Funktor). 0-stellige Junktoren sind \top, \perp : Diese müssen mit null Ausdrücken zusammengestellt werden, damit eine Aussage entsteht. Anders gesagt bedeutet dies: Sie sind für sich genommen schon Aussagen. 1-stellige Junktoren sind \neg und \neg . Sie werden also mit einem Ausdruck A zu einem neuen Ausdruck $\neg A$ bzw. $\neg A$ zusammengestellt. Zu den 2-stelligen Junktoren gehören $\wedge, \vee, \dot{\vee}, \rightarrow, \leftarrow, \leftrightarrow, \leftrightarrow, \uparrow, \downarrow$. Diese werden mit zwei Ausdrücken A, B , zu einem neuen Ausdruck zusammengestellt; meist ist es üblich, die beiden Ausdrücke rechts und links vom Junktor hinzuschreiben, also z.B. $A \wedge B$. In der polnischen Syntax folgen beide Ausdrücke rechts vom Junktor, man schreibt also $\wedge A B$. Bei mehr-als-2-stelligen Junktoren kommen alle Ausdrücke rechts vom Junktor. Üblicherweise werden aber gar keine mehr-als-2-stelligen Junktoren²⁷ benutzt; meist beschränkt man sich auf die Junktoren $\top, \perp, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. Diese Junktorenliste setzen auch wir in unserer aussagelogischen Beispielsprache voraus.
 - Die Klasse (4) der nichtlogischen Konstanten besteht in der Syllogistik aus den drei Buchstaben P, S, M. In der Aussagenlogik wählt man eine beliebige nichtleere Klasse von Buchstaben. Für unsere Beispielsprache seien dies A, B, C, D.

	Hilfszeichen	Variablen	logische Konstanten	nichtlogische Konstanten
Syllogistik	—	—	a, i, e, o	S, P, M
Aussagenlogik (Beispiel)	(,)	—	$\perp, \top, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$	A, B, C, D

Zur Syntax einer formal-logischen Sprache gehört eine sog. **Ausdrucksableitung**, die festlegt, welche Zeichenreihen Ausdrücke (auch: Formeln oder wohlgeformte Formeln, well formed formulas, wffs) sind und welche nicht: eine Folge von Zeichenreihen (die z.B. als Zeilen untereinander geschrieben werden), die nach bestimmten Regeln gebildet wird, wobei dann jede so gebildete Zeile einen Ausdruck darstellt. Üblich ist es z.B., folgende drei Regeln für die Ausdrucksableitung festzulegen:

Eine zeilenweise Folge von Zeichenreihen ist eine Ausdrucksableitung, wenn sie nach folgenden Regeln gebildet ist:

- (1) In jede Zeile darf man (\top) oder (\perp) oder eine eingeklammerte nichtlogische Konstante schreiben.
- (2) Hat man in schon vorliegenden Zeilen eine Zeichenreihe A , so darf man in der nächsten Zeile ($\neg A$) schreiben.
- (3) Hat man schon Zeichenreihen A und B , darf man in der nächsten Zeile ($A \wedge B$), ($A \vee B$), ($A \rightarrow B$) oder ($A \leftrightarrow B$) schreiben. (Bemerkung: A, B sind hier im Gegensatz zu den Konstanten A, B metasprachliche Variablen für Zeichenreihen.)

Eine Zeichenreihe Z ist genau dann ein Ausdruck, wenn es eine Ausdrucksableitung gibt, in der Z die letzte Zeile ist (eine solche Ausdrucksableitung heißt eine „Ausdrucksableitung für den Ausdruck Z “).

Da die oberste Zeile einer Ausdrucksableitung nur nach Regel (1) gebildet werden kann, muss man als oberste Zeile (A),(B),(C), (D), (\top) oder (\perp) hinschreiben; in jedem folgenden Schritt kann man dies ebenfalls tun, aber auch gemäß (2) oder (3) auch einen Ausdruck schreiben, der mit den übrigen logischen Konstanten $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ gebildet wird. Beispiel:

(A)
 $\neg(A)$
 $((\neg(A)) \vee (A))$

ist eine Ausdrucksableitung und dessen letzte Zeile $((\neg(A)) \vee (A))$ ein Ausdruck. Auch die vorhergehenden Zeilen $\neg(A)$ und (A) sind Ausdrücke, da man nach jeder Zeile Z aufhören kann und dann eine Ausdrucksableitung für Z hat.

²⁵ Abweichend hiervon betrachten manche in der Aussagenlogik sog. boolsche Variablen, die für Aussagen stehen. Diese werden dann jedoch nur auf der metalogischen Ebene gebraucht.

²⁶ Sämtliche Ausdrücke der aussagelogischen Sprache nennt man *Formeln* (denn es sind im semantischen Sinn, wie wir sehen werden, keine Terme).

Bemerkung: Durch die Klammern werden schon bei der Bildung der Ausdrücke Mehrdeutigkeiten vermieden.

Weglassen von Klammern: Bei der Ausdrucksableitung nach obigen Regeln entstehen viele überflüssige Klammern, die man am Ende wieder weglassen darf, wenn kein Missverständnis möglich ist. Lässt man Klammern weg, erhält man allerdings Zeichenreihen, die streng genommen keine Ausdrücke mehr sind; es sind dann *Namen* für Ausdrücke, die man üblicherweise anstelle der eigentlichen Ausdrücke verwendet. Es gibt folgende Regeln zur Einsparung von Klammern:

1. Die äußeren Klammern und die Klammern um Konstanten und 0-stellige Junktoren dürfen immer weggelassen werden. Z.B. schreibt man für $((\neg(A)) \vee (A))$ demnach einfach $(\neg A) \vee A$.

2. Kommt \vee oder \wedge mehrfach hintereinander vor, lässt man oft die Klammern weg und vereinbart, dass der klammerlose Ausdruck für den durch wiederholte Linksklammerung entstehenden steht: Z.B. ist $A \wedge B \wedge C \wedge D$ Name für $((A \wedge B) \wedge C) \wedge D$. Bemerkung: Genau genommen ist $((A \wedge B) \wedge C) \wedge D$ ebenfalls ein Name; um den Ausdruck zu bekommen, für den er steht, müssen wir nach Regel 1 noch die äußeren und inneren Klammern setzen; vollständig ausgeschrieben lautet also der benannte Ausdruck $((((A) \wedge (B)) \wedge (C)) \wedge (D))$.

3. Man vereinbart eine bestimmte Bindungskraft für die logischen Zeichen (vgl. Abschnitt 1.18), und zwar gilt,

a) dass die stärksten Junktoren die einstelligen sind (zu denen \neg gehört), wobei diese untereinander gleich stark sind,

b) dass auf der nächst schwächeren Kraftstufe die „hütchenartigen“ Junktoren stehen, insbesondere \wedge, \vee , wobei die Hütchen in der (für Hüte) normalen Stellung (wie \wedge) stärker sind als die verkehrt herum stehenden (wie \vee),

c) dass auf der nächst schwächeren Kraftstufe die „pfeilartigen“ Junktoren (außer dem Doppelpfeil \leftrightarrow) stehen, insbesondere \rightarrow ,

d) und dass der allerschwächste Junktor schließlich der Doppelpfeil \leftrightarrow ist.

Da die stärksten Zeichen die zuerst zu verarbeitenden Ausdrücke verbinden (um die also die innersten Klammern zu setzen wären), ist nach dieser „Kräftevereinbarung“ z.B. $A \wedge \neg B \rightarrow C \leftrightarrow D$ ein Name für $((A \wedge (\neg B)) \rightarrow C) \leftrightarrow D$.

Bemerkung: Genau genommen ist auch $((A \wedge (\neg B)) \rightarrow C) \leftrightarrow D$ ein Name. Den damit benannten Ausdruck erhalten wir, indem wir noch die äußeren und inneren Klammern setzen, vollständig ausgeschrieben wäre das $((((A) \wedge (\neg(B))) \rightarrow (C)) \leftrightarrow (D))$.

Als Alternative für die Probleme mit Klammern ist die von vornherein klammerfreie polnische Syntax anzusehen. Wenn wir uns hierfür entscheiden, müssen wir die Regeln in unserer Ausdrucksableitung durch die folgenden ersetzen:

(1p) In jede Zeile darf man \top, \perp oder eine nichtlogische Konstante schreiben.

(2p) Hat man in schon vorliegenden Zeilen eine Zeichenreihe A , so darf man in der nächsten Zeile $\neg A$ schreiben.

(3p) Hat man in schon A und B , darf man in der nächsten Zeile $\wedge AB$ oder $\vee AB$ oder $\rightarrow AB$ oder $\leftrightarrow AB$ schreiben.

Bemerkung: In der ursprünglichen, von Jan Łukasiewicz (1878-1956) erfundenen polnischen Syntax werden für die Junktoren Großbuchstaben benutzt, und zwar N, K, A, C, E für $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Länge eines Ausdrucks, elementare (atomare) und zusammengesetzte Ausdrücke. Unter der Länge eines Ausdrucks versteht man die Anzahl der in ihm vorkommenden (Exemplare von) mehr-als-0-stelligen Junktoren. Z.B. haben die Ausdrücke (A) und (\top) die Länge 0, der Ausdruck $(\neg(B))$ hat die Länge 1, der Ausdruck $((\neg(A)) \vee (A))$ die Länge 2. Jeder Ausdruck der Länge 0 heißt *elementar* oder *atomar*, und jeder Ausdruck der Länge > 0 heißt *zusammengesetzt*.

Hauptjunktor eines Ausdrucks. Jeder zusammengesetzte Ausdruck besitzt einen Hauptjunktor. Er hat nämlich entweder die Form (nA) mit einem Ausdruck A und einem 1-stelligen Junktor n oder die Form (AcB) mit Ausdrücken A, B und einem 2-stelligen Junktor c , denn im ersten Fall ist das zweite Zeichen n , im zweiten Fall aber ist es eine Klammer (die Anfangsklammer von A). Im zweiten Fall sind außerdem c und die Teilausdrücke A, B eindeutig bestimmt, denn der Teilausdruck A ist derjenige, der mit der zweiten Klammer von (AcB) beginnt, und mit dem „Partner“ dieser Klammer endet (jede Klammer hat ihren Partner, den man findet, indem man die Klammern zu Kreisen ausmalt, ohne dass sich zwei dieser „Klammerkreise“ schneiden). Im ersten Fall ist das zweite Zeichen n der Hauptjunktor, im zweiten ist es derjenige 2-stellige Junktor c , der nach dem Teilausdruck A kommt.

Bemerkung 1: Die fettgedruckten Buchstaben A, B sind hier im Gegensatz zu A, B (was ja unsere nichtlogischen Konstanten sind), metasprachliche Variablen für Zeichenreihen, in diesem Fall für Ausdrücke.

Bemerkung 2: Benutzt man eine Sprache mit polnischer Syntax, so ist der Hauptjunktor einfach immer das erste Symbol.

Prüfung, ob ein Ausdruck vorliegt. Liegt eine Zeichenreihe Z vor, in der mehr-als-0-stellige Junktoren vorkommen, und will man prüfen, ob diese Zeichenreihe ein Ausdruck ist, geht man wie folgt vor:

1. Man prüft, ob das zweite Zeichen ein 1-stelliger Junktor n oder die Klammer $($ ist. Wenn nicht, liegt kein Ausdruck vor.

2. Ist das zweite Zeichen n , müsste dies im Fall, dass ein Ausdruck vorliegt, der Hauptjunktor sein, und der Ausdruck muss die Form (nA) haben, wobei A ein Ausdruck ist. Man prüft, ob die Zeichenreihe die Form (nA) hat: Wenn nicht, liegt kein Ausdruck vor. Wenn ja, muss ist zu prüfen, ob A ein Ausdruck ist, und Z ist genau dann ein Ausdruck, wenn dies für A gilt.

3. Ist das zweite Zeichen die Klammer $($, so prüft man, ob die Zeichenreihe die Form (AcB) hat, wobei A und B mit einer Klammer anfangen und mit einer Klammer aufhören, welche der Partner der Anfangsklammer ist, und c ein 2-stelliger Junktor ist. Wenn nicht, liegt kein Ausdruck vor. Wenn ja, müsste im Fall, dass ein Ausdruck vorliegt, c der Hauptjunktor sein und man muss im nächsten Schritt prüfen, ob A und B Ausdrücke sind; Z ist genau dann ein Ausdruck, wenn dies für A und B gilt.

Dieses Verfahren endet entweder mit der Feststellung, dass kein Ausdruck vorliegt, oder damit, dass gewisse „Unterzeichenreihen“ A bzw. A und B (nach demselben Verfahren) daraufhin geprüft werden müssen, ob sie Ausdrücke sind. Da die zu prüfenden Unterzeichenreihen weniger mehr-als-0-stellige Junktoren haben als die ursprüngliche Zeichenreihe Z , gelangt man nach endlich vielen Verfahrensschritten (wenn das Verfahren nicht mit der Feststellung endet, dass kein Ausdruck vorliegt) zur Untersuchung von Zeichenreihen, in der gar keine mehr-als-0-stelligen Junktoren vorkommen. Bei diesen kann man aber sofort erkennen, ob es Ausdrücke sind oder nicht, denn es kann sich dann gegebenenfalls nur noch um elementare Ausdrücke handeln.

2. Semantik

Ein *semantisches Modell* / *eine semantische Struktur* für die Syllogistik ist eine Funktion σ , die jeder nichtlogischen Konstanten einen konkreten Begriff zuordnet. Beispiel: σ könnte den nicht-logischen Konstanten S, P, M die Begriffe „Schäferhund“ bzw. „bissig“ bzw. „Hund“ zuordnen. In diesem semantischen Modell hat dann „MaP“ die Bedeutung „alle Hunde sind bissig“, „SaM“ die Bedeutung „alle Schäferhunde sind Hunde“ und „SaP“ die Bedeutung „alle Schäferhunde sind bissig“.

Entsprechend ist ein semantisches Modell / eine semantische Struktur für die Aussagenlogik (unserer Beispielsprache) eine Funktion σ , die jeder nichtlogischen Konstante unserer aussagelogischen Sprache einen konkreten Wahrheitswert zuordnet. Beispiel: $\sigma(A) = w$, $\sigma(B) = f$, $\sigma(C) = w$, $\sigma(D) = w$. Diese Zuordnung kann etwa so geschehen, dass $\sigma(A)$, $\sigma(B)$, $\sigma(C)$, $\sigma(D)$ die Wahrheitswerte konkreter Aussagen sind, für die dann die Buchstaben stehen (etwa A = Anton geht schwimmen).

Während also das semantische Modell die Bedeutung der *nichtlogischen* Konstanten festlegt (was in verschiedener Weise geschehen kann, also in gewisser Weise trotz der Bezeichnung „Konstanten“ in verschiedenem Anwendungskontext variabel ist) – man spricht von der jeweiligen Bedeutung „in“ einem konkreten semantischen Modell – ist die Bedeutung der *logischen* Konstanten von vornherein und für alle Anwendungen feststehend. Im Fall der Syllogistik haben also die Vokale a,e,i,o immer dieselbe (im vorherigen Kapitel erläuterte) Bedeutung; und im Fall der Aussagenlogik ist die Bedeutung der Junktoren immer dieselbe. Und zwar ist diese wie folgt festgelegt, wobei man die Bedeutung sowohl durch eine Beschreibung als auch – sehr präzise – durch eine sog. *Wahrheitstabelle* angeben kann (siehe unten).

Bedeutung der 0-stelligen Funktoren: \top (der Verifikator) und \perp (der Falsifikator).

- \top (Lesart: „das Verum (ist wahr)“, die *0-stellige Tautologie* oder *Einsformel*) hat den Wahrheitswert w,
- \perp (Lesart: „das Falsum (ist wahr)“, die *0-stellige Antilogie*, *Kontradiktion* oder *Nullformel*) den Wahrheitswert f.

Wahrheitstabelle:

\top	\perp
w	f

Bedeutung der 1-stelligen Junktoren: \neg (Negator), $-$ (Affirmator), \top_1 (1-stelliger Verifikator) und \perp_1 (1-stelliger Falsifikator). Ist A eine Aussage, so ist

- $\neg A$ (Lesart: „nicht A“, die *Negation* von A) genau dann wahr, wenn A falsch ist; alternative Schreibweisen für \neg sind \sim und Überstreichen: Man schreibt für $\neg A$ auch $\sim A$ oder \bar{A} .
- $-A$ (Lesart: „A gilt“, die *Affirmation* von A) genau dann wahr, wenn auch A wahr ist; alternative Schreibweisen sind $\neg A$, $\checkmark A$.
- $\top_1 A$ (Lesart: „Wahrheit unabhängig von A“, die mit A gebildete *1-stellige Tautologie* oder *Einsformel*) unabhängig vom Wahrheitswert von A wahr; alternative Schreibweise ist \top : Man schreibt für $\top_1 A$ auch einfach $\top A$.
- $\perp_1 A$ (Lesart: „Falschheit unabhängig von A“, die mit A gebildete *1-stellige Antilogie*, *Kontradiktion* oder *Nullformel*) unabhängig vom Wahrheitswert von A falsch; alternative Schreibweise ist \perp : Man schreibt für $\perp_1 A$ auch einfach $\perp A$.

Wahrheitstabellen:

A	$\neg A$	A	$-A$	A	$\top_1 A$	A	$\perp_1 A$
w	f	w	w	w	w	w	f
f	w	f	f	f	w	f	f

Die Affirmation ist in der Aussagenlogik in der Praxis überflüssig, denn statt $-A$ kann man einfach A schreiben. Ebenso uninteressant sind die Aussagen $\top_1 A$ und $\perp_1 A$, da deren Wahrheitswerte von A nicht abhängen.

Bedeutung der 2-stelligen Junktoren. Man kann theoretisch sechzehn 2-stellige Junktoren bilden, da es 16 Möglichkeiten gibt, in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten zweier Aussagen denjenigen einer dritten festzulegen. In der Praxis benötigt man nicht alle, im Folgenden seien sie aber einmal vollständig aufgezählt und besprochen: \wedge (Konjunkt), \vee (Adjunkt/inklusiver Disjunkt), \vee (exklusiver Disjunkt), \uparrow (Nand-Junkt), \downarrow (Nor-Junkt), \rightarrow (Subjunkt), \leftrightarrow (Bijunkt oder Äquijunkt), \leftarrow (Replikator), \rightarrow (Postsektor), \leftarrow (Präsektor), \downarrow (Präpendenzzeichen), \downarrow (Postpendenzzeichen), \uparrow (Pränonpendenzzeichen), \uparrow (Postnonpendenzzeichen), \top_2 (2-stelliger Verifikator) und \perp_2 (2-stelliger Falsifikator). Sind A und B Aussagen, so ist

- $A \wedge B$ (Lesarten: „A und B“, „sowohl A als auch B“, die *Konjunktion* von A und B; die Stoiker sprachen vom *sympeplegmenon*) genau dann wahr, wenn A,B beide wahr sind; alternative Schreibweisen sind $\&$, \cdot und Zusammenschreiben: Man schreibt also für $A \wedge B$ auch $A \& B$ oder $A \cdot B$ oder einfach AB ,
- $A \vee B$ (Lesarten: „A oder auch B“, „A oder B“, „A vel B“, die *Adjunktion*, *inklusive Disjunktion*, *einschließende Oder-Aussage* oder *Vel-Verknüpfung* von A und B) genau dann wahr, wenn A, B oder beide wahr sind; alternative Schreibweise ist $+$: Man schreibt für $A \vee B$ auch $A+B$,
- $A \dot{\vee} B$ (Lesarten: „A oder aber B“, „entweder A oder B“, „A aut B“, „A xor B“, die *exklusive Disjunktion*, *ausschließende Oder-Aussage*, *Alternative*, *materiale Kontravalenz* oder *Antivalenz*, *Aut-Verknüpfung* oder *Xor-Verknüpfung* von A und B; die Stoiker sprachen vom *Diëzeugmenon*) genau dann wahr, wenn A,B verschiedene Wahrheitswerte haben, d.h. A wahr und B falsch oder umgekehrt B wahr und A falsch ist; alternative Schreibweisen sind \times , X , \oplus , $\underline{\vee}$, ∇ und \oplus , d.h. man schreibt für $A \dot{\vee} B$ auch $A \times B$, $A X B$, $A \oplus B$, $A \underline{\vee} B$, $A \nabla B$ oder $A \oplus B$.

- $A \uparrow B$ (Lesarten: „A schließt B aus“, „A nicht zugleich mit B“, „A nand B“, die *Exklusion*, *Konjunktionsnegation*, *Nand-Verknüpfung* oder *Sheffer-Verknüpfung* von A und B) genau dann wahr, wenn A, B nicht beide wahr sind; alternative Schreibweisen sind der „Sheffer’sche Strich“ $|$ und $\bar{\wedge}$: Man schreibt für $A \uparrow B$ auch $A | B$ oder $A \bar{\wedge} B$.
- $A \downarrow B$ (Lesarten: „weder A noch B“, „A nor B“, die *Rejektion*, *Adjunktionsnegation*, *Nor-Verknüpfung* oder *Peirce-Funktion* von A und B) genau dann wahr, wenn A, B beide falsch sind; alternative Schreibweise: Man schreibt für $A \downarrow B$ auch $A \nabla B$.
- $A \rightarrow B$ (Lesarten: „A impliziert B“, „A lässt B folgen“, „aus A folgt B“, „wenn A, dann B“, „A nicht, es sei denn auch B“, die *Subjunktion*, das *Konditional* oder die *materiale Implikation* von A und B; die Stoiker sprachen vom *synêmmenon*) genau dann wahr, wenn A falsch oder beide, A und B, wahr sind; alternative Schreibweise ist \supset : Man schreibt für $A \rightarrow B$ auch $A \supset B$. In $A \rightarrow B$ heißt A *Vordersatz*, *Protasis* oder *materiale Prämisse* und B *Hintersatz*, *Apodosis* oder *materiale Konklusion*,
- $A \leftarrow B$ (Lesarten: „A wird impliziert von B“, „A folgt aus B“, „A wenn B“, „A falls B“, die *Replikation* oder *materiale Konversion* von A und B) genau dann wahr, wenn entweder B falsch ist oder beide, A und B, wahr sind; somit hat $A \leftarrow B$ denselben Wahrheitswert wie $B \rightarrow A$; alternative Schreibweise ist \subset : Man schreibt für $A \leftarrow B$ auch $A \subset B$,
- $A \leftrightarrow B$ (Lesarten: „A äquivalent B“, „A genau dann wenn B“, „A dann und nur dann wenn B“, die *Bijunktion* oder *Bisubjunktion* oder *Äquijunktion* oder das *Bikonditional* oder die *materiale Bi-Implikation* oder die *materiale Äquivalenz* von A und B) genau dann wahr, wenn A und B denselben Wahrheitswert haben, d.h. wenn $A \rightarrow B$ und zugleich $A \leftarrow B$ (alias $B \rightarrow A$) wahr ist; alternative Schreibweise für \leftrightarrow ist \equiv , d.h. man schreibt für $A \leftrightarrow B$ auch $A \equiv B$,
- $A \nrightarrow B$ (Lesarten: „A impliziert nicht B“, „A lässt nicht B folgen“, „A inhibiert / unterbindet B“, „A ohne B“, „A aber/und nicht B“ die *Postsektion* von A,B oder die *Inhibition* von B durch A oder die *Subtraktion* A minus B) genau dann wahr, wenn A wahr und B falsch ist; alternative Schreibweise ist \neg : Man schreibt für $A \nrightarrow B$ auch $A \neg B$,
- $A \nleftarrow B$ (Lesarten: „A wird nicht impliziert von B“, „A folgt nicht aus B“, „A wird inhibiert / unterbunden von B“, „A nicht, aber B“, die *Präsektion* von A,B oder die *Inhibition* von A durch B) genau dann wahr, wenn B wahr und A falsch ist; alternative Schreibweise ist \neg : Man schreibt für $A \nleftarrow B$ auch $A \neg B$,
- $A \downarrow B$ (Lesart: „A gilt, unabhängig von B“, die *Präpendenz* oder *erste Projektion* von A und B) genau dann wahr, wenn A wahr ist; alternative Schreibweise ist \downarrow : Man schreibt für $A \downarrow B$ auch $A \downarrow B$,
- $A \updownarrow B$ (Lesart: „von A unabhängig gilt B“, die *Postpendenz* oder *zweite Projektion* von A und B) genau dann wahr, wenn B wahr ist; alternative Schreibweise ist \updownarrow : Man schreibt für $A \updownarrow B$ auch $A \updownarrow B$,
- $A \uparrow B$ (Lesart: „A gilt nicht, unabhängig von B“, die *Pränonpendenz* von A und B) genau dann wahr, wenn A falsch ist; alternative Schreibweise ist \uparrow : Man schreibt für $A \uparrow B$ auch $A \uparrow B$,
- $A \updownarrow B$ (Lesart: „von A unabhängig gilt nicht B“, die *Postnonpendenz* von A und B) genau dann wahr, wenn B falsch ist; alternative Schreibweise ist \updownarrow : Man schreibt für $A \updownarrow B$ auch $A \updownarrow B$,
- $A \top_2 B$ (Lesart: „Wahrheit unabhängig von A und B“, die mit A und B gebildete *2-stellige Tautologie* oder *Einsformel*) unabhängig von den Wahrheitswerten von A,B wahr; man schreibt für $A \top_2 B$ auch einfach $A \top B$.
- $A \perp_2 B$ (Lesart: „Falschheit unabhängig von A und B“, die mit A und B gebildete *2-stellige Antilogie*, *Kontradiktion* oder *Nullformel*) unabhängig von den Wahrheitswerten von A,B falsch; man schreibt für $A \perp_2 B$ auch einfach $A \perp B$.

Wahrheitstabelle für die 2-stelligen Junktoren (alle in einer Tabelle):

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \vee B$	$A \uparrow B$	$A \downarrow B$	$A \rightarrow B$	$A \leftarrow B$	$A \leftrightarrow B$	$A \nrightarrow B$	$A \nleftarrow B$	$A \downarrow B$	$A \updownarrow B$	$A \uparrow B$	$A \updownarrow B$	$A \top_2 B$	$A \perp_2 B$
w	w	w	w	f	f	f	w	w	w	f	f	w	w	f	f	w	f
w	f	f	w	w	w	f	f	w	f	w	f	w	f	f	w	w	f
f	w	f	w	w	w	f	w	f	f	f	w	f	w	w	f	w	f
f	f	f	f	f	w	w	w	w	w	f	f	f	f	w	w	w	f

Schwierigkeiten haben Anfänger besonders mit dem Verständnis der materialen Implikation \rightarrow , die auch „philosophische Implikation“ genannt wird, weil der Philosoph *Philon von Megara* (ca. 300 v. Chr.) sie einführt und die stoischen Philosophen heftig darüber stritten. Nach Definition ist $A \rightarrow B$ (wenn A, dann B) immer wahr, wenn die Voraussetzung A falsch ist („ex falso quodlibet“). So gilt: „Wenn der Mond ein grüner Käse ist, ist $2 + 2 = 5$ “. Alltagssprachlich würde man eher sagen, dass bei falscher Voraussetzung die Aussage *gar keinen* Wahrheitswert hat. Aufgrund der Wahrheitwert-Definitheit muss man jedoch einen Wahrheitswert zuordnen, und dann erscheint die Bewertung mit „w“ immer noch angemessener als die mit „f“ (die den unerwünschten Effekt hätte, dass \rightarrow dieselbe Bedeutung wie \wedge hätte, und weiter, dass die Aussagen $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$ immer denselben Wahrheitswert hätten, also äquivalent wären). Die Bewertung mit „w“ hat dagegen den erwünschten Effekt, dass $A \rightarrow B \wedge B \rightarrow A$ äquivalent mit $A \leftrightarrow B$ ist. So ist die übliche Definition von $A \rightarrow B$ in diesem Kontext die einzig richtige. Eine genauere alltagsprachliche Wiedergabe von $A \rightarrow B$ als „wenn A, dann B“ wäre „A nicht, außer es gilt auch B“. Die *materiale* Implikation \rightarrow ist zu unterscheiden

- von der *logischen* Implikation \Rightarrow (siehe unten) und
- von anderen, nicht-wahrheitswert-definiten Implikationen, in denen man für die Wahrheit von „A impliziert B“ z.B. verlangt, dass A in irgendeiner Weise die Wahrheit von B verursacht/erzwingt (z.B. die sog. *strikte* Implikation, die *Diodoros Kronos*, der Lehrer von Philon von Megara, eingeführt hatte).

Höhere semantische Begriffe. Der Wahrheitswert einer Formel hängt letztlich von den Wahrheitswerten der elementaren Formeln ab, aus denen sie zusammengesetzt ist, und diese Wahrheitswerte werden durch das vorausgesetzte semantische Modell σ bestimmt. Wir haben also die Wahrheitswerte w und f letztlich in Abhängigkeit von (und damit relativ zu) konkreten semantischen Modellen σ zugewiesen. Dennoch kann man Ausdrücken auch im absoluten Sinn bewerten, allerdings nicht als „wahr“ oder „falsch“, wohl aber als „allgemeingültig“, „erfüllbar“ oder „unerfüllbar“; ferner kann man gewissen Ausdrücken im absoluten Sinn als zueinander äquivalent, kontravalent bezeichnen und ein Implikationsverhältnis zwischen ihnen behaupten (vgl. Abschnitte 1.11 und 1.12):

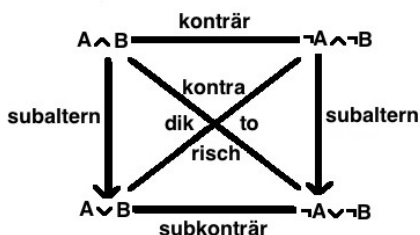
Ist eine Formel A in einem Modell σ wahr bzw. falsch, sagen wir auch, dass sie dort „gilt“ oder „erfüllt ist“ bzw. „nicht gilt“ oder „nicht erfüllt ist“. Im Anschluss an diese Sprechweise definiert man:

- Eine Formel A heißt *allgemeingültig* (oder eine *Tautologie*), wenn sie in jedem semantischen Modell σ wahr ist (d.h. dort gilt). Ist dies der Fall, schreiben wir $\models A$ oder $\models \neg A$. Bsp.: Es gilt $\models A \vee \neg A$.
- Eine Formel A heißt *unerfüllbar* (eine *Antilogie* oder *Kontradiktion*), wenn sie in keinem semantischen Modell σ wahr („erfüllt“) ist. Da dies genau dann gilt wenn $\neg A$ allgemeingültig ist, schreibt man dafür $\models \neg A$. Bsp.: $A \wedge \neg A$ ist unerfüllbar.
- Eine Formel A heißt *erfüllbar*, wenn sie in mindestens einem semantischen Modell σ wahr ist (d.h. dort erfüllt ist). Da dies genau dann gilt, wenn A nicht unerfüllbar ist, schreibt man dafür $\neg \models \neg A$, wobei $\neg \models$ für die metasprachliche Verneinung steht. Bsp.: Jede elementare Formel ist ebenso wie ihre Negation erfüllbar, also z.B. A ebenso wie $\neg A$.

Des Weiteren definiert man die folgenden Beziehungen zwischen Formeln:

- Formeln A und B heißen *logisch äquivalent*, wenn sie in jedem Modell σ denselben Wahrheitswert haben. Man schreibt dann $A \Leftrightarrow B$. Beispiele: $A \Leftrightarrow \neg \neg A$ (Gesetz der doppelten Negation), zweites Beispiel: $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$. Die logische Äquivalenz \Leftrightarrow ist nicht mit der Äquijunktion \leftrightarrow zu verwechseln, die man auch materiale Äquivalenz nennt, obgleich $A \Leftrightarrow B$ genau dann wahr ist, wenn $A \leftrightarrow B$ wahr ist. Der Unterschied besteht aber darin, dass \Leftrightarrow eine (metasprachliche) Beziehung zwischen zwei Formeln ausdrückt, während \leftrightarrow Bestandteil einer einzigen (objektsprachlichen) Formel ist.
- Eine Formel A *impliziert logisch* eine Formel B (und heißt dann *subaltern* zu ihr) wenn es kein Modell gibt, in dem A wahr, aber B falsch ist. Man schreibt dann $A \Rightarrow B$ (lies: A impliziert B) oder $B \Leftarrow A$ (lies: B folgt aus A). Bsp.: $C \wedge D \Rightarrow D$. Die logische Implikation \Rightarrow steht zur materialen Implikation \rightarrow (bzw. die logische Replikation \Leftarrow zur materialen Replikation \leftarrow) in einem analogen Verhältnis wie die logische Äquivalenz \Leftrightarrow zur materialen \leftrightarrow . Zusatz: Eine Formelklasse $\{A, B, C, \dots\}$ *impliziert* eine Formel D, wenn es kein Modell gibt, in dem jede Formel aus $\{A, B, C, \dots\}$ wahr und D falsch ist. Wir schreiben dann $\{A, B, C, \dots\} \models D$ oder $\{A, B, C, \dots\} \Rightarrow D$. Enthält die Klasse endlich viele Formeln A_1, \dots, A_n , gilt $\{A_1, \dots, A_n\} \models D$ genau dann, wenn $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow D$ allgemeingültig ist. d.h. wenn $\models A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow D$ gilt.
- Zwei Formeln A und B heißen *logisch kontravalent* oder *logisch antivalent* oder zueinander *kontradiktorisch* und man sagt, dass sie *im kontradiktorischen Gegensatz zueinander* stehen, wenn sie bei jeder Interpretation verschiedene Wahrheitswerte haben. Man schreibt dann $A \succ \leftarrow B$. Beispiel: $A \succ \leftarrow \neg A$. Die logische Kontravalenz $\succ \leftarrow$ steht zur materialen Kontravalenz $\succ \leftarrow$ (die man auch als exklusive Diskjunktion \vee bezeichnet) in einem analogen Verhältnis wie \Leftrightarrow zu \leftrightarrow , \Rightarrow zu \rightarrow , \Leftarrow zu \leftarrow .
- Formeln A und B heißen *konträr* bzw. *subkonträr*, wenn es kein Modell gibt, in dem sie zugleich wahr bzw. zugleich falsch sind. Man schreibt dann $A \uparrow B$ bzw. $A \vee B$. Es steht \uparrow bzw. \vee in einem analogen Verhältnis zur Exklusion \uparrow bzw. Adjunktion \vee wie \Leftrightarrow zu \leftrightarrow , \Rightarrow zu \rightarrow , \Leftarrow zu \leftarrow , $\succ \leftarrow$ zu \vee und $\neg \models$ zu \neg .²⁷

Wie in der Syllogistik stellt man auch in der Aussagenlogik gewisse Aussage-Typen zu einem logischen Quadrat zusammen:



3. Pragmatik

Der praktische Umgang des Logikers mit den Ausdrücken einer formalen Sprache zentriert sich auf folgende Tätigkeiten:

- (1) der zweckmäßige Ausbau der formal-logischen Sprache durch *Definitionen* und vor allem
- (2) die Tätigkeit des Ableitens (Deduzierens) / Beweisens, dabei werden
 - (2a) vorgelegte Formeln semantisch analysiert (auf Allgemeingültigkeit, Äquivalenz etc. überprüft),
 - (2b) allgemeingültige (oder aus vorausgesetzten Formeln logisch folgende) Formeln abgeleitet (deduziert).

Wie dies in der Aussagenlogik geschieht, zeigen die folgenden Absätze.

Definitionstätigkeit: Mehr und weniger Junktoren. Wir haben sämtliche 0-, 1- und 2-stellige Junktoren beschrieben. Man kann noch weitere Junktoren (mehr-als-2-stellige) einführen, indem man sie mittels der schon eingeführten als Abkürzung für einen komplizierten Ausdruck definiert. Bsp.: Die mit dem 3-stelligen „und“-Junktor \wedge_3 zusammengestellte Formel $(\wedge_3 ABC)$ soll genau dann wahr sein, wenn alle drei Formeln wahr sind; entsprechend soll $(\vee_3 ABC)$ wahr sein, wenn mindestens eine, und $(\dot{\vee}_3 ABC)$, wenn genau eine von ihnen wahr ist. Man kann diese Junktoren mittels zweistelliger Junktoren definieren, z.B. ist $\wedge_3 ABC \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$ und $\vee_3 ABC \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$. Leider wäre die entsprechende Definition für $\dot{\vee}_3 ABC$ falsch, wie man sich anhand einer Wahrheitswertetabelle überlegt (**Übung**). Dennoch kann man auch $\dot{\vee}_3 ABC$ (wie jeden mehr-als-2-stelligen Junktor) mittels 1- und 2-stelliger Junktoren definieren, wie wir gleich sehen werden. Mit den eben genannten Definitionen ist festgelegt, dass z.B. $\wedge_3 ABC$ per Definitionem äquivalent zum Ausdruck $(A \wedge B) \wedge C$ sein soll, also in jedem Modell denselben Wahrheitswert haben soll wie dieser. Man kann dann $\wedge_3 ABC$ als Abkürzung (also einen Namen) für den Ausdruck $(A \wedge B) \wedge C$ betrachten.

Interessant ist nun die Frage, ob es nicht eine übersichtliche Menge weniger Junktoren gibt, mit der man *alle* übrigen Junktoren definieren kann. Eine solche Menge heißt eine (*Junktoren*-)Basis. Eine ökonomische aussagelogische Sprache wäre dann eine

²⁷ Allgemein bildet man das metasprachliche Analogon zu einem objektsprachlichen logischen Zeichen durch Verdopplung mindestens eines seiner Striche.

solche, die nur die Junktoren einer Junktorenbasis besitzt, und alle anderen dann durch eine Definition einführt. Zunächst ist klar, dass jeder beliebige mehr-als-0-stellige Junktor durch eine Wahrheitswertetabelle beschrieben werden kann. Ist z.B. J ein 3-stelliger Junktor, so lässt sich seine Bedeutung beschreiben, indem man sagt:

„J ABC ist genau dann wahr, wenn“ und nun alle Fälle aufzählt, in denen die Junktorenformel wahr ist, also z.B. dann, wenn
 (a) A wahr und B falsch und C wahr ist
 oder (b) A falsch und B wahr und C falsch ist.
 oder (c) A falsch und B falsch und C wahr ist usw.

Eine solche Beschreibung lässt sich nun aber offensichtlich stets allein mit den drei Junktoren \wedge , \vee und \neg durchführen, und so bekommen wir stets eine gleichwertige Beschreibung von J ABC, in der ausschließlich diese drei Junktoren vorkommen. In obigem Beispiel wäre $J\ ABC \Leftrightarrow (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$ usw., so dass wir jeden mehr-als-0-stelligen Junktor J grundsätzlich definieren können mittels \wedge , \vee und \neg . Was aber die beiden 0-stelligen Junktoren betrifft, könnte man \top als Abkürzung für eine beliebige mit \wedge , \vee und \neg darstellbare Tautologie und \perp als eine solche für eine beliebige mit denselben Junktoren darstellbare Kontradiktion definieren, etwa $\top := A \vee \neg A$ und $\perp := A \wedge \neg A$, wobei A eine beliebige junktorfreie Aussage ist. So kann man auch die 0-stelligen Junktoren allein mittels der Junktoren \wedge , \vee und \neg definieren und wir haben daher insgesamt das Ergebnis, dass die 3-elementige Menge $\{\wedge, \vee, \neg\}$ eine Junktorenbasis ist: die sog. *Boole-Basis*. Wie man sich leicht klarmacht (etwa mit Hilfe einer Wahrheitswertetabelle: **Übung!**), gilt nun $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$, so dass man den Junktor \wedge durch \neg und \vee definieren kann. Also ist bereits die 2-elementige Menge $\{\neg, \vee\}$ eine Basis. Analog ist $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$, so dass man den Junktor \vee durch \neg und \wedge definieren kann, also ist auch $\{\neg, \wedge\}$ eine Basis. Die Äquivalenzen $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$ und $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$ heißen übrigens *DeMorgans Gesetz* oder *Dualität von \wedge und \vee* .²⁸ *Durch Negation beider Seiten erhält man daraus die ebenfalls zu De Morgans Gesetzen gehörenden Äquivalenzen $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ und $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$* . Zwei ähnlich wichtige Äquivalenzen sind $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ (womit man eine Bijunktion auf die Konjunktion zweier Subjunktionen zurückführt), und $A \rightarrow B \Leftrightarrow (\neg A) \vee B$ (womit man Subjunktionen allein mit \neg und \vee ausdrückt).

Erstaunlicherweise gibt es sogar 1-elementige Junktorenbasen, so dass man mit Hilfe eines einzigen Junktors alle übrigen (unendlich vielen!) Junktoren²⁹ definieren kann. Und zwar gibt es zwei solche Basen. Zum einen die sog. *Nand-Basis* $\{\uparrow\}$, da man die Junktoren \neg und \wedge der Basis $\{\neg, \wedge\}$ mit Hilfe der Exklusion \uparrow (alias Sheffer'scher Strich |) definieren kann. Es ist nämlich $\neg A$ äquivalent mit $A \uparrow A$, und $A \wedge B$ äquivalent mit $\neg(A \uparrow B)$, d.h. mit $(A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)$. Eine andere 1-elementige Junktorenbasis ist die sog. *Nor-Basis* $\{\downarrow\}$, da man mit \downarrow die Junktoren der Basis $\{\neg, \vee\}$ definieren kann: $\neg A$ ist äquivalent mit $A \downarrow A$, und $A \vee B$ mit $\neg(A \downarrow B)$, d.h. mit $(A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)$. Man könnte also alle Ausdrücke gleichwertig durch solche ersetzen, in denen nur \uparrow bzw. \downarrow vorkommt. Das ist theoretisch interessant, führt in der Praxis jedoch zu Unübersichtlichkeit. Die Faustregel ist daher: Für die Theorie sind in der Regel möglichst wenige, für die Praxis dagegen möglichst viele Junktoren von Vorteil.

Semantische Analyse vorgelegter Formeln (Überprüfung auf Allgemeingültigkeit, Äquivalenz usw. In der Aussagenlogik kann man sich einen Überblick über die möglichen Bewertungen einer Formel machen, indem man eine Wahrheitswertetabelle aufstellt, in der in den ersten Spalten alle möglichen Kombinationen für die Wahrheitswerte der in der Formel vorkommenden atomaren Unterformeln aufgelistet sind (von denen der Wahrheitswert der Gesamtformel in einem jeden semantischen Modell letztlich abhängt) und welche dann von links nach rechts Schritt für Schritt die Wahrheitswerte der komplexeren Unterformeln enthält und in der letzten Spalte schließlich die möglichen Wahrheitswerte der gesamte Formel.

Bsp.: Untersuchung der Formel $(\neg A \vee B) \leftrightarrow (A \rightarrow B)$: Die atomaren Unterformeln sind A und B; die ersten beiden Spalten enthalten daher die möglichen Kombinationen ww, wf, fw, ff der Wahrheitswerte, welche A und B in einem semantischen Modell haben können (gäbe es drei atomare Unterformeln A,B

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \rightarrow B$	$(\neg A \vee B) \leftrightarrow (A \rightarrow B)$
w	w	f	w	w	w
w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w

und C, so müssten die Kombinationen in den ersten drei Spalten erscheinen, die mit A,B,C überschrieben wären). In der vierten und fünften Spalte erkennen wir, dass die Formeln $\neg A \vee B$ und $A \rightarrow B$ stets denselben Wahrheitswert haben, also äquivalent sind. Die letzte Spalte zeigt, dass die Gesamtformel $(\neg A \vee B) \leftrightarrow (A \rightarrow B)$ in jedem Fall wahr ist, also *allgemeingültig* bzw. eine *Tautologie* ist. Erscheint in der letzten Spalte der Wahrheitswertetabelle einer Formel nur der Wahrheitswert f, ist sie *unerfüllbar* bzw. eine Kontradiktion. Erscheint dort mindestens einmal w, ist sie *erfüllbar*. Erscheinen in der letzten Spalte der beiden Wahrheitswertetabellen zweier Formeln A und B in jeder Zeile dieselben Wahrheitswerte, sind sie *äquivalent*; erscheinen dagegen in jeder Zeile in der letzten Spalte immer verschiedene Wahrheitswerte, sind die Formeln zueinander *kontradiktorisch*; erscheint in keiner Zeile in der letzten Spalte bei beiden Formeln „w“ bzw. „f“, sind sie *konträr* bzw. *subkonträr*. Steht in keiner Zeile der letzten Spalte bei A „w“ und bei B „f“, gilt $A \Rightarrow B$ (d.h. B ist *subaltern* zu A). Mithin kann man alle semantischen Beziehungen mit Wahrheitswertetabellen prüfen. Ein alternatives Verfahren zur Prüfung der Allgemeingültigkeit einer Formel ist folgendes: Man zerlegt die Formel $(\neg A \vee B) \leftrightarrow (A \rightarrow B)$ schrittweise in ihre Unterformeln und stellt dann folgende Überlegung an (man könnte diese formaler in einem sog. *Baumdiagramm* nachzeichnen, worauf wir hier verzichten wollen):

- (1) Der Hauptjunktor ist \leftrightarrow , also ist die Formel genau dann wahr, wenn die Unterformeln $\neg A \vee B$ und $A \rightarrow B$ denselben Wahrheitswert haben.
- (2) Der Hauptjunktor von $\neg A \vee B$ ist \vee ; also ist $\neg A \vee B$ genau dann wahr, wenn die Formeln $\neg A$, B nicht beide falsch sind.

²⁸ Unter einem *Literal* fasst man die *atomaren Formeln* (solche ohne mehr-als-0-stellige Junktoren) und ihre Negationen zusammen: Erstere sind *positive Literale*, letztere *negative Literale*. Man sagt nun, dass ein Ausdruck eine *disjunktive Normalform* (DNF) ist, wenn er die Form einer mehrgliedrigen Disjunktion $A_1 \vee \dots \vee A_n$ hat, wobei jedes A_i die Form einer mehrgliedrigen Konjunktion von Literalen hat. Hat er dagegen die Form einer mehrgliedrigen Konjunktion $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$, wobei jedes A_i die Form einer mehrgliedrigen Disjunktion von Literalen hat, ist er eine *konjunktive Normalform*. Klar ist nun, dass man jeden Ausdruck sowohl durch eine äquivalente KNF als auch durch eine äquivalente DNF ersetzen kann.

²⁹ Für jede natürliche Zahl n beträgt die Anzahl der n-stelligen Junktoren stets 2 hoch (2 hoch n). Es gibt also 2^1 (d.h. 2) nullstellige Junktoren, 2^2 (d.h. 4) einstellige, 2^4 (d.h. 16) zweistellige, 2^8 (d.h. 256) dreistellige, 2^{16} (d.h. 65.536) vierstellige, 2^{32} (d.h. ca. 4 Milliarden!) fünfstellige Junktoren usw.

- (3) $\neg A$ ist genau dann falsch, wenn A wahr ist.
- (4) Wegen (3) lässt sich (2) so umformulieren: $\neg A \vee B$ ist genau dann wahr, wenn nicht zugleich A wahr und B falsch ist.
- (5) $A \rightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn nicht zugleich A wahr und B falsch ist.
- (6) Wegen (4) und (5) haben $\neg A \vee B$ und $A \rightarrow B$ stets denselben Wahrheitswert.
- (7) Wegen (1) und (6) ist die Gesamtformel stets wahr und damit allgemeingültig.

Beweistätigkeit bzw. formale Ableitung (Deduktion). Ein axiomatischer Beweiskalkül ist ein Tupel $K = \langle \mathbb{L}, R_1, \dots, R_n \rangle$. Dabei ist \mathbb{L} eine nichtleere Klasse allgemeingültiger Formeln (Tautologien); diese heißen die *logischen Axiome* des Kalküls. R_1, \dots, R_n heißen die *Regeln* des Kalküls: Relationen, die eine Klasse von Ausdrücken einem Ausdruck zuordnen. Ordnet die i-te Regel R_i der Klasse $\{A, B, C\}$ von Ausdrücken den Ausdruck D zu, so sagen wir, dass gemäß Regel R_i aus A, B, C auf D geschlossen werden kann. Schematisch schreiben wir die Regel dann in der Form

A	auf und nennen A, B, C die <i>Prämissen</i> und D die <i>Konklusion</i> gemäß dieser Regel. Eine Regel heißt <i>korrekt</i> , wenn sie
B	aus gültigen (wahren) Prämissen nur wahre Konklusionen zu ziehen gestattet.
C	Die oben genannte Regel ist also wahr, wenn $A, B, C \models D$ gilt (d.h. $A \wedge B \wedge C \rightarrow D$ allgemeingültig ist).
D	Der ganze Kalkül heißt <i>korrekt</i> , wenn alle seine Regeln korrekt sind.

Sei nun \mathbb{A} eine beliebige Klasse von Formeln, die wir *Axiome* nennen (es können z.B. die empirisch ermittelten Gesetze einer physikalischen Theorie sein, diese müssen nicht allgemeingültig sein). Dann versteht man unter einer *formalen Ableitung / Deduktion aus \mathbb{A}* (mittels Kalkül K) oder einem (mit K vollzogenen) von \mathbb{A} ausgehenden *formalen Beweis* eine Folge von (meist zeilenweise untereinander geschriebenen) Ausdrücken mit der Eigenschaft, dass für jeden Ausdruck A der Folge gilt:

- (1) A ist ein logisches Axiom des Kalküls K (d.h. eine Tautologie aus der Klasse \mathbb{L}) oder ein Axiom aus \mathbb{A} , oder
- (2) es gibt eine Regel R des Kalküls K und eine Klasse F von Formeln, die alle dem Ausdruck A in der Folge vorausgehen, so dass gemäß Regel R aus F auf A geschlossen werden darf.

Ist nun die Formel F der letzte Ausdruck einer formalen Ableitung aus \mathbb{A} mittels des Kalküls K, so heißt diese Ableitung eine *Ableitung / Deduktion der Formel F* oder ein *formaler Beweis für F* (aus dem Axiomensystem \mathbb{A} mittels K). Existiert nun zu einer Formel F eine solche formale Ableitung, so heißt F (aus \mathbb{A} mittels K) *ableitbar* und wir schreiben

$$\mathbb{A} \vdash_K F \text{ oder kurz } \mathbb{A} \vdash F \text{ (Lesart: aus } \mathbb{A} \text{ ist F ableitbar).}$$

Ist das Axiomensystem \mathbb{A} die leere Menge, heißt F (schlechthin) mit K ableitbar / beweisbar / deduzierbar und wir schreiben

$$\vdash_K F \text{ oder kurz } \vdash F \text{ (Lesart: F ist ableitbar).}$$

Ist K ein korrekter Kalkül, folgt aus der Ableitbarkeit / Deduzierbarkeit von F aus \mathbb{A} , dass in jedem semantischen Modell, in dem alle Axiome aus \mathbb{A} gelten, auch F gilt. Und aus der Ableitbarkeit von F schlechthin folgt, dass F allgemeingültig ist:

Ist der verwendete Kalkül korrekt, gilt: Aus $\mathbb{A} \vdash F$ (Ableitbarkeit von F aus \mathbb{A}) folgt $\mathbb{A} \models F$ (log. Implikation von F durch \mathbb{A}), und insbesondere: Aus $\vdash F$ (Beweisbarkeit von F) folgt $\models F$ (Allgemeingültigkeit von F)

Bem.: Ein sinnvolles Axiomensystem \mathbb{A} sollte *widerspruchsfrei* sein (d.h. es muss mindestens ein Modell geben, in dem alle Axiome erfüllt sind); ein ideales Axiomensystem sollte darüber hinaus *minimal* sein (d.h. seine Axiome sollten voneinander *unabhängig* sein, d.h. keines sollte aus den übrigen ableitbar sein – andernfalls wäre es eliminierbar, d.h. überflüssig). Idealerweise sollte es außerdem bezüglich einer bestimmten Theorie *vollständig* sein, d.h. alle wahren Sätze der Theorie, die man damit beschreiben will, sollten aus den Axiomen ableitbar sein (siehe hierzu jedoch Gödels Unvollständigkeitssatz in Kap. 6).

Erweitern des Kalküls und Eliminieren von Regeln. Vollständige Kalküle. Hat man mit einem korrekten Kalkül eine Formel F bewiesen, so ist diese allgemeingültig, folglich kann man sie zu den logischen Axiomen des Kalküls hinzutun: Man erhält dann einen erweiterten korrekten Kalkül K', in dem die Menge \mathbb{L} der logischen Axiome größer ist als bei K.

Man kann einen korrekten Kalkül K auch noch auf eine zweite Art erweitern: Man leitet mit K aus einer beliebigen Formelmeng \mathbb{A} eine Formel F ab. Dann muss, wenn die Formeln aus \mathbb{A} wahr sind, auch F wahr sein. Folglich kann man zu den Regeln R_1, \dots, R_n des Kalküls eine weitere R_{n+1} hinzufügen, gemäß der von \mathbb{A} auf F geschlossen werden darf. So erhält man einen erweiterten korrekten Kalkül $K' = \langle \mathbb{L}, R_1, \dots, R_n, R_{n+1} \rangle$. Auf diese Weise kann man immer komplexere und effizientere Kalküle für praktische Anwendungen gewinnen, ähnlich wie man auch die Sprache durch Definitionen immer mehr erweitern kann. Für theoretische Zwecke ist es hingegen vorteilhaft, möglichst einfache Kalküle zu entwickeln, die Regeln und Axiome also auf ein Minimum zu reduzieren. D.h., wenn man bestimmte in \mathbb{L} vorhandene logische Axiome aus den übrigen dortigen Axiomen ableiten kann, heißen diese eliminierbar, und kann sie streichen. Und wenn man bestimmte Regeln aus den übrigen ableiten kann, heißen auch diese eliminierbar und können gestrichen werden. Bemerkung: Die 24 gültigen Modi der Syllogistik kann man als korrekte Kalkül-Regeln der Syllogistik ansehen. Die durch s,p,m,c kodierten Operationen können ebenfalls als kalkülartige Regeln angesehen werden, die es erlauben, die Modi auf die 6 Modi der ersten Figur zu reduzieren. Ein korrekter Kalkül K heißt nun (bzgl. einer logischen Sprache) *vollständig*, wenn mit den Regeln von K sämtliche (in dieser Sprache formulierbaren) Tautologien bewiesen und sämtliche aus einem beliebig vorgegebenen Axiomensystem logisch folgenden Formeln abgeleitet werden können.

Ist der Kalkül K korrekt und vollständig, gilt also: $\mathbb{A} \vdash F$ gilt genau dann wenn $\mathbb{A} \models F$; und $\vdash F$ gilt genau dann wenn $\models F$

Kurt Gödel hat 1929 erstmalig bewiesen, dass es für die Aussagenlogik (sogar für die diese erweiternde Prädikatenlogik erster Stufe) einen korrekten und vollständigen Kalkül gibt (sog. Vollständigkeitssatz). Auf den mathematisch anspruchsvollen Beweis müssen wir hier verzichten. Der Vollständigkeitssatz bedeutet letztlich, dass man die *semantisch eingeführten Begriffe* der logischen Folgerung und Allgemeingültigkeit (symbolisiert durch \models) ohne Verluste durch die *rein syntaktisch eingeführten Begriffe* der formalen Ableitbarkeit / Deduzierbarkeit und Beweisbarkeit (symbolisiert durch \vdash) ersetzen kann. Beispiel für einen vollständigen und korrekten axiomatischen Beweiskalkül der Aussagenlogik ist der folgende (der im Wesentlichen eine Vereinfachung des von Gödel für die Prädikatenlogik aufgestellten Kalküls ist):

- Axiome (eigentlich Axiomen-Schemata) sind:
- (1) Jede Formel der Form $((A \vee A) \rightarrow A)$ (Tautologieprinzip)
 - (2) Jede Formel der Form $(A \rightarrow (A \vee B))$ (Additionsprinzip)

(3) Jede Formel der Form $((A \rightarrow B) \rightarrow ((C \vee A) \rightarrow (B \vee C)))$ (Summationsprinzip)

Dazu kommt als einzige Regel: (MP)

$(A \rightarrow B)$
A
B

(Modus Ponens)

Vorausgesetzt ist noch, dass \vee und \neg die einzigen ursprünglichen Junktoren sind. Für die übrigen stellt man Definitionen auf: Konkret ist $A \rightarrow B := (\neg A) \vee B$, außerdem mit Blick auf DeMorgans Gesetz $A \wedge B := \neg(\neg A \vee \neg B)$ und schließlich $A \leftrightarrow B := A \rightarrow B \wedge B \rightarrow A$.

Zu jeder dieser Definitionen denkt man sich eine **definitoriale Kalkülregel** hinzu, der gemäß man aus jedem Ausdruck X, in dem das Definiens oder Definiendum vorkommt, jeden Ausdruck Y folgern darf, der aus X entsteht, indem man dort alle oder einige Vorkommen des Definiens bzw. Definiendum durch das Definiendum bzw. Definiens ersetzt.

Um zu demonstrieren, wie man mit diesem Kalkül arbeitet, beweisen wir mit ihm die bekannte Tautologie $(A \vee (\neg A))$, wobei man für A eine beliebige Formel eingesetzt denken darf:

- (1) $((A \vee A) \rightarrow A)$ (Axiom 1, Tautologieprinzip)
- (2) $((\neg(A \vee A) \rightarrow A) \rightarrow (((\neg A) \vee (A \vee A)) \rightarrow (A \vee (\neg A))))$ (Axiom 3, Summationsprinzip)
- (3) $((\neg A) \vee (A \vee A)) \rightarrow (A \vee (\neg A))$ (Modus Ponens, angewendet auf Zeilen (2) und (1))
- (4) $((A \rightarrow (A \vee A)) \rightarrow (A \vee (\neg A)))$ (definitoriale Regel für \rightarrow , angewendet auf Zeile (3))
- (5) $(A \rightarrow (A \vee A))$ (Axiom 2, Additionsprinzip)
- (6) $(A \vee (\neg A))$ (Modus Ponens, angewendet auf Zeilen (4) und (5))

Kalküle des natürlichen Schließens sind Kalküle, die dem tatsächlichen Argumentieren besser angepasst sind als die axiomatischen Kalküle. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass sie *keine besonderen logischen Axiome haben*, dass statt dessen alle Tautologien und darüber hinaus sog. *Annahmen gesetzt werden dürfen*, und dass *viele intuitiv einleuchtende Schlussregeln* aufgestellt werden, nach denen man in der Praxis tatsächlich schlussfolgert. Die folgende Liste bietet die wichtigsten Schlussregeln, von denen einige schon in der Antike aufgestellt wurden (etwa von den Stoikern die sog. fünf *hypothetischen Syllogismen*: Modus ponendo ponens, tollendo tollens, ponendo tollens, tollendo ponens und der *konjunktive Syllogismus*):

<p>MP oder MPP (Modus ponendo ponens, kurz Modus ponens) $A \rightarrow B$</p> <p>A (ponendo: gesetzt)</p> <hr/> <p>B (ponens: gesetzt)</p>	<p>MT oder MTT (Modus tollendo tollens, kurz Modus tollens) $A \rightarrow B$</p> <p>$\neg B$ (tollendo: aufgehoben)</p> <hr/> <p>$\neg A$ (tollens: aufgehoben)</p>	<p>MPT (Modus ponendo tollens)</p> <p>$A \dot{\vee} B$</p> <p>A bzw. B (ponendo: gesetzt)</p> <hr/> <p>$\neg B$ bzw. $\neg A$ (tollens: aufgehoben)</p>	<p>MTP (Modus tollendo ponens)</p> <p>$A \dot{\vee} B$</p> <p>$\neg A$ bzw. $\neg B$ (tollendo: aufgehoben)</p> <hr/> <p>B bzw. A (ponens: gesetzt)</p> <p style="text-align: right;">$A \vee B$ $\neg A$ bzw. $\neg B$ B bzw. A</p>
--	---	--	--

Beachte: Ein häufig gemachter Fehlschluss ist der sog. „falsche Modus tollens“, der aus $A \rightarrow B$ und $\neg A$ folgert, dass $\neg B$.

<p>KonjS (Konjunktiver Syllogismus)</p> <p>$\neg(A \wedge B)$</p> <p>A bzw. B</p> <hr/> <p>$\neg B$ bzw. $\neg A$</p>	<p>HKS (Hypothetischer Kettenschluss)</p> <p>$A \rightarrow B$</p> <p>$B \rightarrow C$</p> <hr/> <p>$A \rightarrow C$</p>	<p>KonjE (Konjunktions-Einführung)</p> <p>A</p> <p>B</p> <hr/> <p>$A \wedge B$</p>	<p>KonjB (Konjunktions-Beseitigung)</p> <p>$A \wedge B$</p> <hr/> <p>A</p> <p style="text-align: right;">bzw. $A \wedge B$ B</p>
--	---	---	--

<p>AdjE (Adjunktions-Einführung)</p> <p>A</p> <p>B</p> <hr/> <p>$A \vee B$</p> <p style="text-align: right;">bzw. $A \vee B$</p>	<p>KonstrD (konstruktives Dilemma)</p> <p>$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)$</p> <p>$A \vee C$</p> <hr/> <p>$B \vee D$</p>	<p>DestrD (destruktives Dilemma)</p> <p>$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)$</p> <p>$\neg B \vee \neg D$</p> <hr/> <p>$\neg A \vee \neg C$</p>	<p>KlassD (klassisches Dilemma)</p> <p>$A \rightarrow C$</p> <p>$B \rightarrow C$</p> <hr/> <p>$A \vee B$</p> <hr/> <p>C</p>	<p>TautE (Tautologie-Einführung)</p> <p style="text-align: center;">A</p> <hr/> <p>A</p> <p style="text-align: center;">(falls A eine Tautologie ist)</p>
--	---	---	---	---

Hinzu kommen noch Äquivalenzen, die man als *Ersetzregeln* ansieht: Man darf überall, wo der Ausdruck rechts bzw. links vom Äquivalenzzeichen vorkommt, diesen Ausdruck durch den links bzw. rechts vom Äquivalenzzeichen stehenden ersetzen:

- 1. NN (Negation der Negation, doppelte Negation)³⁰ $\neg\neg A \Leftrightarrow A$
- 2. Kontrap (Kontraposition) $A \rightarrow B \Leftrightarrow (\neg B) \rightarrow (\neg A)$
- 3. Export (Exportationsgesetz) $(A \wedge B) \rightarrow C \Leftrightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C)$
- 4. Komm (Kommutativgesetze) $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ sowie $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
- 5. Ass (Assoziativgesetze) $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ sowie $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
- 6. Distr (Distributivgesetze) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ sowie $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- 7. Idemp (Idempotenzgesetze) $A \wedge A \Leftrightarrow A$ sowie $A \vee A \Leftrightarrow A$
- 8. Abs (Absorptionsgesetze) $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A \Leftrightarrow A \vee (A \wedge B)$ sowie $A \rightarrow (A \rightarrow B) \Leftrightarrow A \rightarrow B$
- 9. DeM (DeMorgans Gesetz, Dualitätsprinzip) $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$,
 $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$,
 $A \rightarrow B \Leftrightarrow (\neg A) \vee B$ sowie $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
sowie $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$,
- 10. Subj (Def. der Subjunktion mit \neg und \vee)
- 11. Bij (Def Bijektion mit \rightarrow und \wedge bzw. \wedge, \vee, \neg)
- 12. Alt (Def Alternative mit \wedge, \vee, \neg) $A \dot{\vee} B \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$
- 13. Nand / Nor (Def Exklusion bzw. Rejektion mit \wedge, \vee, \neg) $A \uparrow B \Leftrightarrow \neg(A \wedge B)$ bzw. $A \downarrow B \Leftrightarrow \neg(A \vee B)$
- 14. Ver/Fals (Def Verifikator bzw. Falsifikator) $\top \Leftrightarrow A \vee \neg A$ bzw. $\perp \Leftrightarrow A \wedge \neg A$

Bei einer Deduktion nummeriert man die Zeilen und vermerkt am Rand die benutzte Regel und auf welche Zeilen die Anwendung sich bezieht.

³⁰ Dieses Gesetz hatten bereits die Stoiker aufgestellt: Sie sprachen von der „Hypernegation“ als einer Unterart der Negation, in der die Negation wieder negiert wird, wobei wieder die ursprüngliche Aussage herauskommt.

Die ersten Zeilen sind die Prämissen, nach der letzten Prämisse vermerkt man die gewünschte Konklusion, wobei man das Zeichen \therefore („daher“, „aus all dem folgt“) verwendet; es ist wie \Rightarrow ein metasprachliches Analogon zu \rightarrow , wie übrigens \because („weil“) ein Analogon zu \leftarrow .

Beispiel (siehe Löffler, Einführung in die Logik, Stuttgart 2008, S. 108–113):

Man möchte die Behauptung verifizieren, dass aus $\neg(A \wedge B)$, $\neg B \rightarrow \neg C$ und C folgt, dass $\neg A$. Das geht z.B. so:

- | | | |
|-----|-----------------------------|-------------------------------|
| (1) | $\neg(A \wedge B)$ | Prämisse |
| (2) | $\neg B \rightarrow \neg C$ | Prämisse |
| (3) | C | Prämisse, $\therefore \neg A$ |
| (4) | $C \rightarrow B$ | (2) Kontrap |
| (5) | B | (4,3) MP |
| (6) | $(\neg A) \vee (\neg B)$ | (1) DeM |
| (7) | $(\neg B) \vee (\neg A)$ | (6) Komm |
| (8) | $\neg\neg B$ | (5) NN |
| (9) | $\neg A$ | (6,8) MTP, q.e.d. |

Eine Besonderheit bei Kalkülen des natürlichen Schließens ist die **konditionale Deduktion** : Man darf sog. **Annahmen** in Deduktionen einbringen, d.h. man darf in einer beliebigen Zeile einen beliebigen Ausdruck A einfügen. Diesen kennzeichnet man als „*Annahme*“. Alle weiteren Schritte gelten dann nur *unter der Annahme, dass A wahr ist*; sie werden daher eingerückt und/oder mit einem Stern versehen. Gelangt man dann zu einer Folgerung B , darf man in der nächsten Zeile ohne Stern bzw. ohne Einrückung $A \rightarrow B$ schreiben und „*Annahmeseitigung*“ an den Rand schreiben. Die Formel $A \rightarrow B$ gilt dann nämlich absolut (denn man hat ja gezeigt, dass B aus A folgt). Beispiel:

- | | | |
|-----|----------------------------|--|
| (1) | $(A \vee B) \rightarrow C$ | Prämisse, $\therefore B \rightarrow C$ |
| (2) | * B | <u>Annahme</u> |
| (3) | * $A \vee B$ | (2) AdjE (2-te Variante) |
| (4) | * C | (1,3) MP |
| (5) | $B \rightarrow C$ | (2,4) <u>Annahmeseitigung</u> , q.e.d. |

Man kann in dem Beweisteil, der unter einer Annahme gilt, eine weitere Annahme machen, die dann zwei Sterne erhält und / oder noch weiter eingerückt wird usw. Wichtig ist, dass alle Annahmen wieder beseitigt werden müssen, entweder simultan oder in umgekehrter Reihenfolge, wie sie eingeführt wurden. Beispiel:

- | | | |
|------|--|--|
| (1) | $A \rightarrow (B \vee C)$ | Prämisse |
| (2) | $C \rightarrow D$ | Prämisse, $\therefore (A \wedge \neg D) \rightarrow B$ |
| (3) | * A | <u>Annahme 1</u> |
| (4) | * $B \vee C$ | (1,3) MP |
| (5) | ** $\neg D$ | (Unter-)Annahme 2 |
| (6) | ** $\neg C$ | (2,5) MT |
| (7) | ** $C \vee B$ | (4) Komm |
| (8) | ** B | (7,6) MTP |
| (9) | * $\neg D \rightarrow B$ | (5,8) <u>Beseitigung von (Unter-)Annahme 2</u> |
| (10) | $A \rightarrow (\neg D \rightarrow B)$ | (3,9) <u>Beseitigung von Annahme 1</u> |
| (11) | $(A \wedge \neg D) \rightarrow B$ | (10) Export, q.e.d. |

Sind A_1, \dots, A_n sukzessiv gemachte Annahmen und gelangt man vor ihrer Beseitigung zum Ausdruck B , kann man in der nächsten Zeile schreiben: $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$ und alle Sterne löschen (*simultane Annahmeseitigung*). In unserem Beispiel könnte man also anstelle der Zeilen (9) bis (11) auf die Zeile (8) sofort folgen lassen:

- | | | |
|-----|-----------------------------------|---|
| (9) | $(A \wedge \neg D) \rightarrow B$ | (3,5) <u>simultane Annahmeseitigung</u> |
|-----|-----------------------------------|---|

Das Arbeiten mit Annahmen empfiehlt sich, wenn man eine Subjunktion $A \rightarrow B$ beweisen will. – Eine weitere Technik des natürlichen Schließens ist die **indirekte Deduktion** : Man setzt *als Annahme das Gegenteil der gewünschten Folgerung* (d.h. ihre Negation oder eine dazu äquivalente Formel). Daraus leitet man (mittels eingerückter und/oder mit Sternen gekennzeichneten Zeilen) eine Kontradiktion wie $A \wedge \neg A$ ab; man vermerkt z.B. durch den Blitz ζ , dass es eine Kontradiktion ist. Dann erfolgt die Annahmeseitigung, aber nicht durch eine Subjunktion, sondern durch die Negation der Annahme (die dann zur gewünschten Folgerung äquivalent ist). Statt *Annahmeseitigung* schreibt man *indirekte Deduktion* an den Rand. Das Verfahren ist korrekt: Denn wenn die Prämissen alle wahr sind (was wir ja voraussetzen), kann sich aus diesen keine widersprüchliche Aussage ergeben; für die hergeleitete Kontradiktion ist daher allein die hinzugesetzte Annahme erforderlich. Diese ist daher falsch und also die gewünschte Folgerung wahr (vorausgesetzt, die Prämissen sind wahr). –

Eine indirekte Deduktion empfiehlt sich, wenn die Konklusion negativ ist. Beispiel:

- | | | |
|-----|--|---|
| (1) | $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)$ | Prämisse |
| (2) | $B \vee D \rightarrow E$ | Prämisse |
| (3) | $\neg E$ | Prämisse, $\therefore \neg(A \vee C)$ |
| (4) | * $A \vee C$ | <u>Annahme des Gegenteils</u> |
| (5) | * $B \vee D$ | (1,4) KonstrD |
| (6) | * E | (2,5) MP |
| (7) | * $E \wedge \neg E$ | (3,6) KonjE, ζ |
| (8) | $\neg(A \vee C)$ | (4,7) <u>indirekte Deduktion</u> , q.e.d. |

Übung 9a: Welche Regeln wurden bei folgender Deduktion angewendet? Ergänzen Sie die Randbemerkungen:

- | | | |
|-----|--|---------------------------------|
| (1) | $\neg A \vee B$ | Prämisse |
| (2) | $\neg C \rightarrow (A \wedge \neg B)$ | Prämisse, $\therefore C \vee D$ |
| (3) | $\neg A \vee \neg \neg B$ | ??? |
| (4) | $\neg(A \wedge \neg B)$ | ??? |
| (5) | $\neg\neg C$ | ??? |
| (6) | C | ??? |
| (7) | $C \vee D$ | ??? |

Übung 9b: $((\neg A) \rightarrow (B \wedge C)) \wedge D$ ist keine Formel, wohl aber ein Name für eine solche. Warum ist es keine Formel – was muss man ändern, damit die Zeichenreihe in eine Formel übergeht (und zwar in diejenige, für die sie ein Name ist)?

Übung 9c: Zeigen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, dass die DeMorgansche Regel $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$ gilt.

Übung 9d: Schreiben Sie die Entsprechung zu $((A \wedge (\neg B)) \rightarrow C) \leftrightarrow D$ in polnischer Syntax auf.

6. Prädikatenlogik

Einführung: Die Aussagenlogik hat gegenüber der Syllogistik den Vorteil, dass sie aus Aussagen durch Verknüpfung mit logischen Junktoren beliebig komplexe Satzgefüge wiedergeben kann. Doch hat sie zugleich den Nachteil, dass in ihr die elementaren Aussagen (die nicht aus mehreren Unter-Aussagen mittels Junktoren zusammengesetzt sind) nur als unteilbare Einheiten verwendet werden: Eine elementare Aussage wird durch ein einziges Zeichen, nämlich eine Konstante (etwa A) wiedergegeben. Die Syllogistik hatte dagegen Aussagen immerhin durch drei Zeichen wiedergegeben (SaP, SiP, SeP, SoP), also als dreigliedrig aufgefasst, bestehend aus Subjekt S, Prädikat P und logischer Konstante (a,i,e,o).

Die Prädikatenlogik vereinigt in sich die Vorteile von beiden Logiken: Man hat in ihr sämtliche Junktoren der Aussagenlogik, und behandelt elementare Aussagen ebenfalls als komplexe Einheiten. Hier geht sie aber über die Syllogistik noch hinaus, die viel zu starr war. Erstens kann man in einem Satz verschiedene Quantitäten miteinander verbinden (Bsp. „alle Menschen haben *einige* Vorfahren“). Zweitens werden nicht alle Prädikate mit lediglich einem einzigen Subjekt verbunden, vielmehr gibt es theoretisch zu jeder beliebigen Anzahl n sog. n-stellige Prädikate. So ist z.B. „ausruhen“ 1-stellig, „schlagen“ 2-stellig und „jemanden etwas geben“ 3-stellig, d.h. es wird mit einem bzw. zwei bzw. drei Subjekten verbunden:

- „a ruht sich aus“ (formal etwa: Aa),
- „a schlägt b“ (formal etwa: Sab),
- „a gibt b ein c“ (formal etwa: Gabc).

Derartige Zusammenhänge lassen sich in der Prädikatenlogik mit beliebig-stelligen Formelfunktoren ausdrücken. Die syllogistischen Formeln werden hier mit Hilfe von Variablen und der sog. Quantoren \forall („für alle“) und \exists („es gibt ein“) dargestellt. In einer ausdrucksstarken Form der Prädikatenlogik lassen sich zusätzlich zu den beiden Quantoren weitere sog. Operatoren einführen, die mit Variablen verbunden werden: vor allem den Kennzeichnungoperator ι („dasjenige“) und den Klassenoperator κ („die Klasse aller“). Nicht nur die elementaren Aussagen, sondern auch die Begriffe, über die darin etwas gesagt wird, sind manchmal komplex, wie z.B. „König von England“. Dementsprechend kann man in der Prädikatenlogik neben komplexen Formeln auch komplexe Terme bilden. Diese werden mit beliebig-stelligen Termfunktoren ausgedrückt. Z.B. ist „König von“ 1-stellig, „Tochter von ... und ...“ 2-stellig usw.:

- „König von a“ (formal etwa: Ka)
- „Tochter von a und b“ (formal etwa: Tab)

Damit lassen sich komplexe Aussagen bilden wie „Die Tochter von a und b schlägt den König von c“ (formal: STabKc).

Eine solche prädikatenlogische Aussage kann in der Aussagenlogik nur durch einen Buchstaben dargestellt werden (wodurch viel Information verloren geht), während sie in der elementaren Syllogistik überhaupt nicht angemessen dargestellt werden kann. So ist die Prädikatenlogik eindeutig die ausdrucksstärkste Sprache. Allerdings hat auch sie ihre *Grenzen*. So können Sätze wie „*möglicherweise* gilt P“ und „S *glaubt*, dass P“ in der Prädikatenlogik nicht ohne Informationsverlust dargestellt werden. Hierfür benötigt man moderne Erweiterungen der Prädikatenlogik (Modallogik, epistemische Logik etc.).

1. Syntax

Alphabet der Prädikatenlogik.

1. **Hilfszeichen.** Als Hilfszeichen zur Herstellung von Einheitigkeit wählt man wie in der Aussagenlogik meist die Klammerzeichen (,); oder man benutzt auch hier die klammerfreie polnische Syntax.
2. **Variablen.** Im Gegensatz zur Aussagenlogik und Syllogistik verwendet man **Variablen**, wobei man unendlich viele Zeichen festlegt, die ausschließlich als Variablen fungieren. Z.B. nimmt man als Variablen die unendlich vielen Buchstaben x, x', x'' usw., y, y', y'' usw. sowie z, z', z'' usw. (die induzierten Zeichen gelten hier als einzelne Zeichen).
3. **Konstanten.** Dies sind alle von den Hilfszeichen und Variablen verschiedenen Zeichen. Die Konstanten teilt man ein in (a) *logische Konstanten*, deren Bedeutung in der logischen Kunstsprache diskursübergreifend fest steht, und (b) *nichtlogische Konstanten*, die in verschiedenen Diskursen mit verschiedenen festen Bedeutungen versehen werden können, im Rahmen eines Diskurses dann aber fest bleiben, während die *Variablen* auch im Rahmen ein und desselben Diskurses verschiedene Belegungen erhalten können. Man hat also, nach steigendem Grade der „Festigkeit“ geordnet: Variablen, nichtlogische Konstanten, und logische Konstanten.

Konstanten (sowohl die logischen als auch die nichtlogischen) teilt man ein in *Funktoren* und *Operatoren*, derart dass jede Konstante entweder ein Funktor oder ein Operator ist. Wir haben also folgende Gesamteinteilung der Zeichen:

Hilfszeichen	Variablen	Konstanten	
		logische Funktoren	nichtlogische Funktoren
		logische Operatoren	nichtlogische Operatoren

Ein **Funktor** ist eine Konstante, der man eine natürliche Zahl n als *Stellenzahl* zuordnet. Ein Funktor f mit Stellenzahl n heißt *n-stellig*. Die Stellenzahl n zeigt an, dass dann und nur dann, wenn der Funktor mit genau n Ausdrücken A_1, \dots, A_n zu einer Zeichenreihe $f A_1 \dots A_n$ zusammengestellt wird, ein neuer Ausdruck entstehen soll. Wir können demnach die Funktoren in 0-stellige, 1-stellige, 2-stellige usw. einteilen. Die 0-stelligen sind diejenigen, die schon allein für sich (also *ohne* dass sie mit anderen Zeichen zusammengestellt werden) ein Ausdruck der Sprache sind: Sie heißen auch **Namen**. Außer der Stellenzahl legen wir für Funktoren f noch eine *Kategorienzahl* fest, die 0 oder 1 sei, je nachdem ob die mit f zusammengestellten Ausdrücke $f A_1 \dots A_n$ als *Formeln* oder als *Terme* gelten sollen, und je nachdem sprechen wir von einem *Formelfunktor* oder *Termfunktor*. Ist k die Kategorien- und n die Stellenzahl eines Funktors, so heißt (n,k) seine *Signatur*. Besondere Formelfunktoren sind noch (a) die **Prädikate**, das sind alle nichtlogischen Formelfunktoren; und (b) die **Junktoren**, das sind diejenigen logischen Formelfunktoren, die „wahrheitsdefinit“ sind, d.h. deren Wahrheitswert nur von den Wahrheitswerten der mit ihnen zusammengesetzten Ausdrücke abhängt (siehe Semantik).

Ein **Operator** ist eine Konstante, der man ein Zahlenpaar (m,n) zugeordnet, wobei m die *Stellenzahl der Variablen* und n die *Stellenzahl der Ausdrücke* heißt: Der Operator heißt dann *m-n-stellig*. Bei einem *m-n-stelligen* Operator o soll dann und nur dann, wenn o mit m Variablen v_1, \dots, v_m und mit n Ausdrücken A_1, \dots, A_n zu einer Zeichenreihe $o v_1 \dots v_m A_1 \dots A_n$ zusammengestellt wird (dabei betrachten wir

nur Sprachen, wo m und n nicht 0 ist). Jeder Operator erhält auch eine *Kategorienzahl* 0 oder 1, je nachdem, ob die mit ihm gebildeten Ausdrücke *Formeln* oder *Terme* sein sollen; wir sprechen dann von einem *Formeloperator* bzw. *Termoperator*. Die Stellenzahlen m , n und die Kategorienzahl k des Operators fassen wir in dem Tripel (m,n,k) zusammen und nennen dieses seine *Signatur*.

So hat jede Konstante ihre *Signatur*, und an ihr lässt sich ablesen, ob sie ein Termfunktorkonstante, ein Formelfunktorkonstante, ein Termoperator oder ein Formeloperator ist und mit wie vielen Ausdrücken (und eventuell Variablen) sie zusammengesetzt werden muss, damit ein Ausdruck entsteht.

Wir müssen daher zur eindeutigen Festlegung des Alphabets einer formal-logischen Sprache folgendes tun: die Hilfszeichen, Variablen, und die Konstanten mit ihren Signaturen auswählen. Für die logischen Konstanten tun wir das ein für alle Mal:

Die wichtigsten **logischen Funktoren** haben folgende Namen, Lesarten und Signaturen:

	Name	Lesart 1 (für polnische Syntax)	Lesart 2 (für die gewöhnliche Syntax)	Signatur
\top	Verifikator	das Verum (gilt)	(wie Lesart 1)	$\langle 0,0 \rangle$
\perp	Falsifikator	das Falsum (gilt)	(wie Lesart 1)	$\langle 0,0 \rangle$
\perp_1	Joker	das Ersatzobjekt / der Joker	(wie Lesart 1)	$\langle 0,1 \rangle$
$-$	Affirmator	es gilt	(wie Lesart 1)	$\langle 1,0 \rangle$
\neg	Negator	(es gilt) nicht	(wie Lesart 1)	$\langle 1,0 \rangle$
\wedge	Konjunktorkonstante	beides gilt:	und / sowohl als auch	$\langle 2,0 \rangle$
\vee	inklusive Disjunktorkonstante	mindestens eins von beiden gilt:	oder auch / oder / vel	$\langle 2,0 \rangle$
$\dot{\vee}$	exklusiver Disjunktorkonstante	genau eines von beiden gilt:	oder aber / entweder oder / aut / xor	$\langle 2,0 \rangle$
\uparrow	nand-Funktorkonstante	nicht beides: / höchstens eines:	schließt aus / nicht zugleich mit / nand	$\langle 2,0 \rangle$
\downarrow	nor-Funktorkonstante	keins von beiden: / beides nicht:	weder noch / nor	$\langle 2,0 \rangle$
\rightarrow	Subjunktorkonstante	wenn das Erste, so das Zweite:	impliziert / lässt folgen / nicht, wenn nicht auch	$\langle 2,0 \rangle$
\leftarrow	Replikator	wenn das Zweite, so das Erste:	wird impliziert von / folgt aus / falls	$\langle 2,0 \rangle$
\leftrightarrow	Bijunktorkonstante, Äquijunktorkonstante	denselben Wahrheitswert haben:	genau dann wenn / dann und nur dann, wenn	$\langle 2,0 \rangle$
\Rightarrow	Postsektorkonstante	das Erste gilt ohne das Zweite:	impliziert nicht / lässt nicht folgen / ohne / aber nicht	$\langle 2,0 \rangle$
\Leftarrow	Präsektorkonstante	das Zweite gilt ohne das Erste:	wird nicht impliziert von / folgt nicht aus / nicht, aber	$\langle 2,0 \rangle$
$=$	Gleichheitszeichen	identisch sind:	(ist) identisch (mit) / ist dasselbe wie / (ist) gleich	$\langle 2,0 \rangle$
\in	Elementzeichen	Erstes ist Element vom Zweiten:	(ist) Element (von)	$\langle 2,0 \rangle$

Eher selten gebräuchliche logische Funktoren sind noch die folgenden:

\top_1	1-stelliger Verifikator	das Verum gilt unabhängig von:	(wie Lesart 1)	$\langle 1,0 \rangle$
\perp_1	1-stelliger Falsifikator	das Falsum gilt unabhängig von:	(wie Lesart 1)	$\langle 1,0 \rangle$
\downarrow	Präpendenzzeichen	das Erste gilt:	gilt unabhängig von	$\langle 2,0 \rangle$
\downarrow	Postpendenzzeichen	das Zweite gilt:	von ... unabhängig gilt ...	$\langle 2,0 \rangle$
\uparrow	Pränonpendenzzeichen	das Erste gilt nicht:	gilt nicht, unabhängig von	$\langle 2,0 \rangle$
\uparrow	Postnonpendenzzeichen	das Zweite gilt nicht:	von ... unabhängig gilt nicht ...	$\langle 2,0 \rangle$
\top_2	2-stelliger Verifikator	das Verum gilt unabhängig von:	das Verum gilt unabhängig von ... und ...	$\langle 2,0 \rangle$
\perp_2	2-stelliger Falsifikator	das Falsum gilt unabhängig von:	das Falsum gilt unabhängig von ... und ...	$\langle 2,0 \rangle$

Die Signaturangabe bedeutet nach dem oben Gesagten:

- \top , und \perp sind 0-stellige Formelfunktoren. \perp_1 ist ein 0-stelliger Termfunktorkonstante; \top , \perp und \perp_1 für sich genommen schon Ausdrücke.
- $-$, \neg , \top_1 , \perp_1 sind 1-stellige Formelfunktoren.
- \wedge , \vee , $\dot{\vee}$, \uparrow , \downarrow , \rightarrow , \leftarrow , \leftrightarrow , \Rightarrow , \Leftarrow , \downarrow , \downarrow , \uparrow , \uparrow , \top_2 , \perp_2 , $=$, \in sind 2-stellige Formelfunktoren

Die wichtigsten **logischen Operatoren** haben folgende Namen und Lesarten:

Zeichen	Name	Lesart	Signatur
\forall	Allquantor	$\forall vA$ „für alle v gilt A “	$\langle 1,1,0 \rangle$
\exists	einfacher Existenzquantor	$\exists vA$ „es gibt (min.) ein v , so dass A “	$\langle 1,1,0 \rangle$
$\exists!$	exakter Existenzquantor	$\exists!vA$ „es gibt genau ein v , so dass A “	$\langle 1,1,0 \rangle$
ι	Deskriptor / Jota- oder Kennzeichnungsoperator / bestimmter Artikel	ιvA „dasjenige v , für das gilt: A “	$\langle 1,1,1 \rangle$
κ	Abstraktor / Klassenoperator	κvA „Klasse aller v , für die gilt: A “	$\langle 1,1,1 \rangle$

Diese Operatoren sind 1-1-stellig, d.h. wenn v Variable, A Ausdruck und c einer dieser Operatoren ist, ist cvA ein Ausdruck. Die drei Quantoren sind Formeloperatoren, die übrigen drei Operatoren Termoperatoren.

Zur Syntax einer logischen Kunstsprache gehört neben dem Alphabet noch die Festlegung der sog. **Ausdrucksableitung**, die bestimmt, welche aus den Zeichen des Alphabets zusammengesetzten Zeichenreihen **Ausdrücke** sind und welche nicht.

Gewöhnlich sieht die Festlegung der prädikatenlogischen Ausdrucksableitung so aus:

- In jede Zeile darf man eine Variable oder 0-stellige eingeklammerte Konstante schreiben.
Entscheidet man sich für die polnische Syntax, lässt man hier das Wort „eingeklammerte“ weg.
- Ist c n -stelliger Funktor mit $n \neq 2$ und hat man in vorhergehenden Zeilen bereits Zeichenreihen $A_1 \dots A_n$, so darf man in der nächsten Zeile $c(A_1 \dots A_n)$ schreiben. Falls c ein 2-stelliger Funktor und A_1 sowie A_2 schon vorliegende Zeichenreihen sind, so darf man $(A_1 c A_2)$ schreiben.
Entscheidet man sich für die polnische Syntax, entfällt der zweite Satz und im ersten Satz die Einschränkung $n \neq 2$; außerdem ersetzt man $c(A_1 \dots A_n)$ durch $cA_1 \dots A_n$.
- Ist c ein m - n -stelliger Operator, sind v_1, \dots, v_m paarweise verschiedene Variablen und hat man in vorhergehenden Zeilen bereits Zeichenreihen A_1, \dots, A_n , so darf man in der nächsten Zeile $(cv_1 \dots v_m A_1 \dots A_n)$ schreiben.
Entscheidet man sich für die polnische Syntax, ersetzt man $(cv_1 \dots v_m A_1 \dots A_n)$ durch $cv_1 \dots v_m A_1 \dots A_n$.

Eine Zeichenreihe Z ist genau dann ein **Ausdruck**, wenn es eine nach diesen Regeln gebildete Ausdrucksableitung gibt, in der Z letzte Zeile ist (eine solche Ausdrucksableitung heißt eine „Ausdrucksableitung für den Ausdruck Z “). Verläuft der letzte Schritt bei einer Ausdrucksableitung eines Ausdrucks A nach Regel (2) oder (3), heißt c die **Hauptkonstante** und heißen A_1, \dots, A_n die **Haupt-Unterausdrücke** von A ; verläuft der letzte Schritt nach Regel (3), heißt die ganze Reihe $A_1 \dots A_n$ der **Skopus** („Wirkungsbereich“) des Operatorexemplars c ; außerdem heißen dann die Variablenexemplare $v_1 \dots v_m$, die gleich nach dem Anfangsexemplar des Operatorexemplars c kommen, die Operatorvariablen von diesem Operatorexemplar; diese und alle weiteren

Exemplare derselben Variablen im Skopus des Operatorexemplars heißen (durch dieses Operatorexemplar) **gebundene** Variablenexemplare. Variablenexemplare heißen in einem Ausdruck **frei**, wenn sie nicht durch ein Operatorexemplar gebunden sind. Ist die Hauptkonstante eines Ausdrucks ein Formelfunktor oder Formeloperator, sprechen wir von einer **Formel**. Andernfalls ist die Hauptkonstante ein Termfunktoren oder Termoperator oder der Ausdruck ist eine Variable, und wir sprechen von einem **Term**. Ist die Hauptkonstante ein Funktor bzw. Operator, sprechen wir von einem Funktor- bzw. Operatorausdruck. Formeln bzw. Terme, in denen keine freien Variablenexemplare vorkommen, heißen **Aussagen** bzw. **Kennzeichnungen**; Formeln bzw. Terme, in denen freie Variablenexemplare vorkommen, **Aussageformen** bzw. **Kennzeichnungsformen**.

Beispiel einer Ausdrucksableitung:

x „x“
 $(x = x)$ „x gleich x“
 $(\forall x (x = x))$ „für alle x gilt: x gleich x“

ist eine Ausdrucksableitung. Daher ist der hier abgeleitete Ausdruck $(\forall x (x = x))$ ein prädikatenlogischer Ausdruck, und zwar eine Formel, da \forall ein Formeloperator ist. Unter der **Länge** eines Ausdrucks versteht man die Anzahl der in ihm vorkommenden Zeichen, ausgenommen Hilfszeichen, Variablen und Namen (0-stelligen Konstanten); das ist also die Anzahl der Operatoren und mindestens 1-stelligen Faktoren. Variablen und Namen sind demnach Ausdrücke der Länge 0. Ausdrücke A der Länge k mit $k \geq 1$ haben nun entweder die Form $(cA_1 \dots A_n)$, wobei c ein Funktor mit Stellenzahl n ist, oder die Form $(o v_1 \dots v_m A_1 \dots A_n)$, wobei o ein Operator ist. Man nennt in beiden Fällen die Teilzeichenreihen $A_1 \dots A_n$ die Haupt-**Unterausdrücke** des Ausdrucks. Durch die Ausdrucksableitung erkennt man auch, ob Variablenexemplare frei oder gebunden sind:

x x ist frei
y y ist frei
 $(x = y)$ x und y sind frei
 $(x = x)$ beide Exemplare von x sind frei
 $(\forall x (x = x))$ alle Exemplare von x sind gebunden durch \forall
 $((\forall x (x = x)) \wedge (x = y))$ y ist frei, alle Exemplare von x bis auf das letzte sind gebunden durch \forall , das letzte x ist frei.
 $(\exists x ((\forall x (x = x)) \wedge (x = y)))$ y ist frei, alle Exemplare von x sind gebunden, die ersten drei durch \forall , das letzte durch \exists .

Das \forall im vorletzten Ausdruck bindet nur (bezieht sich nur auf) „ $x = x$ “, sein Skopus reicht nur bis zum dritten x.

Regeln für das Einsparen von Klammern: Ausdrücke in polnischer Syntax sind klammerfrei; bei gewöhnlicher Syntax gelten dieselben Klammer-Einsparungsregeln wie in der Aussagenlogik. Die *Konvention über die Anziehungskräfte der Zeichen* wird dadurch ergänzt, dass Operatoren stärker sind als Faktoren und Termkonstanten stärker als Formelkonstanten.

Zusätzlich kürzt man Operator-Ketten wie $\forall x \forall y \forall z \dots$ durch $\forall xyz \dots$, $\exists x \exists y \exists z \dots$ durch $\exists xyz \dots$ und $\exists! x \exists! y \exists! z \dots$ durch $\exists! xyz \dots$

ab. **Alternative Schreibweisen** für $\forall xyz \dots A$ sind $\prod xyz \dots A$, $(xyz \dots)A$, $\bigwedge xyz \dots A$ und $\bigwedge_{xyz \dots} A$;

für $\exists xyz \dots A$ auch $\sum xyz \dots A$, $\bigvee xyz \dots A$ und $\bigvee_{xyz \dots} A$, und schließlich für $\exists! xyz \dots A$ auch $\bigvee! xyz \dots A$ und $\bigvee!_{xyz \dots} A$.

Dabei sind die Schreibweisen, in denen man die Variable *unter* ein Zeichen setzt, nicht als *Ausdrücke* akzeptabel (weil in Ausdrücken die Zeichen *nebeneinander* stehen sollen): ebenso ist $(xyz \dots)A$ nicht akzeptabel (weil das Operatorzeichen fehlt) und auch $\forall xyz \dots$, $\exists xyz \dots$, $\exists! xyz \dots$ nicht (weil $\forall, \exists, \exists!$ 1-1-stellig sind und somit nur eine Variable folgen darf). Es handelt sich um also nicht um Ausdrücke, sondern um *Ausdrucksnahmen* (Namen für Ausdrücke).

Arten der formalen Logik. Wir können rein syntaktisch die klassischen Arten der formalen Logik wie folgt unterscheiden:

- Die *Aussagenlogik* verwendet keine Operatoren.
- Die *einfachste, rudimentäre Form der Prädikatenlogik* verwendet von den Operatoren nur die Quantoren. Sie verwendet außerdem nur Prädikate (= Formelfunktoren), also keine Termfunktoren, und sie verwendet standardmäßig weder die Identität = noch die Elementbeziehung/Zugehörigkeitsrelation \in als logische Prädikate.
- Erweiterte Formen der Prädikatenlogik* verwenden all dies und darüber hinaus auch noch weitere Operatoren wie z.B. den Deskriptor (sog. *Kennzeichnungslogik*) und den Abstraktor (sog. *Klassenlogik*).
- Philosophisch interessant ist besonders die *Modallogik*, welche außerdem noch sog. Modaloperatoren \square („es ist notwendig“) und \diamond („es ist möglich“) verwendet; dazu kommen weitere *nichtklassische Logiken* mit noch weiteren Operatoren (genauere Betrachtungen hierüber gehen jedoch über einen Einführungskurs hinaus).

Man unterscheidet noch zwischen **logischen Sprachen erster und höherer Stufe**. Die hier dargestellte Syntax ist die einer sog. *Sprache der ersten Stufe*, und ihre Variablen und Faktoren heißen auch *Variablen erster Stufe* bzw. *Funktoren erster Stufe*. Bei *Sprachen der zweiten Stufe* kommen zu den Variablen erster Stufe sog. *Variablen zweiter Stufe* hinzu, das sind Variablen X, welche für n-stellige Faktoren erster Stufe stehen können; außerdem dürfen zu den gewöhnlichen Faktoren neuartige *Funktoren zweiter Stufe* hinzukommen, die sich mit Faktoren der ersten Stufe zu Ausdrücken zusammensetzen lassen, die eventuell selbst wieder als Faktoren erster Stufe fungieren. In Sprachen der dritten Stufe kommen *Variablen dritter Stufe* hinzu, die für Faktoren der zweiten Stufe stehen können; außerdem eventuell *Funktoren dritter Stufe*, die sich mit Faktoren der zweiten Stufe zu Ausdrücken zusammensetzen lassen usw.³¹ Doch reicht für fast alle praktischen Sprachen die erste Stufe aus, mit der wir uns hier ausschließlich beschäftigen.

³¹ Manchmal drückt man sich missverständlich aus, und sagt, dass nur in Sprachen höherer Stufen Variablen für Klassen stehen können, aber dies können Variablen auch schon in Sprachen der ersten Stufe, solange sie syntaktisch nicht als Faktoren verwendet werden. Denn der „Grundbereich“, über den eine Sprache der ersten Stufe redet, ist ganz beliebig, und es spricht nichts dagegen, seine Objekte als Klassen zu interpretieren.

2. Semantik

Modelle. Ein semantisches Modell M ist ein Paar $\langle G, \sigma \rangle$, bestehend aus einer Klasse G (der zugehörige Grundbereich) und einer Funktion σ (die zugehörige semantische Struktur). Um ein Modell festzulegen, wählt man also zunächst eine Klasse G als Grundbereich, deren Elemente die Individuen sind, über die man reden will (wir nennen sie G -Individuen); die Objekte, über die man reden will, sind diese Individuen von G und zusätzlich die Teilklassen von G . Diese nennen wir G -Objekte. Zu den G -Individuen sollen mindestens die beiden Wahrheitswerte w und f gehören; zu den G -Objekten auch ein von allen G -Individuen verschiedenes Objekt, das in normalen objektsprachlichen Diskursen nicht gebraucht wird, und das wir das „Ersatzobjekt“ J (auch „Joker“ genannt) nennen. Dann wählt man eine auf einem Grundbereich aufbauende *semantische Struktur* σ eine Funktion, die jedem nichtlogischen Funktor c unserer Sprache ein Objekt zuordnet, für das wir – um den Bezug zu M deutlich zu machen – statt $\sigma(c)$ einfach c_M schreiben; dieses c_M ist für ein n -stelliges c stets eine n -stellige Operation, deren Eingabeobjekte und Ausgabeobjekte G -Objekte sind. Wie am Ende von Kap. 3 gezeigt, sind dann 0-stellige Operationen einfach G -Objekte, während n -stellige Operationen (für $n > 0$) als Vorschriften aufgefasst werden können, die jeder Reihe von n G -Objekten ein G -Objekt zuordnet. Genauer fordert man:

(a) Ist c nullstelliger *Termfunktork*, ist c_M ein beliebiges G -Objekt.

Ist c ein nullstelliger *Formelfunktork*, handelt es sich dabei um w oder f , also einen *Wahrheitswert*.

(b) Ist c ein n -stelliger *Termfunktork* (mit $n > 0$), ist c_M eine Vorschrift, die jeder Reihe von n G -Objekten x_1, \dots, x_n ein G -Objekt x zuordnet.³² Das zugeordnete Element bezeichnen wir mit $c_M(x_1, \dots, x_n)$.

Ist c ein n -stelliger *Formelfunktork*, handelt es sich bei dem zugeordneten Objekt um w oder f , also einen *Wahrheitswert*. Die n -stellige Operation, die man einem Formelfunktork zuordnet, kann man auch als n -stellige Relation (Beziehung) ansehen: eine Vorschrift, nach denen für jede Reihe von n G -Objekten festgelegt ist, ob sie oder ob sie nicht „in der Relation stehen“ (was die Objektreihe genau dann tut, wenn c als Operation betrachtet ihr das w zuordnet).

Variablenbelegungen. Eine auf einem Grundbereich G aufbauende Variablenbelegung ist eine Funktion B , die jeder Variablen v ein Element von G (also G -Individuum) zuordnet; statt $B(v)$ schreiben wir dafür kurz v_B . Ist B eine auf G aufbauende Belegung und sind v_1, \dots, v_n Variablen und x_1, \dots, x_n Elemente von G , so bezeichnet $B(v_1 \rightarrow g_1, \dots, v_n \rightarrow g_n)$ die Belegung, welche der Variablen v_1 das Element g_1 zuordnet und ... und der Variablen v_n das Element g_n , und die jeder anderen (von v_1, \dots, v_n verschiedenen) Variablen dasselbe Element zuordnet wie B .

Basen. Ist nun M ein semantisches Modell und B eine Belegung, so dass B eine auf dem Grundbereich von M aufbauende Belegung ist, so heißt das Paar $\langle M, B \rangle$ eine *semantische Bewertungsbasis* (kurz *Basis*) oder *Interpretation* J für die Prädikatenlogik. Eine solche Basis ist nun der vollständige interpretative Hintergrund, vor dem wir jedem prädikatenlogischen Ausdruck A eine Bedeutung verleihen, d.h. ein Objekt als „Denotat“ (synonym: „Designat“, „Referent“) zuordnen, welches A dann „in dieser Basis“ bezeichnet. Wir bezeichnen dieses Denotat metasprachlich kurz als $[A]_J$ oder wegen $J = \langle M, B \rangle$ aufgeschlüsselt als $[A]_{M,B}$. Und zwar legen wir das Denotat durch sog. *Rekursion über die Länge der Ausdrücke* fest.

D.h. man bestimmt in einem ersten Schritt nur für die Ausdrücke der Länge null (d.h. für die Variablen und die nullstelligen Funktoren = Namen) direkt fest, was ihre Denotate in jeder Basis sind. Danach definiert man das Denotat für die übrigen Ausdrücke (deren Länge also größer als 0 ist), auf indirekte Weise: Indem man nämlich bei der Definition auf die als schon festgelegt vorausgesetzten Denotate für Ausdrücke kürzerer Länge (in allen Basen) zurückgreift. Genauer gesagt wird das Denotat eines Ausdrucks A mit den Haupt-Unterausdrücken A_1, \dots, A_n festgelegt in Abhängigkeit davon, welche Denotate A_1, \dots, A_n haben (deren Länge ja kleiner ist als die von A).

Zwischenbemerkung: Nach diesem „Rekursionsprinzip“ haben wir auch in der Aussagelogik die Denotate (d.h. dort: die Wahrheitswerte) der Ausdrücke festgelegt: In der Aussagelogik legt die semantische Interpretation σ direkt den Wahrheitswert der nichtlogischen Konstanten fest, während die übrigen „Ausdrücke der Länge null“ (die keine mehr-als-0-stelligen Junktoren involvieren) die beiden 0-stelligen Junktoren \top und \perp waren, deren Wahrheitswert wir ebenfalls direkt angeben haben. Für alle übrigen Ausdrücke aber (also diejenigen, die mittels mehr-als-0-stelligen Junktoren aus Unterausdrücken zusammengesetzt sind) haben wir den Wahrheitswert unter Rückgriff auf die schon als definiert angesehenen Wahrheitswerte dieser Unterausdrücke angeben.

In der Prädikatenlogik wird nun analog das Denotat $[A]_{M,B}$ für den Fall, dass A ein Funktorausdruck cA_1, \dots, A_n ist, stets definiert in Abhängigkeit von den n Denotaten $[A_1]_{M,B}, \dots, [A_n]_{M,B}$ der Ausdrücke A_1, \dots, A_n in derselben Basis $\langle M, B \rangle$, in der man das Denotat von A festlegen will. Dagegen wird das Denotat $[A]_{M,B}$ für den Fall, dass A ein Operatorausdruck $cv_1 \dots v_m A_1 \dots A_n$ ist, definiert in Abhängigkeit von den (im Allgemeinen unendlich vielen) Denotaten der Ausdrücke A_1, \dots, A_n in allen Basen $\langle M, B' \rangle$, die man aus $\langle M, B \rangle$ erhalten kann, indem man die Belegung B dadurch abändert, dass man den Variablen v_1, \dots, v_m beliebige Elemente von G zuordnet. Man betrachtet also bei der Semantik der Operatoren nicht (nur) die Denotate der Unterausdrücke in einer Basis $\langle M, B \rangle$, sondern vielmehr deren Denotate in allen Basen $\langle M, B(v_1 \rightarrow g_1, \dots, v_m \rightarrow g_m) \rangle$ mit beliebigen Elementen g_1, \dots, g_n von G . Konkret sieht nun die Festlegung der Denotate $[A]_{M,B}$ wie folgt aus:

1. Schritt (direkte Festlegung von $[A]_{M,B}$ für den Fall, dass A die Länge 0 hat): Für Variablen v sei $[v]_{M,B} := v_B$, für nichtlogische Namen (nullstellige Funktoren) c sei $[c]_{M,B} := c_M$.

Die logischen Namen $\top, \perp, \underline{\perp}$ haben in allen Basen dieselbe Bedeutung, nämlich $[\top]_{M,B} := w, [\perp]_{M,B} := f, [\underline{\perp}] :=$ der Joker J .

2. Schritt (rekursive Festlegung von $[A]_{M,B}$ für den Fall, dass A eine Länge größer als 0 hat):

(2a) A sei der Funktorausdruck $cA_1 \dots A_n$ (bzw. im zweistelligen Fall $A_1 c A_2$) mit dem nichtlogischen Funktor c als Hauptkonstante und den Haupt-Unterausdrücken A_1, \dots, A_n . Dann sei $[cA_1 \dots A_n]_{M,B} := c_M([A_1]_{M,B}, \dots, [A_n]_{M,B})$ bzw. $[A_1 c A_2]_{M,B} := [A_1]_{M,B} c_M [A_2]_{M,B}$. Anders gesagt: $[cA_1 \dots A_n]_{M,B}$ (bzw. im zweistelligen Fall $[A_1 c A_2]_{M,B}$) ist dasjenige G -Objekt, das gemäß der Vorschrift c_M der Reihe

³² Formaler ausgedrückt ist dann c_M eine n -stellige Operation, die allen Tupeln $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ mit Komponenten x_1, \dots, x_n aus G ein Element x aus G zuordnet.

$[A_1]_{M,B}, \dots, [A_n]_{M,B}$ bzw. dem Paar $[A_1]_{M,B}, [A_2]_{M,B}$ zugeordnet wird.

Zu den mit einem *logischen Funktor* c als Hauptkonstante gebildeten Ausdrücken: Die mit den aus der Aussagenlogik bekannten Junktoren $\neg, \neg, \top_1, \perp_1, \wedge, \vee, \dot{\vee}, \uparrow, \downarrow, \rightarrow, \leftarrow, \leftrightarrow, \leftrightarrow, \leftarrow, \downarrow, \downarrow, \uparrow, \uparrow, \top_2, \perp_2$ gebildeten Ausdrücke haben in der Prädikatenlogik dieselbe Bedeutung, die mit Hilfe von Wahrheitswertetabellen definiert werden kann. Nur lauten die Einträge in den Eingangsspalten der Tabelle jetzt nicht „w“ und „f“, sondern „w“ und „ \bar{w} “ (wobei \bar{w} für „etwas anderes als w“ steht), da für das Denotat der Ausdrücke außer w und f auch alle anderen G -Objekte stehen können. Ausdrücke, die keinen Wahrheitswert bezeichnen, werden also hier als „falsch“ interpretiert. Als Alternative hierzu verbietet man manchmal einfach, Ausdrücke, die keinen Wahrheitswert bezeichnen, mit einem Formelfunktor zusammenzustellen; aber dies führt letztlich zu einer komplizierteren Syntax und Semantik. Schließlich haben wir in unsere Liste von logischen Formelfunktoren noch $=$ und \in aufgenommen, was keine Junktoren sind. Deren Semantik legen wir natürlich wie folgt fest:

$[A_1.=A_2]_{M,B} := w$, falls $[A_1]_{M,B}$ und $[A_2]_{M,B}$ ein und dasselbe G -Objekt ist; sonst sei $[A_1.=A_2]_{M,B} := f$.

$[A_1.\in.A_2]_{M,B} := w$, falls $[A_2]_{M,B}$ eine Klasse ist, und $[A_1]_{M,B}$ ein Element dieser Klasse; sonst sei $[A_1.\in.A_2]_{M,B} := f$.

(2b) A sei ein Operatorausdruck $cv_1\dots v_m A_1\dots A_n$ mit dem *nichtlogischen Operator* c als Hauptkonstante, den Operatorvariablen v_1, \dots, v_m und den Haupt-Unterausdrücken A_1, \dots, A_n . Dann ist $[cv_1\dots v_m A_1\dots A_n]_{M,B}$ durch eine spezielle Vorschrift festzulegen, und zwar eine solche, bei der auf die Denotate zurückgegriffen werden darf, welche die kürzeren Ausdrücke A_1, \dots, A_n in all den Basen $\langle M, B(v_1 \rightarrow g_1, \dots, v_n \rightarrow g_n) \rangle$ haben, die man erhält, wenn man die Belegung B so abändert, dass die Variablen v_1, \dots, v_m beliebigen Werten g_1, \dots, g_n aus G zugeordnet werden.

Die mit den logischen Operatoren gebildeten Ausdrücke erhalten schließlich folgendes Denotat:

$[\forall v A]_{M,B} := w$, falls für alle G -Individuen g gilt, dass $[A]_{M,B(v \rightarrow g)} = w$; andernfalls sei $[\forall v A]_{M,B} := f$.

$[\exists v A]_{M,B} := w$ falls für mindestens ein G -Individuum g gilt, dass $[A]_{M,B(v \rightarrow g)} = w$; andernfalls sei $[\exists v A]_{M,B} := f$

$[\exists! v A]_{M,B} := w$, falls für genau ein G -Individuum g gilt, dass $[A]_{M,B(v \rightarrow g)} = w$; andernfalls sei $[\exists! v A]_{M,B} := f$.

$[! v A]_{M,B}$ sei im Fall, dass $[\exists! v A]_{M,B}$ gilt (es also genau ein G -Individuum g gibt, so dass $[A]_{M,B(v \rightarrow g)} = w$) eben dieses g ; andernfalls sei $[! v A]_{M,B} :=$ der Joker J .

$[\kappa v A]_{M,B}$ sei die Klasse, deren Elemente genau diejenigen G -Individuen sind, für die $[A]_{M,B(v \rightarrow g)} = w$ ist.

Demnach gilt also:

- $\forall v A$ bzw. $\exists v A$ bzw. $\exists! v A$ steht für die Aussage, dass für jedes bzw. mindestens ein bzw. genau ein G -Individuum der Ausdruck A in eine wahre Aussage übergeht, sobald man in ihm v als Bezeichnung für g interpretiert (so dass man die durch das Operatorexemplar \forall bzw. \exists bzw. $\exists!$ am Anfang des Ausdrucks gebundenen Variablenexemplare von v – das sind die in A freien Exemplare von v – als Bezeichnungen für g lesen muss).
- $! v A$ bezeichnet im Fall, dass es genau ein G -Individuum g gibt, für welches A in eine wahre Aussage übergeht, sobald man v als Bezeichnung für g interpretiert, dieses g – und andernfalls den Joker J .
- $\kappa v A$ bezeichnet die Klasse aller G -Individuen, für welche A in eine wahre Aussage übergeht, sobald man v als Bezeichnung für g interpretiert. Eine alternative Schreibweise hierfür ist $\{v \mid A\}$.

Bemerkung zur Fusion / Gleichberechtigung von Formeln und Termen: Wenn ein Ausdruck eine *Formel* ist, bekommt er in jeder Basis als Denotat stets einen Wahrheitswert, also w oder f – und je nachdem sagen wir, die Formel sei eine wahre oder falsche Aussage (in dieser Basis). Handelt es sich dagegen um einen *Term*, kommen als Denotate neben den Wahrheitswerten auch andere Objekte in Frage. In der auf Frege zurückgehenden liberalen Handhabung der Semantik erlaubt man, jeden beliebigen Ausdruck sowohl termartig (d.h. als Objektbezeichnung) wie auch formelartig (d.h. zum Ausdruck einer Aussage) benutzen: Das *termartige Benutzen einer Formel* F besteht dann darin, sie als Bezeichnung für ihren Wahrheitswert zu nehmen (eine wahre Formel ist eine Bezeichnung für w , eine falsche ist eine Bezeichnung für f); das *formelartige Benutzen eines Terms* T besteht darin, ihn für die Aussage stehen zu lassen, dass das von ihm bezeichnete Objekt mit w identisch ist (es steht dann also T für eine wahre Aussage, wenn das Denotat von T der Wahrheitswert w ist, und ansonsten für eine falsche Aussage). Man sieht jeweils am Kontext, ob man einen Ausdruck term- oder formelartig verwendet. Wenn der Kontext allerdings nicht das Gegenteil nahe legt, soll eine Formel immer formelartig und ein Term immer termartig interpretiert werden. Eine Logik, in der Formeln und Terme in der beschriebenen Weise gleichberechtigt sind, nennt man *Ausdruckslogik*.

Höhere semantische Begriffe. Hat eine Formel A in einer Basis $\langle M, B \rangle$ als Denotat den Wahrheitswert w , sagen wir, dass sie „in Basis $\langle M, B \rangle$ “ wahr ist oder (dort) gilt oder (dort) „erfüllt ist“ und schreiben dafür

$\langle M, B \rangle \models A$ (lies: „Basis $\langle M, B \rangle$ macht A gültig“ oder „Basis $\langle M, B \rangle$ erfüllt A “).

Ist M ein Modell derart, dass $\langle M, B \rangle \models A$ für jede beliebige auf dem Grundbereich von M aufbauende Belegung B gilt, sagen wir, dass A „im Modell M “ gilt oder (dort) erfüllt ist und schreiben dafür

$M \models A$ (lies: „Modell M macht A gültig“ oder „Modell M erfüllt A “).

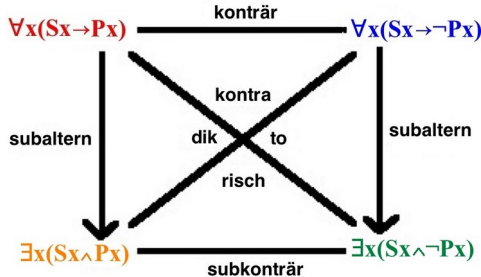
Ist schließlich A derart, dass $M \models A$ für jedes beliebige Modell M gilt (und somit $\langle M, B \rangle \models A$ für jede beliebige Basis, mithin jeden beliebigen interpretativen Hintergrund gilt), sagen wir dass A „allgemeingültig“ oder ein Tautologie ist und schreiben

$\models A$. (lies: A ist allgemeingültig).

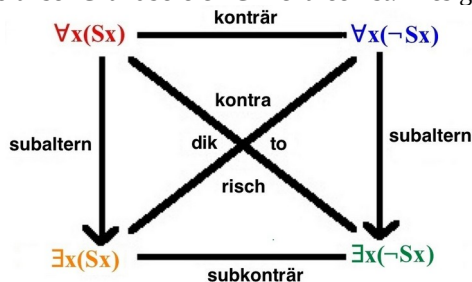
Ein Beispiel für eine allgemeingültige Formel wäre $Px \vee \neg Px$ (wenn P ein 1-stelliges Prädikat P und x Variable ist).

Eine Formel A heißt „in einem Modell M “ *unerfüllbar* bzw. *erfüllbar*, wenn es keine bzw. mindestens eine auf M aufbauende Belegung gibt, derart dass A in der Basis $\langle M, B \rangle$ wahr ist. A heißt (schlechthin) *unerfüllbar* (oder eine *Antilogie* oder *Kontradiktion*) bzw. *erfüllbar*, wenn es kein bzw. mindestens ein Modell gibt, in dem A gilt, d.h. wenn es schlechthin keine bzw. mindestens eine Basis gibt, in der A erfüllt ist. Schließlich werden die Beziehungen der logischen Äquivalenz, der Implikation/Subalternität, Kontradiktion, Kontrarität und Subkontrarität wie in der Aussagenlogik definiert: Die entsprechenden Forderungen (stets gleicher bzw. verschiedener Wahrheitswert, nie zugleich wahr bzw. falsch etc.) müssen in jedem *Modell* (wie in der Aussagenlogik)

und damit auch in jeder *Basis* gelten, d.h. bei jeder möglichen Interpretation sowohl der Konstanten wie auch der Variablen. Zusätzlich nennt man Ausdrücke (vor allem Terme) A und B *äquivalent* und schreibt $A \equiv B$, wenn sie in jedem Modell dasselbe Denotat haben. Formeln sind genau dann äquivalent, wenn sie äquivalent sind. Man kann jedoch alle diese Begriffe auch *relativiert* benutzen: *bezogen auf ein bestimmtes Modell* oder *unter der Voraussetzung, dass bestimmte Formeln wahr sind*. Auch das logische Quadrat der Syllogistik (siehe Kap. 4) gilt ja nur unter der Voraussetzung, dass alle Begriffe nichtleer sind. Dieses Quadrat kann man prädikatenlogisch wie folgt ausdrücken (wobei S bzw. P ein 1-stellige Prädikat ist: „Sx“ soll die Bedeutung haben „x ist ein S“, „Px“ die Bedeutung „x ist ein P“); es gilt *unter der Voraussetzung, dass $\exists x(Sx)$ gilt*.



Ein einfacheres logisches Quadrat der Prädikatenlogik ist offenbar das folgende, welches unter der Voraussetzung gilt, dass es mindestens ein G-Individuum x gibt, also unser Grundbereich G nicht leer ist. Dies gilt aber, da G mindestens w und f enthält:



3. Pragmatik

Semantische Analyse vorgelegter Formeln. Nach dem *Unentscheidbarkeitssatz* (Alonso Church, 1936) gibt es für die Prädikatenlogik keine formale Methode für semantische Analysen, die in endlich vielen Schritten zum Ergebnis führt (eine solche Methode gibt es dagegen für die Aussagenlogik: nämlich, wie wir gesehen haben, die Wahrheitswertetafel-Methode). In der Prädikatenlogik ist man daher auf nicht-formalisierbare semantische Überlegungen angewiesen (obgleich es Verfahren wie die hier nicht besprochenen semantischen Bäume gibt, die, wenn auch nicht immer zielführend, so doch hilfreich sein können). Im Folgenden werden zwei Beispiele für konkrete semantische Analysen im Rahmen zweier konkreter Beispiele für Entfaltungen der Prädikatenlogik angeführt (ein mathematisches und ein nicht-mathematisches Beispiel).

A. Mathematisches Beispiel.

A. *Syntaktische Erweiterungen der prädikatenlogischen Sprache* (= Wahl der passenden nichtlogischen Konstanten):

Wir nehmen zu den logischen Konstanten die folgenden nichtlogischen Konstanten hinzu:

- a) 0-stellige Termkonstanten (= Namen): 0 und 1
- b) 2-stellige Formelkonstanten (Prädikate): < und > 2-stellige Termkonstanten: + und -

B. *Semantische Bestimmungen*:

- a) Grundbereich G sei die Menge der reellen Zahlen.
- b) Festlegung der auf G aufbauenden semantischen Struktur σ (und damit des Modells M):
 0_M bzw. 1_M sei die Zahl Null bzw. Eins, d.h. im Modell M bezeichnen 0,1 diese beiden Zahlen.
 $<_M$ bzw. $>_M$ sei die 2-stellige Relation, die jedem Paar von G-Objekten einen Wahrheitswert zuordnet, und zwar w genau dann, wenn es sich um ein Paar reeller Zahlen m,n handelt und m kleiner bzw. größer als n ist.
 $+_M$ bzw. $-_M$ sei die 2-stellige Operation, die jedem Paar reeller Zahlen m und n ihre Summe bzw. Differenz zuordnet, und jedem sonstigen Paar von G-Objekten den Joker.

c) *Festlegung der Belegung B*

B ordne der Variablen x die Zehn zu (d.h. x_B sei Zehn), und allen anderen Variablen (y,z,x',y',y'',x'',y'',z'', ...) die Zahl Eins.

Mit diesen Festlegungen sind z.B. die Formeln

- (1) $x + y = x + 1$,
- (2) $0 < 1$,
- (3) $\forall x (x + 1 > x)$,
- (4) $\forall x (x + 1 = x + 1)$
- (5) $\forall x ((x = y) \rightarrow (x + 1 = y + 1))$ in der gewählten semantischen Bewertungsbasis (M,B) wahr.

Dabei ist die Wahrheit der Aussageform (1) jedoch abhängig von der Belegung: Sie kann bei anderer Belegung als B falsch sein. Dagegen sind Aussagen (2) und (3) unabhängig von der Belegung wahr: x kommt hier entweder gar nicht oder nur gebunden vor, daher spielt es keine Rolle, mit welchem Wert wir x aktuell belegt haben. Beide Aussagen gelten daher „im Modell M“. Sie sind aber abhängig von der semantischen Struktur des Modells M; würde man zu einem anderen Modell übergehen, in dem etwa das Zeichen 0 die Zahl Drei bezeichnet bzw. in dem die „gewöhnliche“ Bedeutung der Konstanten > und < vertauscht ist, dann würde (2) bzw. (3) in eine falsche Aussage übergehen. Aussagen (4) und (5) hingegen sind in jedem beliebigen Modell wahr und daher allgemeingültig. Man vergleiche nun die beiden Formeln

$$(6) \quad \forall x \exists y (y > x) \text{ und } \exists y \forall x (y > x).$$

Die erste gilt in M, die zweite nicht: Bei Quantoren *kommt es also auf die Reihenfolge an!* Betrachte noch die Terme

$$(7) \quad x + y$$

$$(8) \quad \iota y (y < x \wedge ((x-y = 1) \vee (y-x = 1)))$$

$$(9) \quad \iota x (x = x)$$

$$(10) \quad \iota x \neg(x = x)$$

$$(11) \quad \kappa x (x > 0)$$

Kennzeichnungsform (7) ist in Basis $\langle M, B \rangle$ eine Bezeichnung für die Zahl elf, bei anderer Belegung kann sie aber eine andere Zahl bezeichnen. Ebenso ist Kennzeichnungsform (8) in Basis $\langle M, B \rangle$ eine Bezeichnung für die Zahl neun. Kennzeichnungen (9) und (10) sind in jedem Modell eine Bezeichnung für den Joker J. Kennzeichnung (11) bezeichnet in M die Klasse der positiven reellen Zahlen. Eine in M wahre Formel, in der als Unterausdrücke zwei Kennzeichnungen vorkommen, wäre

$$(12) \quad \iota x (x < y \wedge ((x-y = 1) \vee (y-x = 1))) \in \kappa x (x > 0)$$

Sie drückt nämlich im Modell M auf komplizierte Weise aus, dass die Zahl neun eine positive reelle Zahl ist.

B. Nichtmathematisches Beispiel.

A. Syntaktische Erweiterungen der prädikatenlogischen Sprache (= Wahl der passenden nichtlogischen Konstanten):

Wir nehmen zu den logischen Konstanten die folgenden nichtlogischen Konstanten hinzu:

a) 0-stellige Termkonstanten (= Namen): a, k, ω

b) 1-stellige Formelkonstanten (Prädikate): \wp , σ ; 1-stellige Termkonstante: ♁

c) 2-stellige Formelkonstanten (Prädikate): ω und ♂ ; 2-stellige Termkonstante: ♁

Lesarten: Für Ausdrücke A lesen wir $\wp A$ bzw. σA lesen wir als „A ist weiblich bzw. männlich“, und $\text{♁} A$ als „der König von A“.

Für Ausdrücke A, B wollen wir den Ausdruck $A \omega B$ bzw. $A \text{♂} B$ lesen als „A ist verheiratet mit bzw. schlägt B“ und den Ausdruck $\text{♁} AB$ als „die Tochter von A und B“. Bem. Wir bilden mit ♁ neue Ausdrücke mit „polnischer“ Syntax als $\text{♁} AB$, weil dies zu der Lesart „die Tochter von A und B“ besser passt als $A \text{♁} B$.

B. Semantische Bestimmungen:

a) Grundbereich G sei die Menge der Personen und Länder.

b) Festlegung der auf G aufbauenden semantischen Struktur σ (und damit des Modells M):

a bzw. k ordnen wir zwei konkrete Personen namens Anna und Karl zu.

\wp_M bzw. σ_M sei die 1-stellige Operation, die jedem G-Objekt einen Wahrheitswert zuordnet, und zwar w genau dann, wenn es sich bei dem G-Objekt um eine männliche bzw. weibliche Person handelt.

♁_M stehe für die 1-stellige Operation, die jedem Land, das einen König hat, diesen zuordnet, und jedem sonstigen G-Objekt den Joker J zuordnet.

ω_M bzw. ♂_M stehe für die 2-stellige Operation, die jedem Paar von G-Objekten einen Wahrheitswert zuordnet, und zwar w genau dann, wenn es sich um ein Paar verheirateter Personen handelt bzw. um ein Paar von Personen, bei dem die zuerst genannte (die erste Komponente des Paares) die danach genannte (die zweite Komponente des Paares) schlägt.

♁_M stehe für die 2-stellige Operation, die jedem Ehepaar, das genau eine Tochter hat, diese zuordnet; und jedem sonstigen Paar von G-Objekten den Joker J.

C. Festlegung der Belegung B

B ordnet der Variablen y Carla, die Tochter von Anna und Karl (wir nehmen an, dass sie verheiratet sind und genau eine Tochter namens Carla haben), der Variablen z England, und allen anderen Variablen Amerika.

In der dadurch festgelegten semantischen Bewertungsbasis $\langle M, B \rangle$ sind die folgenden Formeln alle wahr:

$$(1) \quad a \omega k,$$

$$(2) \quad y = \text{♁}ak,$$

$$(3) \quad \text{♁}xy = \text{♁}yx$$

$$(4) \quad \forall x \forall y (x \omega y \rightarrow ((\sigma x \wedge \wp y) \vee (\sigma y \wedge \wp x))), \text{ oder kürzer } \forall xy (x \omega y \rightarrow ((\sigma x \wedge \wp y) \vee (\sigma y \wedge \wp x))),$$

$$(5) \quad \forall x \forall y (x \omega y \rightarrow y \omega x) \text{ oder kürzer } \forall xy (x \omega y \rightarrow y \omega x); \text{ vergleiche dies mit } \forall xy (x \omega y \rightarrow x \omega y).$$

Formel (2) kann beim Übergang zu einer anderen Variablenbelegung B' falsch werden. Die übrigen gelten im Modell M unabhängig von der Variablenbelegung. Keine von ihnen ist jedoch unabhängig vom Modell gültig (allgemeingültig). Allgemeingültig ist aber Formel $\forall xy (x \omega y \rightarrow x \omega y)$, im Gegensatz zur ähnlichen Formel (5) $\forall x \forall y (x \omega y \rightarrow y \omega x)$. Formel

$$(6) \quad \text{♁}ak \text{♂} \text{♁}z$$

bedeutet in unserer Bewertungsbasis, dass die Tochter von Anna und Karl den König von England schlägt. Dagegen bedeutet

$$(7) \quad \forall x (y \text{♂} \text{♁}x)$$

in Basis $\langle M, B \rangle$, dass die Tochter von Anna und Karl alle Könige schlägt; und im Modell M, dass irgendjemand dies tut. –

Wenn der König von England die einzige Person ist, die von Carla geschlagen wird, bezeichnet außer $\text{♁}z$ auch

$$(8) \quad \iota x (\text{♁}ak \text{♂} \text{♁}x)$$

diesen König. Dann wären also die Formeln

$$(9) \quad \iota x (\text{♁}ak \text{♂} x) = \text{♁}z, \quad (10) \quad \exists! x (\text{♁}ak \text{♂} \text{♁}x), \text{ und erst recht } (11) \quad \exists x (\text{♁}ak \text{♂} \text{♁}x) \text{ alle wahr.}$$

Schließlich bezeichnet der Term

$$(10) \quad \kappa x (\exists y (x = \text{♁}y)) \text{ im Modell M die Klasse aller Könige.}$$

Definitionstätigkeit.

1. Sprach-erweiternde Definitionen. Wie in der Aussagenlogik kann man durch Definitionen neue Konstanten einführen:

Bsp.: Das Ungleichheitszeichen \neq und Nichtelementzeichen \notin (2-stellige Prädikate bzw. Formelfunktoren) führt man so ein:

$$a \neq b \quad :=< > \quad \neg (a = b)$$

$$a \notin b \quad :<=> \quad \neg (a \in b)$$

Mit Hilfe des logischen Element-Zeichens \in lassen sich auch die Zeichen \subseteq und \subset für die Teilmenge bzw. echte Teilmenge als 2-stellige Prädikaten definieren:

$$a \subseteq b \quad :<=> \quad \forall v (v \in a \rightarrow v \in b), \text{ wobei } v \text{ eine Variable sein muss, die in } a \text{ und } b \text{ nicht frei vorkommt.}$$

$$a \subset b \quad :<=> \quad a \subseteq b \wedge a \neq b.$$

Die Zeichen \emptyset für die leere Menge und \mathbb{D} für die Allmenge (Menge aller Dinge, d.h. hier: aller G-Individuen) führt man als 0-stellige Termfunktoren (Namen) wie folgt ein:

$$\emptyset \quad := \quad \kappa v (v \neq v)$$

$$\mathbb{D} \quad := \quad \kappa v (v = v). \text{ Nach dieser Definition ist } \mathbb{D} \text{ offenbar objektsprachliche Bezeichnung für den Grundbereich } G.$$

Gehört das Kleinerzeichen $<$ bereits zu den nichtlogischen Symbolen, so kann man die Zeichen $>$, \leq , \geq (das Größerzeichen, Kleingleichzeichen und Größergleichzeichen) als 2-stellige Prädikat per Definition wie folgt einführen:

$$a > b \quad :<=> \quad b < a$$

$$a \leq b \quad :<=> \quad (a < b) \vee (a = b)$$

$$a \geq b \quad :<=> \quad (a > b) \vee (a = b)$$

Wichtig sind noch die sog. „eingeschränkten“ oder „relativierten“ Quantoren:

$\forall v A$ bzw. $\bigwedge_v A$ bedeutet: „für alle v des Grundbereichs gilt A “. Man möchte aber oft sagen „für alle Elemente v einer bestimmten Klasse gilt A “ (etwa: für alle *reellen Zahlen* v , für alle *Esel* v etc.) Ebenso möchte man

$\exists v A$ bzw. $\bigvee_v A$ („es gibt mindestens ein v , so dass A “) relativieren auf „es gibt mindestens ein v einer bestimmten Klasse, für das A gilt“, und $\exists! v A$ bzw. $\bigvee_v! A$ („es gibt genau ein v , so dass A “) relativieren auf „es gibt genau ein v einer bestimmten Klasse, für das A gilt“.

Bezeichnet C eine Klasse (von Elementen des Grundbereichs), auf die man relativieren will, schreibt man hierzu $\forall v \in C A$ oder $\bigwedge_{v \in C} A$ („für alle v aus C gilt A “) bzw. $\exists v \in C A$ oder $\bigvee_{v \in C} A$ („für min. ein v aus C gilt A “) bzw. $\exists! v \in C A$ oder $\bigvee_{v \in C}! A$ („für genau ein v aus C gilt A “).

Die formale Definition dieser neuen Operatoren lautet:

$$\forall v \in C A := \forall v (v \in C \rightarrow A)$$

$$\exists v \in C A := \exists v (v \in C \wedge A)$$

$$\exists! v \in C A := \exists! v (v \in C \wedge A)$$

Für Terme mit dem Klassenoperator führt man die gewöhnliche beschreibende Klassenbezeichnung ein: $\{v \mid A\} := \kappa v A$. Es ist $\{v \mid A\}$ genau genommen kein neuer *Ausdruck* (denn in Ausdrücken kommen weder die geschweiften Klammern $\{, \}$ noch das Trennzeichen \mid vor), sondern ein *Name* für einen solchen. Mit dessen Hilfe kann man als weiteren Ausdrucks-Namen die aufzählende Klassenbezeichnung definieren durch $\{a,b,c,\dots\} := \{u \mid u = a \vee u = b \vee u = c \vee \dots\}$ (wobei u eine Variable ist, die in a,b,c,\dots nicht vorkommt).

2. *Reduzierende Definitionen.* Man kann jede $\exists!$ -Formel durch eine \exists -Formel definieren (und damit ersetzen): Es gilt nämlich, wenn man für A auch $A(v)$ schreibt und dann mit $A(w)$ die Formel bezeichnet, die aus $A(v)$ entsteht, wenn man darin die Variable v ohne Bedeutungsänderung durch eine andere Variable w ersetzt (siehe genauer die folgenden beiden Absätze):

$$\exists! v A(v) \Leftrightarrow \exists v (A(v) \wedge \forall w (w \neq v \rightarrow \neg A(w))).$$

Somit ist $\exists!$ entbehrlich.

Offensichtlich kann man auch jede \exists -Formel durch eine äquivalente \forall -Formel ersetzen und umgekehrt. Es gilt nämlich:

$$\exists v A \Leftrightarrow \neg \forall v \neg A \text{ und entsprechend } \forall v A \Leftrightarrow \neg \exists v \neg A.$$

Von den Quantoren braucht man also nur einen, etwa \forall .

3. Metasprachliche Definitionen.

3a. *Gebundene Umbenennung:* Ist A ein Ausdruck mit gebundenen Variablen, etwa $\exists y (y \in x)$, so kann man offenbar ohne Bedeutungsänderung die gebundenen Variablen (hier die beiden y) durch andere Variablen ersetzen, unter der Auflage, dass

1. an Stellen, wo Exemplare derselben bzw. verschiedener Variablen standen, dies stets auch nach der Ersetzung so ist, und
2. Jedes Variablenexemplar, das frei bzw. durch ein bestimmtes Operatorexemplar gebunden war, nach der Ersetzung in ein Variablenexemplar übergeht, das ebenfalls frei bzw. durch dasselbe Operatorexemplar gebunden ist.

Eine Ersetzung nach diesen Vorgaben nennt man *gebundene Umbenennung*. Z.B. geht $\exists y (y \in x)$ durch eine gebundene Umbenennung, in der alle Exemplare der Variablen y durch solch von z ersetzt werden, in $\exists z (z \in x)$ über. Keine korrekte gebundene Umbenennung wäre es, wenn man die Exemplare von y durch solche von x ersetzt: Dann erhielte man $\exists x (x \in x)$, und hier ist das Exemplar von x vor der linken Klammer, welches zunächst ein freies Variablenexemplar war, nun gebunden.

3b. *Substitutionen (Einsetzungen) und Variablenkollision:* Sei ein Buchstabe, z.B. A , Abkürzung für einen Ausdruck, etwa wieder $\exists y (y \in x)$, was bedeutet: „es gibt ein y , so dass y Element von x “; das ist äquivalent zu: „ x ist eine nichtleere Klasse“.

Man schreibt dann häufig einen (weiteren) Ausdruck eingeklammert hinter den Buchstaben. Für den eingeklammerten Ausdruck nimmt man meist einen Unterausdruck, in unserem Beispiel also etwa die Variable x , so dass man für den Ausdruck A metasprachlich statt „ A “ auch „ $A(x)$ “ schreibt (lies: „ A (in Abhängigkeit) von x “). Sinn dieser Schreibweise ist, den Leser aufzufordern, sich den Ausdruck A vorstellen und dabei besonders – so vorhanden – auf die in A vorkommenden Exemplare des eingeklammerten Ausdrucks zu achten, in unserem Beispiel auf die Exemplare von x . Nachdem nun von „ $A(x)$ “ die Rede war, und s

irgendein beliebiger Ausdruck ist (den wir das „Substitut“ nennen wollen), soll dann „A(s)“ einen neuen Ausdruck bezeichnen, der stets – d.h. in jeder Basis (M,B) – dieselbe Bedeutung hat wie der ursprüngliche Ausdruck A sie bekommen würde, wenn x dasselbe Denotat bekommen würde wie s. In unserem Beispiel bedeutet A(x) „x ist eine nichtleere Klasse“, also soll A(s) ein Ausdruck sein mit der Bedeutung „s ist eine nichtleere Klasse“.

Man könnte nun denken: Einen solchen Ausdruck erhält man, indem man in A jedes Exemplar von x (oder wenn x Variable ist, jedes freie Exemplar von x) durch ein Exemplar von s ersetzt. In unserem Beispiel müssten wir demnach einfach im Ausdruck A(x) – das heißt in $\exists y (y \in x)$ – den Ausdruck s für x einsetzen (substituieren). Das liefert $\exists y (y \in s)$ als neuen Ausdruck A(s). Dieser neue Ausdruck scheint in der Tat auszudrücken, dass s eine nichtleere Klasse ist.

Doch unter Umständen kann dieses naheliegende Vorgehen schief gehen. Wenn nämlich der eingesetzte Ausdruck s freie Variablen hat, kann es passieren, dass diese beim Einsetzen versehentlich gebunden werden (sog. *Variablenkollision*), wodurch der neue Ausdruck eine unerwartete und unerwünschte Bedeutung erhalten kann. Die Variablenkollision ist uns auch bei der Besprechung der Ersetzbarkeitsregel der Gleichheitslogik bereits begegnet (siehe oben, S. 22).

Nehmen wir z.B. als Substitutsausdruck s einfach die Variable y. Wir wünschen, dass A(y) die Bedeutung hat: „y ist eine nichtleere Klasse“. Setzen wir aber y für x in $\exists y (y \in x)$ ein, erhalten wir $\exists y (y \in y)$, was etwas völlig anderes bedeutet, nämlich „es gibt ein Objekt y, das Element von sich selbst ist“! Das eingesetzte y wurde hier durch \exists gebunden, es sollte aber frei bleiben. Dergleichen kann nur passieren, wenn die im Substitutsausdruck vorkommenden freien Variablenexemplare – hier die Variable y – in dem ursprünglichen Ausdruck A gebunden vorkommen. Was man daher tut, ist folgendes: Bevor man den Substitutsausdruck einsetzt, sorgt man durch gebundene Umbenennung dafür, dass die gebundenen Variablen des ursprünglichen Ausdrucks durch solche ersetzt werden, die im Substitutsausdruck nicht vorkommen. Dann erst setzt man ein. In unserem Beispiel wird aus $\exists y (y \in x)$ also beispielsweise zuerst $\exists z (z \in x)$ gemacht, und erst dann $\exists z (z \in y)$. Die letzte Formel ist das gewünschte A(y) mit der Bedeutung „y ist eine nichtleere Klasse“. Nun gibt es verschiedene gebundene Umbenennungen: Statt von $\exists y (y \in x)$ zu $\exists z (z \in x)$ überzugehen, hätten wir z.B. auch zu $\exists z' (z' \in x)$ übergehen können; dann hätten wir als A(y) den Ausdruck $\exists z' (z' \in y)$ erhalten. Also kann letztlich A(y) für mehrere verschiedene Ausdrücke stehen. Das ist aber nicht weiter schlimm, da alle diese Ausdrücke dieselbe Bedeutung haben (und auf die kommt es ja nur an).

Beweistätigkeit bzw. formale Ableitung (Deduktion).

Beweiskalküle und Kalküle des natürlichen Schließens können auf die Prädikatenlogik erweitert werden.

Der Begriff der Korrektheit eines Kalküls muss hier noch differenziert werden:

Eine prädikatenlogische Kalkül-Regel ist korrekt (im gewöhnlichen Sinn), wenn in jedem Modell, in dem die Prämissen gelten, auch die Schlussfolgerung gilt. Sie heißt strikt wahrheitsertaltend, wenn sogar in jeder Basis, in der die Prämissen gelten, auch die Schlussfolgerung gilt. Ein Kalkül heißt korrekt bzw. strikt wahrheitsertaltend, wenn dies für alle seine Regeln gilt und seine Axiome Tautologien sind.

Jede strikt wahrheitsertaltende Regel ist auch im gewöhnlichen Sinn korrekt ist, aber das Umgekehrte muss nicht der Fall sein (wie wir anhand der folgenden $\forall E$ -Regel sowie der FreiU-Regel sehen werden). Prädikatenlogische Kalküle verwenden außer den Regeln der aussagelogischen Kalküle (die alle strikt wahrheitsertaltend sind!) oft die folgenden berühmten Schlussregeln:

$\frac{\forall v A(v)}{A(s)}$ <p>(v Variable, s Individuenterm)</p>	$\frac{A}{A^*}$ <p>(A* entsteht aus A durch gebundene Umbenennung)</p>	$\frac{A}{\forall v A}$ <p>(v Variable)</p>	$\frac{A}{A^*}$ <p>(A* entsteht aus A durch freie Umbenennung, s.unten)</p>
---	--	---	---

Gemäß $\forall B$ darf man z.B. von $\forall x (x = x)$ auf $0 = 0$ schließen, ebenso auf $x+1=x+1$ usw. Die Bedingung „s Individuenterm“ heißt, dass s ein Element des Grundbereichs bezeichnen soll; man könnte hierfür als zweite Prämisse „ $s \in \mathbb{D}$ “ hinzufügen. Es gilt im Folgenden die übliche Konvention, dass kleine Buchstaben immer Individuenterme bezeichnen; v ist immer eine beliebige Variable. Die $\forall B$ -Regel heißt auch *Instantiierung* oder *Exemplifizierung*. In der scholastischen Syllogistik entspricht sie dem *dictum de omni et nullo* (siehe oben S. 29).

Gemäß GebU darf man von $\forall x (x = x)$ auf $\forall y (y = y)$ schließen. Beides ist strikt wahrheitsertaltend.

Gemäß $\forall E$ dürfte man von $x > 2$ auf $\forall x (x > 2)$ schließen. Das ist nicht strikt wahrheitsertaltend, denn wenn eine Behauptung über x (wie $x > 2$) für eine bestimmte Interpretation von x (in einer bestimmten Basis) gilt, muss sie nicht für alle x gelten. Trotzdem ist die Regel im gewöhnlichen Sinn korrekt. Wenn nämlich eine Formel in einem Modell M gilt (wie z.B. $x + y = y + x$ im Modell unseres oben beschriebenen mathematischen Beispiels), so heißt dies, dass sie gemäß den semantischen Bestimmungen des Modells für jede beliebige Variablenbelegung B wahr ist. Daher sind dann in diesem Modell z.B. auch $\forall x (x + y = y + x)$ und $\forall y (x + y = y + x)$ gültig. Sofern man mit den Kalkülen nur die allgemeingültigen Formeln ermitteln will, stört es also nicht, wenn sie nicht strikt wahrheitsertaltend sind.

Gemäß FreiU wird A durch „freie Umbenennung“ in A* überführt: D.h. hier werden freie Variablen in A durch andere ersetzt, und zwar unter denselben Auflagen wie bei der gebundenen Umbenennung (siehe oben S. 48), dass Verschiedenheit und Bindungsstrukturen der Variablen erhalten bleiben. Auch diese Regel ist nicht strikt wahrheitsertaltend (denn was für das Denotat einer Variablen gilt, muss nicht auch für das einer anderen gelten), wohl aber ist sie korrekt (denn wenn in einem Modell eine Formel gültig ist, ist sie dort für alle Variablenbelegungen wahr). So darf man etwa aus der Gleichung $x + y = y + x$ die Gleichung $x' + y' = y' + x'$ oder $y + z = z + y$ machen.

Ein korrekter und vollständiger axiomatischer Kalkül für die Prädikatenlogik der Gödel’schen Art ist der folgende. Er enthält:

– die schon in der Aussagenlogik genannten drei Axiome, nämlich

- (1) Jede Formel der Form $((A \vee A) \rightarrow A)$ (Tautologieprinzip),
- (2) Jede Formel der Form $(A \rightarrow (A \vee B))$ (Additionsprinzip),
- (3) Jede Formel der Form $((A \rightarrow B) \rightarrow ((C \vee A) \rightarrow (B \vee C)))$ (Summationsprinzip);

– die beiden Axiome der Gleichheitslogik (siehe Abschnitt 2), nämlich

- (4) Jede Formel der Form $v = v$ (Reflexivität),
- (5) Jede Formel der Form $v = w \rightarrow A(v) = A(w)$ (Ersetzbarkeitsregel von Leibniz);

- als aussage-logische Regel MP (Modus Ponens), und zusätzlich als prädikatenlogischen Regeln $\forall B, \forall E, \text{GebU}$ und FreiU .
- außerdem definitorische Regeln (Ur-Zeichen sind $=, \neg, \vee, \forall$; die übrigen wie \in sind primitive oder definierte nichtlogische Zeichen), insbesondere definiert Gödel: $A \rightarrow B : \Leftrightarrow (\neg A) \vee B, A \wedge B : \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B), A \leftrightarrow B : \Leftrightarrow A \rightarrow B \wedge B \rightarrow A, \exists v A : \Leftrightarrow \neg \forall v \neg A$.

Gödels 1929 bewiesener *Vollständigkeitssatz* besagt, dass mit diesem Kalkül alle Tautologien und allgemeingültigen Implikationen aus vorgelegten Axiomen, die in einer prädikatenlogischen Sprache erster Stufe formulierbar sind, formal herleitbar sind.

Berühmter noch als dieser Vollständigkeitssatz sind aber seine *Unvollständigkeitssätze* (1931). Sie besagen:

- (1) Es gibt für die Prädikatenlogik höherer Stufen keine derartigen vollständigen Kalküle.
- (2) Es gibt auch im Rahmen der Prädikatenlogik erster Stufe keinen korrekten Kalkül, der alle aus einem hinreichend komplexen konsistenten Axiomensystem in *einem bestimmten Modell* folgenden Implikationen formal herzuleiten gestattet. „Hinreichend komplex“ bedeutet für das Axiomensystem, dass es z.B. stark genug ist, um damit die üblichen Grundgesetze der Arithmetik der natürlichen Zahlen abzuleiten. Demnach muss es für natürliche Zahlen geltende *Wahrheiten* geben, die *nicht beweisbar sind*. Man beachte, dass dies nicht im Widerspruch zum Vollständigkeitssatz steht, da mit einem vollständigen Kalkül der Prädikatenlogik nur diejenigen Wahrheiten hergeleitet werden können, die simultan in *jedem Modell* gelten; nicht herleiten kann man damit aber diejenigen prädikatenlogischen Wahrheiten eines Modells, die *nur dort* gelten. Und einen Kalkül, der eben dies auch könnte, kann es nach Gödels Resultat nicht geben.
- (3) Zu den nicht aus dem in (2) betrachteten Axiomensystem herleitbaren Wahrheiten gehört die Widerspruchsfreiheit dieser Axiome.

Prädikatenlogische Kalküle des natürlichen Schließens enthalten zusätzlich zu den oben genannten Regeln ($\forall B, \forall E, \text{GebU}$) und FreiU sowie allen Regeln der aussage-logischen Kalküle noch weitere, vor allem die folgenden:

$\exists B$ (\exists -Beseitigung) $\frac{\exists v A(v)}{A(n)}$ (n neuer Individuen-Name)	$\exists E$ (\exists -Einführung) $\frac{A(s)}{\exists v A(v)}$ (v Variable, s Individuenterm)	$\exists!$ -Regeln $\exists! v A(v)$ $\frac{\exists! v A \quad A(a) \wedge A(b)}{\exists v A \quad a = b}$ (v Variable, a,b Individuenterme)	ι -Regeln $\frac{\exists! v A(v) \quad a = \iota v A(v)}{A(a)} \quad \frac{\exists! v A(v) \quad A(a)}{a = \iota v A(v)} \quad \frac{\neg \exists! v A(v)}{\iota v A(v) = \perp}$ (v Variable, a Individuenterm)
---	---	---	--

Zur \exists -Beseitigung ist anzumerken: n ist hier als ein *neuer nicht-logischer Name* (0-stelliger Termfunktork) aufzufassen, er muss also von allen bisher verwendeten Konstanten verschieden sein und wird (eigens und nur für den Beweis-zweck) vorübergehend eingeführt. Er soll natürlich ein Objekt bezeichnen, für das A(n) gilt (ein solches Objekt gibt es ja, wenn die Voraussetzung $\exists v A(v)$ gilt). Dazu kommen folgende Regeln über die Gleichheit:

Trans (Transitivität der Gleichheit) $a = b$ $b = c$ <hr/> $a = c$	Komp (Komparativität der Gleichheit) $a = c$ $b = c$ <hr/> $a = b$	Ers (Leibniz'sche Ersetzregel) $A(a)$ $a = b$ $a = b$ <hr/> $A(b)$ $A(a) = A(b)$
--	--	--

Außerdem folgende Äquivalenzen (\Leftrightarrow , Formeln mit gleichem Wahrheitswert) und Äquivalenzen (\equiv , Terme mit gleichem Denotat); dabei ist die rechte/linke Seite ersetzbar durch linke/rechte:

1. Sym (Symmetrie von = und \neq)
 2. \neq
 3. \notin
 4. \subseteq
 5. \subset
 6. \mathbb{D}
 7. \emptyset
 8. Klass (Klassenbeschreibungen)
 9. Rel \forall (Relativierung des \forall -Quantors)
 10. Rel \exists (Relativierung der \exists -Quantoren)
 11. $\forall \exists$ (All-Existenzquantor-Dualität)
 12. $\exists!$
 13. κ
- $a \neq b \Leftrightarrow \neg(a = b)$ und $a = b \Leftrightarrow \neg(a \neq b)$
 $a \notin b \Leftrightarrow \neg(a \in b)$ und $a \in b \Leftrightarrow \neg(a \notin b)$
 $a \subseteq b \Leftrightarrow \forall v (v \in a \rightarrow v \in b)$ (wobei v in a,b nicht frei ist)
 $a \subset b \Leftrightarrow a \subseteq b \wedge a \neq b$
 $\mathbb{D} \equiv \kappa v (v = v)$
 $\emptyset \equiv \kappa v (v \neq v)$
 $\{v \mid A\} \equiv \kappa v A$ und $\{a,b,c,\dots\} \equiv \{u \mid u = a \vee u = b \vee u = c \vee \dots\}$ (wobei u in a,b,c,... nicht frei ist)
 $\forall v \in C A \Leftrightarrow \forall v (v \in C \rightarrow A)$
 $\exists v \in C A \Leftrightarrow \exists v (v \in C \wedge A)$ und $\exists! v \in C A \Leftrightarrow \exists! v (v \in C \wedge A)$
 $\exists v A \Leftrightarrow \neg \forall v \neg A$ und $\forall v A \Leftrightarrow \neg \exists v \neg A$
 $\exists! v A(v) \Leftrightarrow \exists v (A(v) \wedge A w (w \neq v \rightarrow \neg A(w)))$
 $a \in \kappa v A(v) \Leftrightarrow a \in \mathbb{D} \wedge A(a)$

Zur Illustration der Anwendung des Kalküls vgl. folgende Ableitung:

<ol style="list-style-type: none"> (1) $\exists x A(x)$ (2) $\forall x (A(x) \rightarrow B(x))$ (3) $A(n)$ (4) $A(n) \rightarrow B(n)$ (5) $B(n)$ (6) $\exists x B(x)$ 	<ol style="list-style-type: none"> Prämisse Prämisse, $\therefore \exists x B(x)$ (1) $\exists B$, n neuer Name $\forall B$ (4,3) MP (5) $\exists E$, q.e.d. 	<p>Übung 10a: Versuchen Sie, die folgende Deduktion durchzuführen:</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) $\forall x (A(x) \rightarrow B(x) \wedge C(x))$ Prämisse (2) $\exists x (A(x) \wedge D(x))$ Prämisse, $\therefore \exists x (B(x) \wedge D(x))$ <p>Übung 10b: Warum ist $\forall x \in C A$ im Fall, dass C die leere Menge ist, immer wahr, gleichgültig welche Formel A ist?</p>
--	--	--